# Die Widerspruchsfreiheit der Stufenlogik.

Von

Gerhard Gentzen in Göttingen.

---

Für das Folgende setze ich die Kenntnis der Grundtatsachen der mathematischen Logik, und zwar der Aussagen-, Prädikaten- und Stufenlogik voraus [1]).

Die Widerspruchsfreiheit der *Aussagenlogik* pflegt man durch die Ausrechnung der Wahrheitswerte [2]) zu beweisen. Die Widerspruchsfreiheit der *Prädikatenlogik* [3]) läßt sich durch eine einfache Erweiterung dieses Verfahrens nachweisen [4]). Der Grundgedanke hierbei ist, den Gegenstandsbereich so zu spezialisieren, daß er nur ein einziges Element enthält.

Im folgenden soll von dem gleichen Grundgedanken aus die Widerspruchsfreiheit der *Stufenlogik* auf einfache Weise bewiesen werden. Als „Stufenlogik" bezeichne ich den „erweiterten Funktionenkalkül" im Sinne von H.-A. [5]), unter Einhaltung der Russellschen Typenunterscheidung für die Prädikate, jedoch ohne die feinere Unterscheidung der sogenannten „verzweigten Typentheorie" [6]). Näheres in § 1. Die Stufenlogik umfaßt im wesentlichen das System der „Principia Mathematica" einschließlich des „Auswahlaxioms", jedoch mit Ausschluß des „Unendlichkeitsaxioms" [7]). Durch die Hinzunahme dieses Axioms, d. h. durch die Zugrundelegung eines *unendlichen* Gegenstandsbereichs, entstehen erst die wesentlichen Schwierigkeiten, deren Lösung die Hauptaufgabe der Hilbertschen Beweis-

---

[1]) Siehe etwa: Hilbert-Ackermann, Grundzüge der theoretischen Logik, im folgenden als H.-A. zitiert; R. Carnap, Abriß der Logistik; H. Behmann, Mathematik und Logik.

[2]) H.-A., S. 29—31.

[3]) Bei H.-A. „engerer Funktionenkalkül" genannt.

[4]) H.-A., S. 65.

[5]) Siehe Anm. [1]).

[6]) Carnap, Abriß der Logistik, S. 21. — Ich verwende die Bezeichnungen „Stufe" und „Typ" in gleichem Sinne wie Carnap und Behmann (bezüglich „Stufe" im Anschluß an Frege).

[7]) Vgl. B. Russell, Einführung in die mathematische Philosophie.

theorie darstellt. Bemerkenswert ist, daß bei Fortlassung der Stufenunterscheidung schon *ohne* das Unendlichkeitsaxiom *Widersprüche* auftreten, z. B. die „Russellsche Antinomie“ [8]); bei Unterscheidung der Stufen ist dies, wie der folgende Beweis zeigt, also nicht mehr möglich.

## § 1.

## Formale Gestalt der Stufenlogik [9]).

Deutsche und griechische Buchstaben verwende ich als Mitteilungszeichen. Unter Subst $\mathfrak{A}\binom{\mathfrak{b}}{\mathfrak{c}}$ verstehe ich den Ausdruck, der aus einem Ausdruck $\mathfrak{A}$ hervorgeht, wenn man das Zeichen $\mathfrak{b}$ überall, wo es in $\mathfrak{A}$ vorkommt, durch das Zeichen $\mathfrak{c}$ ersetzt.

1. 1. Erklärung des Begriffs „*Formel*“ ⟨formales Abbild einer *Aussage* aus der Stufenlogik⟩.

1. 1 1. Ich benötige *freie* und *gebundene Variable* verschiedener *Stufen*. Als Variable mögen beliebige noch nicht anders verwendete Zeichen zugelassen sein; es ist nur jeweils anzugeben, ob das betreffende Zeichen eine freie oder eine gebundene Variable darstellen soll; ferner ist die Stufe der Variablen durch einen angehängten Zahlenindex zu bezeichnen. Stufen sind 0, 1, 2, 3, ....

⟨Inhaltlich bedeuten Variable der Stufe 0 beliebige Gegenstände des Gegenstandsbereichs, Variable der Stufe 1 beliebige Eigenschaften (= einstellige Prädikate) von Gegenständen, allgemein (für $\nu \geqq 1$) Variable der Stufe $\nu + 1$ beliebige Eigenschaften von Eigenschaften der Stufe $\nu$. Die Eigenschaften vertreten zugleich die „Klassen“ (= Mengen) von Elementen, auf welche die betreffende Eigenschaft zutrifft.⟩

Man verwendet gewöhnlich noch *mehrstellige* Prädikate, weiterhin Prädikate für solche usw., wodurch innerhalb der einzelnen Stufen noch eine Unterteilung in verschiedene *Typen* von Prädikaten notwendig wird [10]). Nach einer Bemerkung von Gödel [11]) sind diese jedoch grundsätzlich entbehrlich.

1. 1 2. Ein Ausdruck der Form $\mathfrak{a}_{\nu+1}\mathfrak{b}_\nu$, wobei $\mathfrak{a}_{\nu+1}$ und $\mathfrak{b}_\nu$ beliebige freie Variable (der durch den Index angezeigten Stufen, $\nu \geqq 0$) sind, ist

---

[8]) H.-A., S. 93.

[9]) Vgl. K. Gödel, Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I, Monatsh. f. Math. und Phys. 38 (1931), besonders S. 176—178, sowie R. Carnap, Logische Syntax der Sprache (Wien 1934), Kap. III.

[10]) Carnap, Abriß der Logistik, Nr. 13.

[11]) Siehe die in Anm. [9]) zitierte Arbeit, S. 176.

eine Formel. ⟨Inhaltliche Bedeutung: „Die Eigenschaft $\mathfrak{a}_{\nu+1}$ trifft auf $\mathfrak{b}_\nu$ zu“ bzw.: „$\mathfrak{b}_\nu$ ist Element der Menge $\mathfrak{a}_{\nu+1}$“.⟩

Ist $\mathfrak{A}$ eine Formel, so ist auch $\neg\, \mathfrak{A}$ eine Formel. ⟨Inhaltliche Bedeutung: „$\mathfrak{A}$ gilt nicht“.⟩ Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Formeln, so sind auch $\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$ ⟨„$\mathfrak{A}$ gilt und $\mathfrak{B}$ gilt“⟩, $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ ⟨„$\mathfrak{A}$ gilt oder $\mathfrak{B}$ gilt“⟩, $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ ⟨„ wenn $\mathfrak{A}$ gilt, so gilt $\mathfrak{B}$“⟩ und $\mathfrak{A} \supset\subset \mathfrak{B}$ ⟨„$\mathfrak{A}$ gilt dann und nur dann, wenn $\mathfrak{B}$ gilt“⟩ Formeln.

Ist $\mathfrak{A}$ eine Formel, in der die freie Variable $\mathfrak{a}_\nu$ vorkommt und die gebundene Variable $\mathfrak{x}_\nu$ nicht vorkommt, so sind auch $\forall\, \mathfrak{x}_\nu$ Subst $\mathfrak{A}\binom{\mathfrak{a}_\nu}{\mathfrak{x}_\nu}$ und $\exists\, \mathfrak{x}_\nu$ Subst $\mathfrak{A}\binom{\mathfrak{a}_\nu}{\mathfrak{x}_\nu}$ Formeln. ⟨Inhaltliche Bedeutung: „Subst $\mathfrak{A}\binom{\mathfrak{a}_\nu}{\mathfrak{x}_\nu}$ gilt für alle $\mathfrak{x}_\nu$“; bzw.: „es gibt ein $\mathfrak{x}_\nu$, so daß Subst $\mathfrak{A}\binom{\mathfrak{a}_\nu}{\mathfrak{x}_\nu}$ gilt“.⟩

1.13. Keine weiteren Ausdrücke, als solche, die gemäß 1.12 gebildet sind, sind Formeln. Durch Klammern ist dafür zu sorgen, daß der Aufbau einer Formel eindeutig ersichtlich ist. *Beispiel* einer *Formel*:

$$\neg\, \exists\, y_2\, [a_1\, b_0 \,\&\, \forall\, z_4\, (c_3\, y_2 \supset\subset z_4\, a_3)].$$

$a_1$, $b_0$, $c_3$ und $a_3$ seien freie Variable, $y_2$ und $z_4$ gebundene Variable.

Für eine Formel oder einen Formelteil der Gestalt

$$\forall\, \mathfrak{x}_{\nu+1}\, (\mathfrak{x}_{\nu+1}\, \mathfrak{r}_\nu \supset \mathfrak{x}_{\nu+1}\, \mathfrak{s}_\nu),$$

wobei $\mathfrak{r}_\nu$, $\mathfrak{s}_\nu$ und $\mathfrak{x}_{\nu+1}$ Variable seien, kann als Abkürzung geschrieben werden: $\mathfrak{r}_\nu = \mathfrak{s}_\nu$.

1.2. Erklärung des Begriffs „*Herleitung*“ ⟨formales Abbild eines *Beweises* aus der Stufenlogik⟩.

Eine Herleitung ist eine Reihe von Formeln, von denen jede entweder eine „Grundformel“ ist oder aus irgendwelchen in der Reihe vorangehenden Formeln durch Anwendung einer „Schlußregel“ hervorgeht. Die zulässigen Grundformeln und Schlußregeln werden im folgenden angegeben.

1.21. ⟨Aussagenlogik.⟩ Als Grundformel gilt jede Formel, die aus einer „immer richtigen Aussagenverbindung“ im Sinne von H.-A. [12]) durch Einsetzung beliebiger Formeln in unserem Sinne (1.1) für die „Grundaussagen“ hervorgeht. Ferner gilt die Schlußregel: Aus zwei Formeln der Gestalt $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ darf die Formel $\mathfrak{B}$ hergeleitet werden.

1.22. ⟨Prädikatenlogik.⟩ Grundformeln sind alle Formeln der Gestalt $(\forall\, \mathfrak{x}_\nu\, \mathfrak{A}) \supset$ Subst $\mathfrak{A}\binom{\mathfrak{x}_\nu}{\mathfrak{a}_\nu}$ und Subst $\mathfrak{A}\binom{\mathfrak{x}_\nu}{\mathfrak{a}_\nu} \supset \exists\, \mathfrak{x}_\nu\, \mathfrak{A}$, wobei für $\forall\, \mathfrak{x}_\nu\, \mathfrak{A}$

[12]) S. 11.

bzw. $\exists \mathfrak{x}_\nu \mathfrak{A}$ eine beliebige Formel von dieser Gestalt, für $\mathfrak{a}_\nu$ eine beliebige freie Variable einzusetzen ist; $\nu$ soll, auch im folgenden, immer irgendeine ganze Zahl $\geqq 0$ sein.

Schlußregeln für $\forall$ und $\exists$: Aus einer Formel der Gestalt $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ darf die Formel $\mathfrak{A} \supset \forall \mathfrak{x}_\nu \text{ Subst } \mathfrak{B}\binom{\mathfrak{a}_\nu}{\mathfrak{x}_\nu}$ hergeleitet werden, wobei $\mathfrak{a}_\nu$ eine in $\mathfrak{B}$, doch nicht in $\mathfrak{A}$, vorkommende freie Variable, $\mathfrak{x}_\nu$ eine in $\mathfrak{B}$ nicht vorkommende gebundene Variable sei. Aus einer Formel der Gestalt $\mathfrak{B} \supset \mathfrak{A}$ darf die Formel $\left(\exists \mathfrak{x}_\nu \text{ Subst } \mathfrak{B}\binom{\mathfrak{a}_\nu}{\mathfrak{x}_\nu}\right) \supset \mathfrak{A}$ hergeleitet werden, wobei $\mathfrak{a}_\nu$ eine in $\mathfrak{B}$, doch nicht in $\mathfrak{A}$, vorkommende freie Variable, $\mathfrak{x}_\nu$ eine in $\mathfrak{B}$ nicht vorkommende gebundene Variable sei.

1.23. ⟨Gleichheit.⟩ Grundformel ist jede Formel der Gestalt

$$[\forall \mathfrak{x}_\nu (\mathfrak{a}_{\nu+1} \mathfrak{x}_\nu \supset\subset \mathfrak{b}_{\nu+1} \mathfrak{x}_\nu)] \supset \mathfrak{a}_{\nu+1} = \mathfrak{b}_{\nu+1},$$

wobei für $\mathfrak{a}_{\nu+1}$ und $\mathfrak{b}_{\nu+1}$ beliebige freie Variable einzusetzen sind, für $\mathfrak{x}_\nu$ eine beliebige gebundene Variable.

1.24. ⟨Axiome der Mengenbildung.⟩ Grundformel ist jede Formel der Gestalt

$$\exists \mathfrak{x}_{\nu+1} \forall \mathfrak{y}_\nu \left[\mathfrak{x}_{\nu+1} \mathfrak{y}_\nu \supset\subset \text{Subst } \mathfrak{A}\binom{\mathfrak{a}_\nu}{\mathfrak{y}_\nu}\right],$$

wobei für $\mathfrak{A}$ irgendeine Formel einzusetzen ist, in der die (beliebige) freie Variable $\mathfrak{a}_\nu$ vorkommt; für $\mathfrak{x}_{\nu+1}$ und $\mathfrak{y}_\nu$ sind beliebige in $\mathfrak{A}$ nicht vorkommende gebundene Variable einzusetzen. ⟨Inhaltliche Bedeutung („Komprehensionsaxiom"): Irgendeine beliebig gebaute Aussage $\mathfrak{A}$, in der die freie Variable $\mathfrak{a}_\nu$ vorkommt, bestimmt eine *Menge* $(\mathfrak{x}_{\nu+1})$, nämlich die Menge derjenigen $\mathfrak{a}_\nu$, auf welche sie zutrifft.⟩

Grundformel ist ferner jede Formel der Gestalt

$$\begin{aligned}&\{[\forall \mathfrak{x}_{\nu+1} (\mathfrak{a}_{\nu+2} \mathfrak{x}_{\nu+1} \supset \exists \mathfrak{y}_\nu\ \mathfrak{x}_{\nu+1} \mathfrak{y}_\nu)] \mathbin{\&} \forall \mathfrak{z}_{\nu+1} \forall \mathfrak{u}_{\nu+1} [(\mathfrak{a}_{\nu+2} \mathfrak{z}_{\nu+1} \\ &\quad \mathbin{\&} \mathfrak{a}_{\nu+2} \mathfrak{u}_{\nu+1} \mathbin{\&} \neg\, \mathfrak{z}_{\nu+1} = \mathfrak{u}_{\nu+1}) \supset \neg \exists \mathfrak{v}_\nu (\mathfrak{z}_{\nu+1} \mathfrak{v}_\nu \mathbin{\&} \mathfrak{u}_{\nu+1} \mathfrak{v}_\nu)]\} \\ &\quad \supset \exists \mathfrak{w}_{\nu+1} \forall \mathfrak{r}_{\nu+1} \{\mathfrak{a}_{\nu+2} \mathfrak{r}_{\nu+1} \supset \exists \mathfrak{s}_\nu [\mathfrak{w}_{\nu+1} \mathfrak{s}_\nu \mathbin{\&} \mathfrak{r}_{\nu+1} \mathfrak{s}_\nu \\ &\quad \mathbin{\&} \neg \exists \mathfrak{t}_\nu (\mathfrak{w}_{\nu+1} \mathfrak{t}_\nu \mathbin{\&} \mathfrak{r}_{\nu+1} \mathfrak{t}_\nu \mathbin{\&} \neg\, \mathfrak{t}_\nu = \mathfrak{s}_\nu)]\};\end{aligned}$$

dabei ist für $\mathfrak{a}_{\nu+2}$ irgendeine freie Variable, für $\mathfrak{x}_{\nu+1}$, $\mathfrak{y}_\nu$, $\mathfrak{z}_{\nu+1}$, $\mathfrak{u}_{\nu+1}$, $\mathfrak{v}_\nu$, $\mathfrak{w}_{\nu+1}$, $\mathfrak{r}_{\nu+1}$, $\mathfrak{s}_\nu$ und $\mathfrak{t}_\nu$ sind irgendwelche voneinander verschiedene gebundene Variable einzusetzen. ⟨Inhaltliche Bedeutung („Auswahlaxiom"): Zu einer beliebigen Gesamtheit $(\mathfrak{a}_{\nu+2})$ von Mengen, die nicht leer sind, und die elementefremd sind, gibt es eine *Auswahlmenge* $(\mathfrak{w}_{\nu+1})$, die mit jeder der Mengen ein und nur ein Element $(\mathfrak{s}_\nu)$ gemeinsam hat.⟩

## § 2.

## Widerspruchsfreiheitsbeweis.

2.1. Grundgedanken. Es soll gezeigt werden, daß das in § 1 angegebene formale System *widerspruchsfrei* ist, d. h. daß darin keine Formel der Gestalt $\mathfrak{A} \,\&\, \neg\, \mathfrak{A}$ hergeleitet werden kann.

Die Stufenlogik soll, inhaltlich gedeutet, für jeden beliebigen zugrunde gelegten (nicht leeren) Gegenstandsbereich gelten. Würde sie auf einen Widerspruch führen, so müßte dieser insbesondere bereits im Falle eines aus nur *einem einzigen* Element bestehenden Gegenstandsbereichs zustande kommen. In diesem Spezialfalle sind nun alle Aussagen *entscheidbar*; das beruht darauf, daß es in jeder Stufe nur *endlich viele* Objekte gibt, nämlich: in der Stufe 0 den einen Gegenstand, in der Stufe 1 die Menge, die den Gegenstand enthält, und die Menge, die ihn nicht enthält, also zwei verschiedene Mengen; in der Stufe 2 gibt es entsprechend vier verschiedene Mengen, usw. Es läßt sich nun leicht nachprüfen, daß in diesem Spezialfalle alle Aussagen „richtig" sind, insbesondere kein Widerspruch bewiesen werden kann.

2.2. Durchführung des Beweises. Es liege eine beliebige Herleitung aus der Stufenlogik (1.2) vor. Wir werden die Herleitung in vier Schritten *umformen*.

Wir führen zunächst die folgenden *Hilfszeichen* ein ⟨diese vertreten „den einzigen Gegenstand der Stufe 0", die zwei „Mengen der Stufe 1", usw.⟩:

$$\gamma_0^{(1)};\ \gamma_1^{(1)},\ \gamma_1^{(2)};\ \gamma_2^{(1)},\ \gamma_2^{(2)},\ \gamma_2^{(3)},\ \gamma_2^{(4)};$$

allgemein $\varrho_\nu$ Zeichen mit dem Index $\nu$: $\gamma_\nu^{(1)}, \ldots, \gamma_\nu^{(\varrho_\nu)}$, wobei $\varrho_\nu = 2^{\varrho_{\nu-1}}$ sei (für $\nu \geqq 1$).

2.21. Erster Umformungsschritt (Ersetzung der freien Variablen durch die $\gamma$).

Man nehme irgendeine Herleitungsformel $\mathfrak{A}$, die eine *freie Variable* $\mathfrak{a}_\nu$ enthält, vor und ersetze sie durch folgende Reihe von Ausdrücken: $\mathrm{Subst}\,\mathfrak{A}\begin{pmatrix}\mathfrak{a}_\nu\\ \gamma_\nu^{(1)}\end{pmatrix}, \ldots, \mathrm{Subst}\,\mathfrak{A}\begin{pmatrix}\mathfrak{a}_\nu\\ \gamma_\nu^{(\varrho_\nu)}\end{pmatrix}$. Dieselbe Umformung führe man so oft durch, bis nirgends mehr eine freie Variable vorkommt; auch die neu entstehenden Ausdrücke sind also, soweit sie noch freie Variable enthalten, in derselben Weise weiter zu behandeln.

2.22. Zweiter Umformungsschritt (Ersetzung der gebundenen Variablen durch die $\gamma$).

Irgendein Teil irgendeines der beim ersten Schritt entstandenen Ausdrücke (bzw. der Ausgangsformeln, soweit diese vom ersten Schritt nicht betroffen wurden) habe die Gestalt $\forall\, \mathfrak{x}_\nu \mathfrak{A}$ bzw. $\exists\, \mathfrak{x}_\nu \mathfrak{A}$. Alsdann ersetze man diesen durch die Konjunktion bzw. Disjunktion der Ausdrücke Subst $\mathfrak{A}\begin{pmatrix}\mathfrak{x}_\nu\\ \gamma_\nu^{(1)}\end{pmatrix}, \ldots,$ Subst $\mathfrak{A}\begin{pmatrix}\mathfrak{x}_\nu\\ \gamma_\nu^{(\varrho_\nu)}\end{pmatrix}$. Dieselbe Umformung führe man so oft durch (auch wieder an den neu entstandenen Ausdrücken, soweit erforderlich), bis nirgends mehr eine gebundene Variable vorkommt. Man überlegt sich leicht, daß die *Reihenfolge* dieser Umformungen auf das Endergebnis keinerlei Einfluß hat.

2.2 3. Dritter Umformungsschritt (Einsetzung der Wahrheitswerte für die $\gamma$).

Wir führen zwei weitere *Hilfszeichen* ein: die „Wahrheitswerte" $\curlyvee$ ⟨für „das Wahre"⟩ und $\curlywedge$ ⟨für „das Falsche"⟩.

Irgendein Teil irgendeines der aus den Herleitungsformeln durch den ersten und zweiten Schritt hervorgegangenen Ausdrücke habe die Gestalt $\gamma_{\nu+1}^{(\sigma)}\,\gamma_\nu^{(\tau)}$. Man ersetze ihn nach der folgenden Anweisung durch $\curlyvee$ bzw. $\curlywedge$:

$\gamma_1^{(1)}\,\gamma_0^{(1)}$ wird ersetzt durch $\curlyvee$, $\gamma_1^{(2)}\,\gamma_0^{(1)}$ durch $\curlywedge$; allgemein: Den Ausdrücken $\gamma_{\nu+1}^{(\lambda)}\,\gamma_\nu^{(\mu)}$ $(\nu \geqq 0;\ \lambda = 1, \ldots, \varrho_{\nu+1};\ \mu = 1, \ldots, \varrho_\nu)$ sind die Zeichen $\curlyvee$ und $\curlywedge$ in der Weise zuzuordnen, daß zu jeder möglichen Verteilung der Zeichen $\curlyvee$ und $\curlywedge$ auf die Zeichen $\gamma_\nu$ genau ein $\gamma_{\nu+1}$ gehört, dessen Verbindungen mit den $\gamma_\nu$ die betreffenden Werte $\curlyvee$ und $\curlywedge$ zugeteilt erhalten. Dies läßt sich machen, da die Anzahl der $\gamma_\nu$ gleich $\varrho_\nu$, die Anzahl der möglichen Verteilungen von $\curlyvee$ und $\curlywedge$ auf diese also gleich $2^{\varrho_\nu} = \varrho_{\nu+1}$ gleich der Anzahl der $\gamma_{\nu+1}$ ist. ⟨Inhaltlicher Sinn: Die $\gamma_{\nu+1}$ sollen alle möglichen Mengen von $\gamma_\nu$ vertreten.⟩

Dieselbe Umformung führe man so oft durch, bis kein $\gamma$ mehr vorkommt. Es konnte nämlich kein $\gamma$ anders als in einer Verbindung $\gamma_{\nu+1}^{(\sigma)}\,\gamma_\nu^{(\tau)}$ auftreten (1.1 2).

2.2 4. Vierter Umformungsschritt (Ausrechnung der Wahrheitswerte).

Aus den Formeln der ursprünglichen Herleitung sind jetzt durchweg Ausdrücke hervorgegangen, die nur noch aus den Zeichen $\curlyvee$ und $\curlywedge$, verbunden durch die Verknüpfungszeichen $\neg$, &, $\vee$, $\supset$, $\supset\subset$ bestehen. Diese Ausdrücke werden nun in der aus der Aussagenlogik bekannten Weise „ausgerechnet" (d. h. man ersetzt $\curlyvee \,\&\, \curlyvee$ durch $\curlyvee$, $\curlyvee \,\&\, \curlywedge$ durch $\curlywedge$ usw.), so daß schließlich für jeden Ausdruck nur noch ein einziges Zeichen $\curlyvee$ oder $\curlywedge$ dasteht.

2.2 5. Abschluß des Beweises. Ich behaupte nun: Die gemäß den angegebenen vier Schritten umgeformte Herleitung besteht nur noch aus Ausdrücken der Form $\curlyvee$.

B e w e i s: Eine Grundformel der Aussagenlogik (1. 2 1) mußte offenbar stets den Wert $\curlyvee$ ergeben; denn *gleiche* Teilformeln wurden bei allen Schritten in *gleicher* Weise verändert, und welchen Wahrheitswert sie auch beim dritten und vierten Schritt erhielten, immer mußte beim vierten Schritt zum Schluß als Gesamtwert $\curlyvee$ herauskommen, da eben die Ausgangsformel „immer richtig" im Sinne der Aussagenlogik war.

Wenn ferner die Formeln $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ bei der Umformung lauter $\curlyvee$ ergeben haben, so müssen auch alle aus der Formel $\mathfrak{B}$ entstandenen Ausdrücke zum Schluß zu $\curlyvee$ geworden sein. Sei nämlich $\mathfrak{B}^*$ irgendeiner der aus $\mathfrak{B}$ beim ersten Schritt hervorgegangenen Ausdrücke. Dann mußte offenbar unter den aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ beim ersten Schritt entstandenen Ausdrücken mindestens ein Paar von Ausdrücken der Form $\mathfrak{A}^*$ und $\mathfrak{A}^* \supset \mathfrak{B}^*$ vorhanden sein. Nun nahm $\mathfrak{A}^*$ zum Schluß den Wert $\curlyvee$ an, ebenso $\mathfrak{A}^* \supset \mathfrak{B}^*$; das ist nur möglich, indem auch $\mathfrak{B}^*$ zu $\curlyvee$ geworden ist, denn $\curlyvee \supset \curlywedge$ gibt $\curlywedge$. (Dabei ist wesentlich, daß gleichlautende Teile verschiedener Ausdrücke beim zweiten bis vierten Schritt in *gleicher* Weise umgeformt wurden.)

Eine Grundformel der Gestalt $(\forall\, \mathfrak{x}_\nu\, \mathfrak{A}) \supset \operatorname{Subst} \mathfrak{A} \binom{\mathfrak{x}_\nu}{\mathfrak{a}_\nu}$ ergab beim ersten Schritt Ausdrücke von der Form $(\forall\, \mathfrak{x}_\nu\, \mathfrak{A}^*) \supset \operatorname{Subst} \mathfrak{A}^* \binom{\mathfrak{x}_\nu}{\gamma_\nu^{(\sigma)}}$; $1 \leqq \sigma \leqq \varrho_\nu$. Beim zweiten Schritt wurde hieraus

$$\left[\operatorname{Subst} \mathfrak{A}^{**} \binom{\mathfrak{x}_\nu}{\gamma_\nu^{(1)}} \,\&\, \ldots \,\&\, \operatorname{Subst} \mathfrak{A}^{**} \binom{\mathfrak{x}_\nu}{\gamma_\nu^{(\varrho_\nu)}}\right] \supset \operatorname{Subst} \mathfrak{A}^{**} \binom{\mathfrak{x}_\nu}{\gamma_\nu^{(\sigma)}}.$$

Da ein Glied der eckigen Klammer gleich dem rechtsstehenden Ausdruck sein muß, ergab die Ausrechnung (dritter und vierter Schritt) in jedem Falle den Wert $\curlyvee$.

Bei einer Grundformel für $\exists$ (1. 2 2) schließen wir ganz entsprechend.

Die $\forall$-Schlußregel (1. 2 2): Nach dem zweiten Schritt hatte man statt $\mathfrak{A} \supset \forall\, \mathfrak{x}_\nu \operatorname{Subst} \mathfrak{B} \binom{\mathfrak{a}_\nu}{\mathfrak{x}_\nu}$ Ausdrücke der Form

$$\mathfrak{A}^* \supset \left[\operatorname{Subst} \mathfrak{B}^* \binom{\mathfrak{a}_\nu}{\gamma_\nu^{(1)}} \,\&\, \ldots \,\&\, \operatorname{Subst} \mathfrak{B}^* \binom{\mathfrak{a}_\nu}{\gamma_\nu^{(\varrho_\nu)}}\right].$$

Nun kamen unter den aus der Formel $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ durch den ersten und zweiten Schritt hervorgegangenen Ausdrücken offenbar die sämtlichen Ausdrücke $\mathfrak{A}^* \supset \operatorname{Subst} \mathfrak{B}^* \binom{\mathfrak{a}_\nu}{\gamma_\nu^{(\sigma)}}$ — $\sigma = 1, \ldots, \varrho_\nu$ — vor. Wenn nun diese beim dritten und vierten Schritt alle den Wert   erhielten, so mußte auch der zuvor genannte Ausdruck denselben Wert annehmen. (Entweder wurde nämlich $\mathfrak{A}^*$ zu $\curlywedge$, dann ist dies erfüllt, oder $\mathfrak{A}^*$ wurde zu $\curlyvee$, dann müssen sämtliche Ausdrücke Subst $\mathfrak{B}^* \binom{\mathfrak{a}_\nu}{\gamma_\nu^{(\sigma)}}$ ebenfalls den Wert $\curlyvee$ erhalten haben, und damit auch deren Konjunktion.)

Bei Anwendungsstellen der $\exists$-Schlußregel schließen wir ganz entsprechend.

Eine Grundformel gemäß 1. 2 3 ergab beim ersten Schritt Ausdrücke von der Form $[\forall\, \mathfrak{x}_\nu\, (\gamma_{\nu+1}^{(\sigma)}\, \mathfrak{x}_\nu \supset\subset \gamma_{\nu+1}^{(\tau)}\, \mathfrak{x}_\nu)] \supset \gamma_{\nu+1}^{(\sigma)} = \gamma_{\nu+1}^{(\tau)}$; $1 \leqq \sigma \leqq \varrho_{\nu+1}$; $1 \leqq \tau \leqq \varrho_{\nu+1}$. Die eckige Klammer konnte nur dann beim dritten und vierten Schritt zu $\curlyvee$ werden, wenn alle beim zweiten Schritt aufgetretenen Konjunktionsglieder $\gamma_{\nu+1}^{(\sigma)}\gamma_\nu^{(\mu)} \supset\subset \gamma_{\nu+1}^{(\tau)}\gamma_\nu^{(\mu)}$, für $\mu = 1, \ldots, \varrho_\nu$, den Wert $\curlyvee$ erhielten; das war wiederum nur möglich, wenn $\sigma$ dieselbe Zahl wie $\tau$ war. Alsdann ergab aber auch $\gamma_{\nu+1}^{(\sigma)} = \gamma_{\nu+1}^{(\tau)}$, d. h. (1.1 3) $\forall\, \mathfrak{y}_{\nu+2}\, (\mathfrak{y}_{\nu+2}\gamma_{\nu+1}^{(\sigma)} \supset \mathfrak{y}_{\nu+2}\gamma_{\nu+1}^{(\tau)})$, offenbar den Wert $\curlyvee$. Also erhielt man beim vierten Schritt in jedem Falle den Wert $\curlyvee$. (Denn $\curlyvee \supset \curlyvee$ gibt $\curlyvee$, und wenn die eckige Klammer den Wert $\curlywedge$ ergab, wurde der Gesamtwert ja stets $\curlyvee$.)

Eine aus dem „Komprehensionsaxiom“ sich ergebende Grundformel (1. 2 4) lieferte nach dem ersten und zweiten Schritt Ausdrücke der Gestalt:

$$\left[\left(\gamma_{\nu+1}^{(1)}\gamma_\nu^{(1)} \supset\subset \text{Subst}\ \mathfrak{A}^*\binom{\mathfrak{a}_\nu}{\gamma_\nu^{(1)}}\right) \& \ldots \& \left(\gamma_{\nu+1}^{(1)}\gamma_\nu^{(\varrho_\nu)} \supset\subset \text{Subst}\ \mathfrak{A}^*\binom{\mathfrak{a}_\nu}{\gamma_\nu^{(\varrho_\nu)}}\right)\right] \vee$$
$$\ldots \vee \left[\left(\gamma_{\nu+1}^{(\varrho_\nu+1)}\gamma_\nu^{(1)} \supset\subset \text{Subst}\ \mathfrak{A}^*\binom{\mathfrak{a}_\nu}{\gamma_\nu^{(1)}}\right) \&\right.$$
$$\left.\ldots \& \left(\gamma_{\nu+1}^{(\varrho_\nu+1)}\gamma_\nu^{(\varrho_\nu)} \supset\subset \text{Subst}\ \mathfrak{A}^*\binom{\mathfrak{a}_\nu}{\gamma_\nu^{(\varrho_\nu)}}\right)\right].$$

Nun mögen sich beim dritten und vierten Schritt für die Ausdrücke Subst $\mathfrak{A}^*\binom{\mathfrak{a}_\nu}{\gamma_\nu^{(\mu)}}$ irgendwelche beliebigen Wahrheitswerte ergeben haben: Immer gibt es unter den eckigen Klammern genau *eine*, in der die für die links stehenden Ausdrücke $\gamma_{\nu+1}^{(\sigma)}\gamma_\nu^{(\tau)}$ (für $\tau = 1, \ldots, \varrho_\nu$) beim dritten Schritt einzusetzenden Wahrheitswerte mit den für die rechts danebenstehenden Ausdrücke Subst $\mathfrak{A}^*\binom{\mathfrak{a}_\nu}{\gamma_\nu^{(\tau)}}$ sich ergebenden Wahrheitswerten sämtlich übereinstimmen. Denn so waren ja gerade die Wahrheitswerte für die $\gamma\gamma$-Verbindungen unter 2. 2 3 festgesetzt worden, daß zu jeder möglichen Verteilung von Wahrheitswerten auf die Zahlen 1 bis $\varrho_\nu$ genau ein $\gamma_{\nu+1}$ gehören sollte, dessen Verbindungen mit den $\gamma_\nu$ eben diese Wahrheitswerte zugeteilt erhielten.

Daraus ergibt sich, daß die betreffende eckige Klammer bei der Ausrechnung den Wert $\curlyvee$ erhalten mußte; und damit wurde dieser auch der gesamten Disjunktion zuteil.

Eine aus dem „Auswahlaxiom" sich ergebende Grundformel lieferte beim ersten Schritt Ausdrücke der gleichen Gestalt, nur mit einem $\gamma_{\nu+2}^{(u)}$ statt $\mathfrak{a}_{\nu+2}$. Vergegenwärtigen wir uns das Aussehen eines solchen Ausdrucks nach dem zweiten Schritt, wobei also alle $\forall$-Ausdrücke durch gewisse Konjunktionen, alle $\exists$-Ausdrücke durch gewisse Disjunktionen ersetzt zu denken sind. Man sieht nun leicht, wenn man sich den *inhaltlichen Sinn* der einzelnen Teilausdrücke vor Augen hält, daß der Gesamtausdruck „wahr" ist, ⟨da nämlich das Auswahlaxiom in endlichen Bereichen trivialerweise gilt,⟩ d. h. formal, daß er den Wert $\curlyvee$ erhalten mußte. Etwas näher ausgeführt: Wäre der Wert $\curlywedge$, so müßte das Vorderglied der Gesamtimplikation den Wert $\curlyvee$, das Hinterglied den Wert $\curlywedge$ haben. Aus ersterem folgt zunächst: Für jedes $\gamma_{\nu+1}^{(\sigma)}$ $(\sigma = 1, \ldots, \varrho_{\nu+1})$ hat $\gamma_{\nu+2}^{(u)}\,\gamma_{\nu+1}^{(\sigma)} \supset (\gamma_{\nu+1}^{(\sigma)}\,\gamma_{\nu}^{(1)} \vee \ldots \vee \gamma_{\nu+1}^{(\sigma)}\,\gamma_{\nu}^{(\varrho_\nu)})$ den Wert $\curlyvee$, das besagt: Wenn $\gamma_{\nu+2}^{(u)}\,\gamma_{\nu+1}^{(\sigma)}$ den Wert $\curlyvee$ hat, so hat auch mindestens einer der Ausdrücke $\gamma_{\nu+1}^{(\sigma)}\,\gamma_{\nu}^{(\tau)}$ $(\tau = 1, \ldots, \varrho_\nu)$ den Wert $\curlyvee$. Entsprechend ergibt sich daraus, daß auch der zweite Teil des Vordergliedes der Gesamtimplikation den Wert $\curlyvee$ hat, gleichfalls dessen inhaltliche Übersetzung für die $\gamma$, d. h.: Zu zwei verschiedenen $\gamma_{\nu+1}$, für die beide $\gamma_{\nu+2}^{(u)}\,\gamma_{\nu+1}$ den Wert $\curlyvee$ hat, gibt es kein $\gamma_\nu$, daß mit jedem der beiden verbunden den Wert $\curlyvee$ ergibt. Nun bilden wir eine „Auswahlmenge", d. h. wir wählen zu jedem $\gamma_{\nu+1}^{(\sigma)}$, für das $\gamma_{\nu+2}^{(u)}\,\gamma_{\nu+1}^{(\sigma)}$ den Wert $\curlyvee$ hat, irgendeines der $\gamma_{\nu}^{(\tau)}$, für die $\gamma_{\nu+1}^{(\sigma)}\,\gamma_{\nu}^{(\tau)}$ den Wert $\curlyvee$ hat, aus, und betrachten dasjenige $\gamma_{\nu+1}^{(\lambda)}$, das mit diesen ausgewählten $\gamma_{\nu}^{(\tau)}$ verbunden, und mit keinen anderen, den Wert $\curlyvee$ ergibt. Ein solches $\gamma_{\nu+1}^{(\lambda)}$ muß es ja geben (2. 2 3). Durch Betrachtung des dieser „Auswahlmenge" entsprechenden Gliedes der aus $\exists\,\mathfrak{w}_{\nu+1} \ldots$ entstandenen Disjunktion ist nunmehr leicht einzusehen, daß dieses den Wert $\curlyvee$ erhalten mußte; und daher konnte auch der Gesamtausdruck nicht den Wert $\curlywedge$, sondern nur den Wert $\curlyvee$ bekommen.

Damit ist gezeigt, daß die vorgelegte Herleitung durch die vier Umformungsschritte in lauter Ausdrücke der Form $\curlyvee$ übergegangen sein muß. Hieraus folgt ohne weiteres die *Widerspruchsfreiheit*, denn eine Formel der Gestalt $\mathfrak{A}\ \&\ \neg\,\mathfrak{A}$ müßte offenbar bei den Umformungen den Wert $\curlywedge$ angenommen haben.

2.3. Schlußbemerkungen. Alle beim Beweise angestellten Überlegungen ergeben sich fast von selbst, wenn man sich den *inhaltlichen Sinn* der $\gamma$ (2. 1, 2. 2), sowie der Formeln und Schlußregeln (§ 1) vor

Augen hält. Es ist dann auch leicht einzusehen, daß sich der ganze Beweis unschwer auf den Fall der Zugrundelegung eines *beliebigen endlichen Gegenstandsbereichs* ausdehnen läßt. Es bleibt ja auch dann die Zahl der möglichen Mengen in jeder Stufe endlich. Daraus ergibt sich dann, daß die Stufenlogik auch widerspruchsfrei bleibt, wenn man Axiome hinzunimmt, welche die Existenz einer gewissen endlichen Anzahl von Gegenständen fordern. Verlangt man jedoch das Vorhandensein *unendlich vieler* Gegenstände („Unendlichkeitsaxiom"), so ergeben sich ganz andersartige, heute noch nicht geklärte Verhältnisse.

Der obige Widerspruchsfreiheitsbeweis ist selbstverständlich völlig „*finit*" im Sinne der Hilbertschen Beweistheorie; es kommen nur Schlüsse und Begriffe elementarster Art vor.

(Eingegangen am 22. Januar 1936.)