Sul diagramma di Newton relativo ad una singolarità di una curva algebrica piana.

Al Prof. KONRAD KNOPP
in occasione del suo 60° compleanno, 22/7/1942.

Nota di E. Bompiani (Roma).

Sia C una curva piana algebrica d'ordine n con un punto multiplo d'ordine $r\,(<n)$ in O. Posta ivi l'origine di un sistema di assi cartesiani (x, y) l'equazione di C è del tipo

$$\varphi_r(x, y) + \varphi_{r+1}(x, y) + \cdots + \varphi_n(x, y) = 0$$

essende le φ_i *forme* dei gradi indicati dall'indice. L'equazione $\varphi_r(x, y) = 0$ fornisce le tangenti in O. Fra esse ve ne sia una d'ordine $s \leqq r$, e si assuma come tale la retta $y = 0$, sicchè $\varphi_r(x, y) = y^s \varphi_{r-s}(x, y)$.

E' ben noto l'uso del *diagramma di Newton* nello studio del ramo o dei rami della curva che escono da O con la tangente $y = 0$. Ad ogni termine $a_{pq}\, x^p\, y^q$ dell'equazione effettivamente presente $(a_{p\,q} \neq 0)$ si fa corrispondere in un diagramma cartesiano il punto (p, q); l'insieme di questi punti è il diagramma dell'equazione. Si dicono rette *separatrici* le rette contenenti due o più punti del diagramma e che lasciano tutti gli altri punti (che non contengono) del diagramma da parte opposta al punto $(0, 0)$. Se si considera su ciascuna separatrice il tratto compreso fra i due punti estremi del diagramma che essa contiene, l'insieme di questi tratti è una poligonale aperta, convessa rispetto a $(0, 0)$, con gli estremi sugli assi $q = 0$, $p = 0$: questa poligonale e i semiassi positivi p, q, a partire dai punti d'incontro con essa determinano una regione del piano (p, q) in cui cadono tutt'i punti del diagramma.

Una separatrice determina col suo coefficiente angolare il rapporto fra l'ordine e la classe del ramo o dei rami di C cui essa dà luogo. Precisamente, se ad essa appartengono i due punti (p_0, q_0) e (p_1, q_1), e sia per es. $p_0 < p_1$ e $p_0 > q_1$, e se

$$x = t^\nu,\quad y = a t^\mu + b\, t^{\mu+1} + \cdots \; (a \neq 0,\; \mu > \nu > 0)$$

è un ramo relativo a quella separatrice, deve aversi

$$\frac{p_1 - p_0}{q_0 - q_1} = \frac{\mu}{\nu}$$

e per ogni altro punto (p, q) del diagramma è

$$\nu p + \mu q \geqq \nu p_0 + \mu q_0 = \nu p_1 + \mu q_1$$

(il segno $=$ valendo per i punti situati su quella separatrice). I numeri ν e $\nu' = \mu - \nu$ sono l'ordine e la classe del ramo.

Può accadere che il tratto di separatrice costituente un lato della poligonale sopra indicata contenga due soli punti a coordinate intere p, q, precisamente quelli che lo determinano. Può anche accadere che detto tratto contenga più di due punti a coordinate intere: due di essi appartengono certamente al diagramma dell'equazione, ma gli altri possono essere o non essere punti del diagramma. Quando un punto a coordinate intere situato sul tratto di separatrice in esame *non* appartiene al diagramma diremo che si ha ivi una *lacuna*. Ora *il numero e la posizione delle lacune sulla separatrice* (o, se si vuole, il numero e la posizione su di essa dei punti del diagramma) *sono caratteri proiettivi del ramo, quindi della singolarità.*

Si consideri infatti una trasformazione proiettiva non degenere che lasci inalterato il punto O e la tangente $y = 0$, di equazioni (in coordinate omogenee x, y, t)

$$\begin{aligned} x &= \alpha\, x' + \beta\, y' \\ y &= y' \qquad\qquad\qquad\qquad \alpha\,\varepsilon \neq 0 \\ t &= \nu\, x' + \delta\, y' + \varepsilon\, t'. \end{aligned}$$

Il termine $a_{pq}\, x^p y^q t^{n-(p+q)}$ dà origine ad un termine $\alpha^p\, \varepsilon^{n-(p+q)}\, a_{pq} \times$ $\times\, x'^p y'^q t'^{n-(p+q)}$ e ad altri termini $a'_{p'q}\, x'^{p'}\, y'^{q'}\, t'^{n-(p'+q')}$ per i quali è $p' + q' \geqq p + q$, $q' > q$. Anzi se il punto (p, q) relativo alla curva data C è su una separatrice anche il punto (p', q') relativo alla curva trasformata C' è sulla separatrice ad essa relativa e per ogni altro punto (p', q') che s'introduce con la trasformazione è

$$\nu p' + \mu q' = \nu p + \mu q + \mu (q' - q) + \nu (p' - p) > \nu p + \mu q + \nu (p' + q' - p - q)$$

cioè

$$\nu p' + \mu q' > \nu p + \mu q.$$

Ne segue che la figura dei punti del diagramma posti sulla separatrice non cambia passando da C a C': e questo si voleva provare.

Rimane ora a dare il significato geometrico delle lacune in relazione alla curva C.

Sia $a_{p_0 q_0}\, x^{p_0} y^{q_0}$ il termine di grado (complessivo in x, y) più basso che concorre alla determinazione di un tratto di separatrice: sia cioè (p_0, q_0) il punto *più alto* (e più *a sinistra*) del tratto in esame, caratterizzato dai valori μ e ν primi fra loro. Procedendo su di esso *verso il basso* s'incontrano i punti a coordinate intere

$$(p_0, q_0),\ (p_0 + \mu,\ p_0 - \nu),\ (p_0 + 2\,\mu,\ q_0 - 2\,\nu),\ \ldots,\ (p_0 + h\mu,\ q_0 - h\nu);$$

l'ultimo punto, dovendo essere o sull'asse p o al di sopra di esso, deve corrispondere ad un $h \leqq \left[\frac{q_0}{\nu}\right]$ = massimo intero contenuto in $\frac{q_0}{\nu}$.

Per esaminare la *lacuna* di posto k, cioè l'ipotesi che il punto $(p_0 + k\mu, q_0 - k\nu)$, *non* appartenga al diagramma di Newton, consideriamo la polare ϱ-esima di O rispetto a C. Da un termine $a_{p,q} x^p y^q t^{n-(p+q)}$ di C si ottiene un termine della polare che differisce da $a_{p,q} x^p y^q t^{n-\varrho-(p+q)}$ soltanto per un fattore numerico; e questo comparisce effettivamente solo se $n - \varrho - (p+q) \geqq 0$, cioè se $\varrho \leqq n - (p+q)$. Perciò non hanno influenza sulla determinazione di detta polare i termini di grado $p + q > n - \varrho$. Se si pone $\mu - \nu = \nu'$ e $\varrho_k = n - (p_0 + q_0) - k\nu'$ non hanno influenza sulla polare ϱ_k-esima i termini di grado $> r - \varrho_k = p_0 + q_0 + k\nu'$ che si potranno quindi a quest'effetto trascurare.

Nei termini da considerare di grado $\leqq p_0 + q_0 + k\nu'$ l'esponente q della y è sempre $> q_0 - k\nu$ ad eccezione del termine col coefficiente $a_{p_0 + k\mu, q_0 - k\nu}$. Perciò se questo è $\neq 0$ l'equazione della polare è divisibile per $y^{q_0 - k\nu}$ (e non per una potenza più alta): nel caso opposto è divisibile per $y^{p_0 - k\nu + 1}$ (almeno). Sicchè

Condizione necessaria e sufficiente affinchè su un tratto di separatrice caratterizzato dal suo punto più alto (p_0, q_0) e dal suo coefficiente direttivo, cioè dai numeri ν e $\mu = \nu + \nu'$ primi fra loro, vi sia una lacuna di posto k è che la polare d'ordine $n - \varrho_k = p_0 + q_0 + k\nu'$ del punto singolare in esame abbia la tangente ai rami determinati da quella separatrice come componente multipla secondo $q_0 - k\nu + 1$ (almeno).

(Eingegangen am 31. Januar 1942.)