Werk

Titel: Mathematische Zeitschrift

Ort: Berlin

Jahr: 1942

Kollektion: Mathematica

Werk Id: PPN266833020_0048

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN266833020_0048|LOG_0005

Gepaarte Mengen, Verbände, Somenringe.

Herrn Konrad Knopp
zum 60. Geburtstag am 22. Juli 1942 gewidmet.

Von

C. Carathéodory in München.

---

1. Einleitung. Eine der am häufigsten auftretenden Kennzeichnungen einer Menge $\mathfrak{m}$ von Elementen $a, b, \ldots, x, \ldots$ erhält man, indem man aus der Menge aller Paare (x, y) ihrer Elemente eine willkürliche, aber wohldefinierte Teilmenge solcher Paare aussondert. Eine derartige Menge $\mathfrak{m}$, bei welcher gewisse Paare von Elementen ausgezeichnet sind, wird im folgenden eine „gepaarte Menge" genannt, und die Elemente jedes einzelnen der ausgezeichneten Paare werden zueinander konjugiert genannt.

Nun kann man jeder beliebigen Teilmenge $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{m}$ diejenige Teilmenge $\mathfrak{a}'$ von $\mathfrak{m}$ zuordnen, die aus allen Elementen x besteht, welche gleichzeitig zu allen Elementen von $\mathfrak{a}$ konjugiert sind. Setzt man dann $\mathfrak{a}' = \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}'' = \mathfrak{b}'$, so zeigt sich, daß immer $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}''$ ist und daß diejenigen Teilmengen von $\mathfrak{m}$, für welche $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}''$ ist, eine besondere Rolle spielen; sie sollen die „normalen" Teilmengen von $\mathfrak{m}$ genannt werden. Die wichtigste Eigenschaft der normalen Teilmengen besteht darin, daß sie immer einen Verband $\mathfrak{M}$ bilden, der auf sich selbst involutorisch abgebildet ist.

2. Ist insbesondere eine Menge teilweise geordnet, so erhält man eine natürliche Paarung derselben, indem man die Elemente, welche bei der teilweisen Ordnung „relativ prim" zueinander sind, zu Paaren zusammenfaßt. Dagegen kann man nicht immer einer gegebenen gepaarten Menge $\mathfrak{m}$ eine solche teilweise Ordnung aufprägen, daß die dadurch entstehende natürliche Paarung gerade die gegebene wird. Das ist vielmehr dann und nur dann möglich, wenn der erwähnte Verband $\mathfrak{M}$ ein Somenring ist, dessen komplementäre Elemente die involutorische Selbstabbildung von $\mathfrak{M}$ erzeugen. Diese Erkenntnis bildet eins der Hauptresultate der vorliegenden Arbeit.

3. Wir betrachten jetzt eine Paarung von $\mathfrak{m}$, für welche $\mathfrak{M}$ ein Somenring ist. Es gibt dann mindestens eine, in der Regel aber unendlich viele teilweise Ordnungen von $\mathfrak{m}$, deren relativ prime Elemente die gegebene Paarung erzeugen. Unter diesen gibt es eine ausgezeichnete, welche aus jeder der übrigen durch Adjunktion von gewissen „Bindungen" $a \subseteq b$ entsteht und aus der gegebenen Paarung sehr leicht konstruiert werden kann.

4. Im zweiten Teil der Arbeit fassen wir die Elemente $a, b, \ldots$ einer Menge $\mathfrak{m}$ zu Klassen $\bar{a}, \bar{b}, \ldots$ zusammen, welche ihrerseits als Elemente einer Menge $\bar{\mathfrak{m}}$ aufgefaßt werden. Ist die Menge $\mathfrak{m}$ gepaart, so ist es unter Umständen möglich, die Klassen $\bar{a}, \bar{b}, \ldots$ so zu wählen, daß die normalen Teilmengen von $\mathfrak{m}$ sämtlich Klassenmengen sind. Dann ist $\bar{\mathfrak{m}}$ ebenso wie $\mathfrak{m}$ gepaart, und der Verband $\mathfrak{M}$ der normalen Teilmengen von $\mathfrak{m}$ ist dem Verbande $\bar{\mathfrak{M}}$ der normalen Teilmengen von $\bar{\mathfrak{m}}$ isomorph.

In vielen Fällen kann man den Prozeß der Bildung von Klassen, welche die erwähnte Eigenschaft besitzen, iterieren, indem man von der neuen gepaarten Menge $\bar{\mathfrak{m}}$ ausgeht. Es gibt aber immer schon beim ersten Schritt eine eindeutig bestimmte Wahl der Klassen $\bar{a}, \bar{b}, \ldots$, so daß der obige Prozeß nicht mehr wiederholt werden kann. Ist dies der Fall, so soll die Paarung von $\bar{\mathfrak{m}}$ eine reduzierte Paarung genannt werden. Man erhält immer dieselbe reduzierte Paarung derselben Menge $\bar{\mathfrak{m}}$, auch wenn man den Prozeß, der zu $\bar{\mathfrak{m}}$ führt, in mehreren Schritten vollzieht.

Wir nehmen nun an, daß die beiden isomorphen Verbände $\mathfrak{M}$ und $\bar{\mathfrak{M}}$ Somenringe sind. Dann kann man die Paarung von $\mathfrak{m}$, durch welche $\mathfrak{M}$ erzeugt wird, mit Hilfe der relativ primen Elemente von geeigneten teilweisen Ordnungen von $\mathfrak{m}$ herstellen, und dasselbe gilt auch von $\bar{\mathfrak{m}}$. Dann wird mit Hilfe der Homomorphie, welche $\mathfrak{m}$ in $\bar{\mathfrak{m}}$ transformiert, auch die Menge der teilweisen Ordnungen von $\mathfrak{m}$, die soeben erwähnt wurden, auf die Menge der analogen teilweisen Ordnungen von $\bar{\mathfrak{m}}$ ebenfalls homomorph abgebildet, und durch diese Tatsache, verbunden mit dem im § 3 angegebenen Resultat, entstehen Zusammenhänge, welche der Leser am Ende dieser Arbeit zusammengestellt findet.

5. Gepaarte Mengen. In einer gepaarten Menge $\mathfrak{m}$ werden wir die Tatsache, daß die Elemente a und b konjugiert sind, durch das Symbol

$$a \circ b$$

ausdrücken, für welches selbstverständlich gilt:

$$\text{(5. 1)} \qquad \text{Aus } a \circ b \text{ folgt } b \circ a.$$

Wir werden zulassen, daß gewisse Elemente von $\mathfrak{m}$ zu sich selbst konjugiert sind; insbesondere soll mindestens ein Element o zu *allen* Elementen von $\mathfrak{m}$ (also auch zu sich selbst) konjugiert sein. Ein solches Element o kann immer der Menge $\mathfrak{m}$ hinzugefügt werden, falls es nicht von vornherein vorhanden sein sollte.

Die Teilmengen von $\mathfrak{m}$ werden wir mit kleinen Frakturbuchstaben $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots, \mathfrak{x}, \ldots$ bezeichnen. Speziell soll die Gesamtheit der Elemente von $\mathfrak{m}$, welche einem gegebenen Element x konjugiert wird, durch das Symbol

$$\mathfrak{c}(x)$$

dargestellt werden, welches wir die *charakteristische Funktion* der Paarung nennen wollen. Die Symmetrieeigenschaft (5. 1) kann jetzt geschrieben werden:

(5. 2) $$\text{Aus } y \in \mathfrak{c}(x) \quad \text{folgt} \quad x \in \mathfrak{c}(y).$$

Ist dann $\mathfrak{a}$ eine beliebige Teilmenge von $\mathfrak{m}$, so führen wir die Bezeichnung ein

(5. 3) $$\mathfrak{c}(\mathfrak{a}) = \prod_{x \in \mathfrak{a}} \mathfrak{c}(x),$$

d. h. $\mathfrak{c}(\mathfrak{a})$ soll der Durchschnitt aller Mengen $\mathfrak{c}(x)$ sein, wenn x die Menge $\mathfrak{a}$ durchläuft. Jede der Mengen $\mathfrak{c}(\mathfrak{a})$ enthält mindestens ein Element, nämlich das Element o; außerdem gilt die Behauptung:

(5. 4) $$\text{Aus } \mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{a} \quad \text{folgt} \quad \mathfrak{c}(\mathfrak{a}) \subseteqq \mathfrak{c}(\mathfrak{b}).$$

6. Setzt man

(6. 1) $$\mathfrak{c}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{n},$$

so besteht $\mathfrak{n}$ aus allen Elementen, welche — ebenso wie o — zu allen Elementen von $\mathfrak{m}$ konjugiert sind. Nach (5. 3) hat man dann

(6. 2) $$\mathfrak{c}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{m};$$

außerdem folgt aus $\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{m}$ und (5. 4)

(6. 3) $$\mathfrak{n} \subseteqq \mathfrak{c}(\mathfrak{a}).$$

Wir setzen jetzt

(6. 4) $$\mathfrak{a}' = \mathfrak{c}(\mathfrak{a}), \quad \mathfrak{a}'' = \mathfrak{c}(\mathfrak{a}') = \mathfrak{c}^2(\mathfrak{a}).$$

Ist dann x ein Element von $\mathfrak{a}$ und y ein Element von $\mathfrak{a}'$, so hat man nach (5. 3)

$$y \in \mathfrak{c}(x).$$

Wegen (5. 2) muß also

$$x \in \mathfrak{c}(y)$$

für alle Elemente y von $\mathfrak{a}'$ und für alle Elemente x von $\mathfrak{a}$ gelten, und daraus folgt

(6. 5) $$\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{c}(\mathfrak{a}') = \mathfrak{a}''.$$

7. Verbände. Eine Menge $\mathfrak{M}_0$ von Elementen $A, B, \ldots, X, Y, \ldots$ heißt ein vollständiger Verband, wenn

1. $\mathfrak{M}_0$ teilweise geordnet ist, doch so, daß

(7. 1) $$\text{aus } A \subseteqq B \text{ und } B \subseteqq A \quad \text{folgt } A = B.$$

2. jeder beliebigen Teilmenge $\{A_j\}$ von Elementen A_j aus $\mathfrak{M}_0$ zwei Elemente

(7. 2) $$D = \Pi A_j, \quad V = \Sigma \dot{+} A_j$$

zugeordnet werden können, von denen D das größte unter allen Elementen $E \subseteqq A_j$ und V das kleinste unter allen Elementen $F \supseteqq A_j$ bedeutet[1]).

---

[1]) Vgl. Enzyklopädie der mathem. Wissenschaften Bd. I, Algebra (2. Aufl.), I. Teil, 13, Theorie der Verbände von H. Hermes und G. Köthe. S. 4.

Das Element D heißt der *Durchschnitt*, das Element V die Vereinigung aller Elemente A_j aus $\{A_j\}$. Insbesondere muß also jeder vollständige Verband notwendig ein größtes Element M und ein kleinstes Element O besitzen.

Selbstverständlich bilden die Teilmengen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, ... einer gegebenen Menge $\mathfrak{m}$ immer einen vollständigen Verband $\mathfrak{M}_0$. Im folgenden werden wir das Wort „vollständig" weglassen, weil nur von vollständigen Verbänden die Rede sein wird und keine Verwechselung zu befürchten ist.

8. Wir wollen nun Abbildungsfunktionen

$$X' = F(X) \tag{8.1}$$

betrachten, durch welche jedem Element X eines Verbandes $\mathfrak{M}_0$ ein Element X' desselben Verbandes zugeordnet wird. Diese Abbildungsfunktionen sollen ähnliche Eigenschaften besitzen, wie die charakteristische Funktion $\mathfrak{c}(\mathfrak{a})$ der Paarung einer Menge. Wir fordern also, daß mit der Bezeichnung

$$X'' = F(X') = F^2(X) \tag{8.2}$$

die Relationen

$$\text{aus } X \subseteqq Y \quad \text{folgt} \quad Y' \subseteqq X', \tag{8.3}$$

$$X \subseteqq X'' \tag{8.4}$$

immer erfüllt sein sollen, welche den Aussagen (5. 4) und (6. 5) nachgebildet sind.

Wendet man die Relation (8. 4) auf

$$X''' = F(X'') = F^2(X')$$

an, so erhält man

$$X' \subseteqq X'''.$$

Setzt man aber in (8. 3) für Y das Element X'' ein, so findet man

$$X''' \subseteqq X'$$

und es ist daher ganz allgemein

$$X' = X'''. \tag{8.5}$$

9. Die Elemente von $\mathfrak{M}_0$, für welche — ebenso, wie für X' — die Gleichung

$$X = F^2(X) = X'' \tag{9.1}$$

besteht, sollen die *normalen Elemente* der Abbildung (8. 1) genannt werden. Ist X ein normales Element, so gelten gleichzeitig die Beziehungen

$$X' = F(X) \qquad X = F(X'). \tag{9.2}$$

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{M}$ die Gesamtheit der Elemente $X' = F(X)$, welche Bilder von Elementen aus $\mathfrak{M}_0$ sind. Die Gleichung (8. 5) besagt dann, daß jedes Element von $\mathfrak{M}$ normal ist, während aus der zweiten Gleichung (9. 2) folgt, daß jedes normale Element in $\mathfrak{M}$ enthalten ist.

Die Menge der normalen Elemente ist mit der Bildmenge $\mathfrak{M}$ identisch.

Aus (9. 2) folgt noch, daß die Menge $\mathfrak{M}$ der normalen Elemente auf sich selbst durch eine involutorische Transformation abgebildet wird.

10. Aus den Beziehungen

$$M \subseteqq M'' \subseteqq M$$

folgt, daß das „Einselement“ M des Verbandes $\mathfrak{M}_0$ ein normales Element sein muß. Dagegen braucht das Nullelement O von $\mathfrak{M}_0$ nicht normal zu sein. Setzt man aber

$$N = F(M), \quad M = F(N), \tag{10. 1}$$

so folgt aus $O \subseteqq N$ nach (8. 3)

$$M = F(N) \subseteqq F(O) \subseteqq M,$$

so daß man auch schreiben muß

$$F(O) = M, \quad F^2(O) = N. \tag{10. 2}$$

Ist X ein beliebiges normales Element, so folgt aus $X' \subseteqq M$ und aus $X'' = X$

$$N = F(M) \subseteqq F(X') = X.$$

Hieraus schließt man, daß N das kleinste und M das größte normale Element sind.

11. Es seien X und Y zwei beliebige Elemente von $\mathfrak{M}_0$, für welche man hat

$$X \subseteqq Y;$$

dann folgen nacheinander aus (8. 3)

$$Y' \subseteqq X', \quad X'' \subseteqq Y''$$

und es gilt daher die Aussage:

$$\text{Aus } X \subseteqq Y \quad \text{folgt} \quad X'' \subseteqq Y''. \tag{11. 1}$$

Ist nun Y ein normales Element, so hat man $Y'' = Y$ und $X'' \subseteqq Y$: *Das Element X'' ist also das kleinste normale Element, welches X umfaßt.*

12. Wir setzen für eine beliebige Menge $\{X_j\}$ von normalen Elementen

$$D = \Pi X_j, \quad V = \Sigma \dot{+} X_j. \tag{12. 1}$$

Aus $D \subseteqq X_j$ folgt $D'' \subseteqq X_j'' = X_j$ und es ist also $D'' \subseteqq D$. Andererseits muß nach (8. 4) auch $D \subseteqq D''$ sein, so daß der Satz gilt

Satz 1. *Der Durchschnitt von beliebig vielen normalen Elementen ist normal.*

Dagegen braucht die Vereinigung schon von zwei normalen Elementen nicht normal zu sein. Es sei W ein normales Element, welches alle X_j umfaßt. Aus $X_j \subseteqq W$ folgt $V \subseteqq W$ und daher auch $V'' \subseteqq W'' = W$.

Das Element V'' ist also das kleinste normale Element, welches alle X_j umfaßt. Da offenbar D das größte normale Element ist, welches alle X_j teilt, gilt der

Satz 2. *Die Menge $\mathfrak{M}$ der normalen Elemente bildet einen Verband mit dem Einselement M und dem Nullelement N.*

13. Die Vereinigung der Elemente X_j einer Menge $\{X_j\}$ von normalen Elementen ist eine Operation, welche verschiedene Bedeutungen hat, je nachdem man die X_j als Elemente des Verbandes $\mathfrak{M}_0$ oder als Elemente des Verbandes $\mathfrak{M}$ auffaßt. Deshalb ist es zweckmäßig, für die Elemente von $\mathfrak{M}$ neue Bezeichnungen zu wählen. Wir schreiben

$$X_j = \xi_j \tag{13. 1}$$

und erhalten nach den Resultaten des vorigen Paragraphen

$$\xi'_j = X'_j, \quad \Pi\, \xi_j = \Pi X_j, \quad \Sigma \dot{+} \xi_j = (\Sigma \dot{+} X_j)'', \tag{13. 2}$$

$$(\Sigma \dot{+} \xi_j)' = (\Sigma \dot{+} X_j)'. \tag{13. 3}$$

Wir führen nun die Bezeichnungen ein:

$$\delta = \Pi \xi_j, \quad \varepsilon = (\Sigma \dot{+} \xi'_j)'. \tag{13. 4}$$

Aus $\xi'_j \subseteqq \Sigma \dot{+} \xi'_j$ folgt dann, weil die ξ_j normal sind, $\varepsilon \subseteqq \xi_j$ und somit auch

$$\varepsilon \subseteqq \delta.$$

Aus $\delta \subseteqq \xi_j$ erhält man $\xi'_j \subseteqq \delta'$ und $\Sigma \dot{+} \xi'_j \subseteqq \delta'$ und daraus $\delta \subseteqq \varepsilon$. Es gelten daher die Gleichungen

$$\delta = \varepsilon, \quad \delta' = \varepsilon', \tag{13. 5}$$

welche unter sich und mit jeder der beiden folgenden

$$(\Pi \xi_j)' = \Sigma \dot{+} \xi'_j, \tag{13. 6}$$

$$(\Sigma \dot{+} \xi_j)' = \Pi \xi'_j \tag{13. 7}$$

äquivalent sind.

Da der Verband $\mathfrak{M}$ das Einselement $M = \mu$ und das Nullelement $N = \mu' = \nu$ besitzt, gelten ferner die Formeln

$$\begin{cases} \mu \dot{+} \xi = \mu, & \mu \xi = \xi, \\ \nu \dot{+} \xi = \xi, & \nu \xi = \nu, \end{cases} \tag{13. 8}$$

und man hat insbesondere

$$\mu \dot{+} \nu = \mu, \quad \mu\, \nu = \nu. \tag{13. 9}$$

14. Die Teilmengen einer Menge bilden selbstverständlich einen Verband. Unsere Resultate können daher auf die Teilmengen $\mathfrak{x}$ einer gepaarten Menge $\mathfrak{m}$ angewandt werden, wenn man an Stelle der Abbildungsfunktion $F(X)$ die charakteristische Funktion $\mathfrak{c}(\mathfrak{x})$ der Paarung wählt. Es wäre aber falsch zu glauben, daß die Abbildungsfunktionen $F(X)$, welche den Bedingungen (8.3) und (8.4) genügen, wesentlich allgemeiner seien als die charakteristischen Funktionen einer Paarung.

Wenn man nämlich (8. 3) und (8. 4) benutzt, so folgt aus $Y \subseteqq X'$ die Relation $X \subseteqq X'' \subseteqq Y'$. Wir können also die Menge $\mathfrak{M}_0$ dadurch paaren, daß wir $X \circ Y$ schreiben, falls $Y \subseteqq X'$ ist. Die charakteristische Funktion $\mathfrak{c}(X)$ dieser Paarung erhält man dann durch die Aussage

$$Y \in \mathfrak{c}(X), \quad \text{falls } Y \subseteqq X'. \tag{14. 1}$$

Ist jetzt $\mathfrak{a}$ irgendeine Menge $\{X_j\}$ von Elementen X_j, so muß man nach (5. 3) setzen

$$\mathfrak{c}(\mathfrak{a}) = \prod_{X_j \in \mathfrak{a}} \mathfrak{c}(X_j). \tag{14. 2}$$

Wir schreiben nun

$$V = \Sigma \dotplus X_j. \tag{14. 3}$$

Nach (14. 2) folgt dann aus $Y \in \mathfrak{c}(\mathfrak{a})$ die Relation $Y \in \mathfrak{c}(X_j)$ oder $Y \subseteqq X_j'$. Dann ist aber auch $X_j \subseteqq Y'$ und somit auch $V \subseteqq Y'$ oder $Y \subseteqq V'$. Aus $Y \in \mathfrak{c}(\mathfrak{a})$ folgt also $Y \in \mathfrak{c}(V)$. Umgekehrt sei $Y \in \mathfrak{c}(V)$ oder $Y \subseteqq V'$. Da aus $X_j \subseteqq V$ folgt $V' \subseteqq X_j'$, ist also auch $Y \subseteqq X_j'$ oder $Y \in \mathfrak{c}(X_j)$. Letzteres gilt für alle X_j und man hat schließlich $Y \in \mathfrak{c}(\mathfrak{a})$. Es gilt somit die Gleichung

$$\mathfrak{c}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{c}(V),$$

und wir finden insbesondere, daß alle normalen Teilmengen $\mathfrak{c}(\mathfrak{a})$ von $\mathfrak{M}_0$ in der Gestalt $\mathfrak{c}(X)$ geschrieben werden können; wegen (14. 1) sind die beiden Funktionen $\mathfrak{c}(X)$ und $F(X)$ aufs engste verwandt.

15. Somenringe. Ein Ring $\mathfrak{R}$ von Elementen $A, B, \ldots$ mit der Summenoperation $A + B$, der Produktoperation AB und dem Nullelement O heißt eine *Boolesche Algebra*, wenn die Gleichung

$$XX = X, \tag{15. 1}$$

welche die andere

$$X + X = O \tag{15. 2}$$

nach sich zieht, allgemein gilt. Eine Boolesche Algebra ist notwendig immer ein kommutativer Ring.

Durch die Gleichung

$$A \dotplus B = A + B + AB \tag{15. 3}$$

wird die „Vereinigung" $A \dotplus B$ der Elemente A und B definiert; diese Operation ist kommutativ, assoziativ und distributiv.

Der Boolesche Ring $\mathfrak{R}$ wird dadurch teilweise geordnet, daß man

$$A \subseteqq B \tag{15. 4}$$

schreibt, wenn mindestens eine der beiden Gleichungen

$$AB = A, \quad A \dotplus B = B \tag{15.5}$$

(und dann notwendig auch die andere) erfüllt ist.

Eine BOOLEsche Algebra, bei welcher die Operation

$$\Sigma \dotplus A_j$$

und dann auch die Operation

$$\Pi A_j$$

auch für unendlich viele Elemente erklärt ist, heißt ein Somenring.

16. Man beweist, daß ein Verband $\mathfrak{M}$ mit den Elementen α, β, ..., von denen μ das größte und ν das kleinste ist, dann und nur dann ein Somenring ist, wenn erstens zwischen den Operationen $\alpha \dotplus \beta$ und $\alpha\beta$ das distributive Gesetz

$$\gamma(\alpha \dotplus \beta) = \gamma\alpha \dotplus \gamma\beta \tag{16.1}$$

gilt, und wenn zweitens jedem Element α von $\mathfrak{M}$ mindestens ein komplementäres Element α' zugeordnet werden kann, für welches die Gleichungen

$$\alpha \dotplus \alpha' = \mu, \quad \alpha\alpha' = \nu \tag{16.2}$$

bestehen.

Wir aber werden ein ganz anders geartetes Kriterium für dieselbe Tatsache zu benutzen haben. Unter der Voraussetzung, daß ein Verband $\mathfrak{M}$ ein Somenring ist, wird das zu α komplementäre Element α' nämlich durch die Gleichung

$$\alpha' = \mu \underset{\cdot}{+} \alpha \tag{16.3}$$

definiert. Aus der Gleichung

$$\alpha'' = \mu \underset{\cdot}{+} \alpha' = \mu \underset{\cdot}{+} \mu \underset{\cdot}{+} \alpha = \alpha$$

folgt, daß der Übergang von α zu seinem Komplement α' eine involutorische Selbstabbildung von $\mathfrak{M}$ darstellt.

Ferner entnimmt man aus der Gleichung

$$\alpha\beta' = \alpha(\mu \underset{\cdot}{+} \beta) = \alpha \underset{\cdot}{+} \alpha\beta,$$

daß jede der Gleichungen $\alpha\beta = \nu$, $\alpha\beta' = \alpha$ aus der anderen folgt. Da aus $\alpha\beta = \nu$ auch $\beta\alpha' = \beta$ folgt, sehen wir schließlich, daß sogar aus jeder der Gleichungen $\alpha\beta = \nu$, $\alpha\beta' = \alpha$, $\beta\alpha' = \beta$ die beiden anderen folgen.

17. Die zuletzt abgeleiteten Eigenschaften eines Somenringes, der zugleich ein Verband ist, sollen nun umgekehrt werden, indem wir beweisen:

Satz 3. *Es gibt höchstens eine involutorische Selbstabbildung*

$$\xi' = F(\xi), \quad \xi = F(\xi') \tag{17.1}$$

eines Verbandes $\mathfrak{M}$ mit dem Nullelement ν, für welche die Aussage besteht:

(17.2) Aus jeder der Gleichungen $\xi\eta = \nu$, $\xi\eta' = \xi$, $\eta\xi' = \eta$ folgen jeweils die beiden anderen.

Und zwar ist eine derartige Abbildung dann und nur dann möglich, wenn der Verband $\mathfrak{M}$ ein Somenring ist. Die Abbildung (17. 1) *stellt dann den Übergang von einem Soma zu seinem Komplement dar.*

Der vorige Paragraph enthält schon den Beweis der einen Hälfte unseres Satzes. Wir brauchen also nur noch zu zeigen, daß ein Verband $\mathfrak{M}$, für welchen (17. 1) und (17. 2) bestehen, ein Somenring ist.

Wir setzen zuerst $\eta = \xi'$; dann ist

$$\eta \xi' = \xi' \xi' = \xi' = \eta$$

und folglich hat man wegen (17. 2) ganz allgemein

$$\xi \xi' = v. \tag{17. 3}$$

Wird nun durch die Gleichungen

$$\bar{\xi} = G(\xi), \quad \xi = G(\bar{\xi}) \tag{17. 4}$$

eine zweite involutorische Selbstabbildung von $\mathfrak{M}$ bezeichnet, für welche aus jeder der Gleichungen

$$\xi \eta = v, \quad \xi \bar{\eta} = \xi, \quad \eta \bar{\xi} = \eta \tag{17. 5}$$

die beiden anderen folgen, so hat man ebenfalls

$$\xi \bar{\xi} = v. \tag{17. 6}$$

Nun folgt erstens aus (17. 6) und (17. 2) die Relation $\xi' \bar{\xi} = \bar{\xi}$ und zweitens aus (17. 3) und (17. 5) die Relation $\xi' \bar{\xi} = \xi'$. Es muß also

$$\xi' = \bar{\xi}$$

sein, womit die Eindeutigkeit der Selbstabbildung (17. 1) bewiesen ist.

18. Ersetzt man in (17. 2) das Element η durch ζ', so kann diese Aussage durch folgende ihr äquivalente ersetzt werden:

(18. 1) Aus jeder der Relationen $\xi \subseteqq \zeta$, $\zeta' \subseteqq \xi'$, $\xi \zeta' = v$ folgen die beiden anderen.

Insbesondere sehen wir hieraus, daß die Selbstabbildung (17. 1) den Bedingungen genügt, durch welche wir die normalen Elemente eines Verbandes definiert haben, und daraus folgt, daß auch hier die Gleichungen (13. 6) bis (13. 8) gelten müssen.

Aus $\xi = \alpha\beta$ folgt also $\xi' = (\alpha' \dot{+} \beta')$ und nach (17. 3)

$$\alpha\beta(\alpha' \dot{+} \beta') = v. \tag{18. 2}$$

Wegen (18. 1) ist also

$$\alpha(\alpha' \dot{+} \beta') \subseteqq \beta'. \tag{18. 3}$$

Ebenso gilt für ein drittes Element γ die Relation

$$\alpha(\alpha' \dot{+} \gamma') \subseteqq \gamma'. \tag{18. 4}$$

Durch Vergleichung von (18. 3) mit (18. 4) erhält man jetzt

$$\alpha\,(\alpha' \dot{+} \beta')\,(\alpha' \dot{+} \gamma') \subseteqq \beta'\gamma',$$

und durch eine neue Anwendung von (18. 1)

$$\alpha\,(\beta \dot{+} \gamma)\,(\alpha' \dot{+} \beta')\,(\alpha' \dot{+} \gamma') = \nu. \tag{18. 5}$$

Nun ist aber

$$(\alpha\beta \dot{+} \alpha\gamma)' = (\alpha' \dot{+} \beta')\,(\alpha' \dot{+} \gamma'),$$

so daß man aus (18. 5) erhält.

$$\alpha\,(\beta \dot{+} \gamma) \subseteqq \alpha\beta \dot{+} \alpha\gamma. \tag{18. 6}$$

Andererseits gelten die Beziehungen

$$\alpha\beta \subseteqq \alpha\,(\beta \dot{+} \gamma), \quad \alpha\gamma \subseteqq \alpha\,(\beta \dot{+} \gamma),$$

aus denen man schließt

$$\alpha\beta \dot{+} \alpha\gamma \subseteqq \alpha\,(\beta \dot{+} \gamma), \tag{18. 7}$$

und die Vergleichung von (18. 6) und (18. 7) zeigt, daß das distributive Gesetz

$$\alpha\,(\beta \dot{+} \gamma) = \alpha\beta \dot{+} \alpha\gamma \tag{18. 8}$$

für unseren Verband $\mathfrak{M}$ allgemein besteht.

19. Um jetzt zu zeigen, daß $\mathfrak{M}$ ein Somenring ist, definieren wir eine neue Operation $\alpha \underset{\cdot}{+} \beta$ durch die Gleichung

$$\alpha \underset{\cdot}{+} \beta = \alpha\beta' \dot{+} \beta\alpha' \tag{19. 1}$$

und bemerken, daß die Beziehungen gelten

$$\alpha \underset{\cdot}{+} \beta = \beta \underset{\cdot}{+} \alpha, \tag{19. 2}$$

$$\alpha \underset{\cdot}{+} \nu = \alpha\mu \dot{+} \nu\alpha' = \alpha, \tag{19. 3}$$

$$\alpha \underset{\cdot}{+} \mu = \alpha\nu \dot{+} \mu\alpha' = \alpha'. \tag{19. 4}$$

Mit Hilfe der Formeln des § 13 erhält man aus (19. 1)

$$(\alpha \underset{\cdot}{+} \beta)' = (\alpha' \dot{+} \beta)\,(\beta' \dot{+} \alpha)$$

und hieraus mit Benutzung von (18. 8) und (17. 3)

$$(\alpha \underset{\cdot}{+} \beta)' = \alpha\beta \dot{+} \alpha'\beta'. \tag{19. 5}$$

Man hat also

$$\begin{aligned} \alpha \underset{\cdot}{+} (\beta \underset{\cdot}{+} \gamma) &= \alpha\,(\beta \underset{\cdot}{+} \gamma)' \dot{+} \alpha'\,(\beta \underset{\cdot}{+} \gamma) \\ &= \alpha\,(\beta\gamma \dot{+} \beta'\gamma') \dot{+} \alpha'\,(\beta\gamma' \dot{+} \beta'\gamma) \\ &= \alpha\beta\gamma \dot{+} \alpha\beta'\gamma' \dot{+} \alpha'\beta\gamma' \dot{+} \alpha'\beta'\gamma, \end{aligned}$$

und da der letzte Ausdruck auf der rechten Seite symmetrisch in α, β und γ ist, schließt man daraus

$$\alpha \underset{\cdot}{+} (\beta \underset{\cdot}{+} \gamma) = (\alpha \underset{\cdot}{+} \beta) \underset{\cdot}{+} \gamma. \tag{19. 6}$$

Ganz ähnlich beweist man das distributive Gesetz für $\alpha \underset{\cdot}{+} \beta$ mit Hilfe der Rechnung

$$
\begin{aligned}
\alpha\gamma \underset{\cdot}{+} \beta\gamma &= \alpha\gamma\,(\beta\gamma)' \dotplus \beta\gamma\,(\alpha\gamma)' \\
&= \alpha\gamma\,(\beta' \dotplus \gamma') \dotplus \beta\gamma\,(\alpha' \dotplus \gamma') \\
&= \gamma\,(\alpha\beta' \dotplus \beta\alpha') \\
&= \gamma\,(\alpha \underset{\cdot}{+} \beta).
\end{aligned} \tag{19.7}
$$

Endlich bestehen auch die Gleichungen

$$\alpha \underset{\cdot}{+} \alpha = \alpha\alpha' \dotplus \alpha'\alpha = \nu, \tag{19.8}$$

$$\alpha \underset{\cdot}{+} \beta \underset{\cdot}{+} \alpha\beta = \alpha \dotplus \beta, \tag{19.9}$$

mit deren Hilfe der Beweis des Satzes 3 zu Ende geführt wird.

Als Korollar dieses Satzes erhält man sofort auch den

Satz 4. *Der im § 12 definierte involutorische Verband $\mathfrak{M}$ der normalen Elemente von $\mathfrak{M}_0$ ist dann und nur dann ein Somenring, bei welchem die konjugierten Elemente des Verbandes komplementäre Somen sind, wenn die Aussage besteht:*

(19. 10) Aus $\xi\eta = \nu$ folgt $\xi \subseteqq \eta'$ und umgekehrt.

20. Teilweise geordnete Mengen. Ehe wir eine merkwürdige Anwendung der bisherigen Resultate besprechen, müssen wir die teilweise geordneten Mengen näher betrachten.

Eine gepaarte Menge heißt teilweise geordnet, wenn erstens zwischen je zwei konjugierten Elementen a, b von $\mathfrak{m}$ mindestens eine der beiden Reihenfolgen dieser Elemente ausgezeichnet ist, oder was in anderer Bezeichnung auf dasselbe hinauskommt, wenn mindestens eine der „Bindungen"

$$a \subseteqq b, \quad b \subseteqq a \tag{20.1}$$

vorhanden ist, und wenn zweitens noch folgende Aussagen erfüllt sind:

(20. 2) Für alle Elemente x von $\mathfrak{m}$ ist $x \subseteqq x$,

(20. 3) aus $x \subseteqq y$ und $y \subseteqq z$ folgt $x \subseteqq z$.

Manche Autoren fügen dieser Definition noch eine der Forderung (7. 1) für Verbände analoge Forderung hinzu. Wir wollen aber hier ausdrücklich zulassen, daß die beiden Bindungen (20. 1) auch zwischen *verschiedenen* Elementen a, b gleichzeitig vorhanden sein dürfen und dann sagen, daß zwischen a und b eine *Doppelbindung* existiert.

Beliebige Mengen von Bindungen werden im folgenden durch große, fette lateinische Buchstaben $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, ... bezeichnet, so daß wir jede gegebene teilweise Ordnung der Menge $\mathfrak{m}$ auch durch das Symbol $\mathfrak{m}(\mathbf{A})$ beschreiben werden.

21. Wir bezeichnen mit A die (transitive) Menge von Bindungen, welche eine teilweise Ordnung $\mathfrak{m}(\mathsf{A})$ bestimmen, und mit B irgendeine weitere Menge von Bindungen. Gibt es eine kleinste transitive Menge von Bindungen $\mathsf{C} \supseteqq \mathsf{A} \dot{+} \mathsf{B}$, so wollen wir sagen, daß die teilweise Ordnung $\mathfrak{m}(\mathsf{C})$ aus $\mathfrak{m}(\mathsf{A})$ durch *Adjunktion* der Bindungen B entstanden ist.

Es sei $\{\mathsf{B}_\iota\}$ eine (nicht notwendig abzählbare) Menge von Bindungsmengen B_i, welche man einzeln zu A adjungieren kann. Ist dann immer mit irgend zwei Mengen B_j und B_k eine dritte Menge B_m in $\{\mathsf{B}_i\}$ vorhanden, welche alle Bindungen von B_j und alle Bindungen von B_k enthält, so kann man auch die Vereinigung $\mathsf{B} = \Sigma \dot{+} \mathsf{B}_i$ zu A adjungieren. Bezeichnet man nämlich mit C_i das Resultat der Adjunktion von B_i zu A und setzt $\mathsf{C} = \Sigma \dot{+} \mathsf{C}_i$, so ist C die kleinste transitive Menge von Bindungen, welche alle Bindungen von A und alle Bindungen von B enthält.

Andererseits kann man immer jede einzelne Bindung

$$a \subseteqq b \tag{21. 1}$$

zu A adjungieren. Die kleinste transitive Menge C von Bindungen, welche außer den Bindungen A auch die Bindung (21. 1) enthält, erhält man, indem man zu A noch alle Bindungen

$$x \subseteqq y$$

hinzufügt, für welche die Bindungen $x \subseteqq a$ und $b \subseteqq y$ in A enthalten sind.

22. Man kann jetzt zeigen, daß man jede beliebige Menge B von Bindungen zu A adjungieren kann. Es sei nämlich B wohlgeordnet. Jedem Element ξ von B ordnen wir diejenige Teilmenge B_ξ von B zu, welche aus allen Elementen von B besteht, die bei der Wohlordnung dem Elemente ξ vorangehen. Wir zeigen erstens, daß man jede der Teilmengen B_ξ zu A adjungieren kann. Ist dies nämlich nicht der Fall, so gibt es eine erste Teilmenge B_{ξ_0}, welche man nicht zu A adjungieren kann. Hierbei kann ξ_0 nicht das erste Element von B sein, und es gibt Elemente η von B, welche dem Elemente ξ_0 vorangehen. Jedes B_η kann man nach Voraussetzung zu A adjungieren und nach dem letzten Paragraphen kann man auch die Vereinigung aller B_η zu A adjungieren. Nun ist aber diese Vereinigung (höchstens mit Ausnahme des letzten Elementes von B_{ξ_0}, falls es ein solches gibt) mit B_{ξ_0} identisch. Wir schließen daraus, daß wir entgegen unserer Voraussetzung auch B_{ξ_0} zu A adjungieren können, und dies sowohl, wenn B_{ξ_0} kein letztes Element besitzt, als auch in dem Fall, daß ein letztes Element von B_{ξ_0} vorhanden ist.

Benutzt man jetzt, daß alle B_ξ zu A adjungiert werden können, so erhält man durch dieselbe Schlußweise das Resultat, daß auch B selbst zu A adjungiert werden kann.

23. Die Paarungen von relativ primen Elementen teilweise geordneter Mengen. Wir werden im folgenden nur solche teilweise geordneten Mengen $\mathfrak{m}$ (A) betrachten, welche mindestens ein kleinstes Element o enthalten. Dann müssen für alle Elemente x aus $\mathfrak{m}$ die Bindungen $o \subseteqq x$ in A enthalten sein. Wir bezeichnen ferner mit $\mathfrak{n}$ die Gesamtheit der Elemente y, für welche $y \subseteqq o$ in A enthalten ist.

Sind jetzt a und b beliebige Elemente von $\mathfrak{m}$, so ist jedes Element y von $\mathfrak{n}$ ein gemeinsamer Teil von a und b. Sind umgekehrt alle gemeinsamen Teile von a und b in $\mathfrak{n}$ enthalten, so sollen a und b *relativ prim zueinander* genannt werden.

Durch die Bestimmung ihrer relativ primen Elemente wird nun die Menge $\mathfrak{m}$ *gepaart*, wobei insbesondere die Elemente aus $\mathfrak{n}$ die einzigen sind, welche zu allen Elementen aus $\mathfrak{m}$ konjugiert sind. Bei dieser Paarung hat also die Menge $\mathfrak{n}$ dieselbe Bedeutung wie zuvor.

Für die relativ primen Elementenpaare einer teilweise geordneten Menge bestehen nun folgende Aussagen:

(23. 1) Aus $x \circ x$ folgt $x \in \mathfrak{n}$,

(23. 2) aus $y \subseteqq x$ und $x \circ a$ folgt $y \circ a$,

durch welche die charakteristische Funktion $\mathfrak{c}(\mathfrak{x})$ der Paarung spezialisiert wird. Da nämlich die Relation $x \in \mathfrak{c}(\mathfrak{a})$ bedeutet, daß alle Elemente z von $\mathfrak{a}$ zu x konjugiert sind, so folgt aus (23. 2):

(23. 3) Aus $y \subseteqq x$ und $x \in \mathfrak{c}(\mathfrak{a})$ folgt $y \in \mathfrak{c}(\mathfrak{a})$.

Die normalen Teilmengen $\mathfrak{c}(\mathfrak{a})$ von $\mathfrak{m}$ sind also *vollständig*[2]).

Es seien jetzt $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ normale Teilmengen von $\mathfrak{m}$, und x sei ein Element von $\mathfrak{a}$, welches nicht zu allen Elementen von $\mathfrak{b}$ relativ prim ist. Dann gibt es nach Voraussetzung mindestens ein Element x_1 von $\mathfrak{b}$, welches mit x einen gemeinsamen Teil y besitzt, der nicht in $\mathfrak{n}$ enthalten ist. Da nun $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ vollständige Teilmengen von $\mathfrak{m}$ sind, muß y sowohl in $\mathfrak{a}$, als auch in $\mathfrak{b}$, also auch in $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ enthalten sein.

Ist also $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{n}$, so muß jedes Element x von $\mathfrak{a}$ zu allen Elementen von $\mathfrak{b}$ relativ prim sein, d. h. man hat $\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{c}(\mathfrak{b})$. Ist umgekehrt $\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{c}(\mathfrak{b})$, so muß jedes Element x von $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ sowohl in $\mathfrak{b}$ als auch in $\mathfrak{c}(\mathfrak{b})$ enthalten sein, so daß man $x \circ x$ hat. Nach (23. 1) ist also $x \in \mathfrak{n}$ und folglich muß $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{n}$ sein.

Das Kriterium des Satzes 4 des § 19 ist also hier erfüllt, und der Verband $\mathfrak{M}$, welcher von den normalen Teilmengen von $\mathfrak{m}$ gebildet ist, muß deshalb ein Somenring sein.

---

[2]) Eine Teilmenge $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{m}$ heißt bekanntlich vollständig, wenn mit $x \in \mathfrak{x}$ und $y \subseteqq x$ immer auch $y \in \mathfrak{x}$ ist.

24. Ehe wir die Umkehrung des letzten Resultates aufstellen, beweisen wir noch den

Satz 5. *Bei einer gepaarten Menge* $\mathfrak{m}$ *besteht dann und nur dann für die normalen Teilmengen* $\alpha, \beta, \ldots$ *von* $\mathfrak{m}$ *die Aussage:*

(24. 1) Aus $\alpha\beta = \mathfrak{n}$ folgt jeweils $\alpha \subseteqq \mathfrak{c}(\beta)$ und umgekehrt,

wenn für die Elemente $a, b, \ldots$ *von* $\mathfrak{m}$ *die Aussage besteht:*

(24. 2) Aus $\mathfrak{c}^2(a)\,\mathfrak{c}^2(b) = \mathfrak{n}$ folgt jeweils $a \circ b$ und umgekehrt.

Wir nehmen erstens an, (24. 1) sei erfüllt. Aus $\mathfrak{c}^2(a)\,\mathfrak{c}^2(b) = \mathfrak{n}$ folgt dann

$$\mathfrak{c}^2(a) \subseteqq \mathfrak{c}^3(b) = \mathfrak{c}(b),$$

und da $a \in \mathfrak{c}^2(a)$ ist, muß $a \in \mathfrak{c}(b)$ oder $a \circ b$ sein. Umgekehrt folgen aus $a \circ b$ nacheinander

$$a \in \mathfrak{c}(b), \quad \mathfrak{c}^2(a) \subseteqq \mathfrak{c}^3(b)$$

und mit Benutzung von (24. 1)

$$\mathfrak{c}^2(a)\,\mathfrak{c}^2(b) = \mathfrak{n}.$$

Also ist (24. 2) eine Folge von (24. 1).

Zweitens nehmen wir an, daß (24. 2) gelten soll und daß α, β normale Teilmengen von $\mathfrak{m}$ sind, für welche $\alpha\beta = \mathfrak{n}$ ist. Es sei x ein Element von α und y ein Element von β. Aus

$$\mathfrak{c}^2(x) \subseteqq \alpha, \quad \mathfrak{c}^2(y) \subseteqq \beta, \quad \alpha\beta = \mathfrak{n}$$

folgt $\mathfrak{c}^2(x)\,\mathfrak{c}^2(y) = \mathfrak{n}$ und nach (24. 2)

$$x \circ y.$$

Daher hat man $x \in \mathfrak{c}(y)$ für alle $y \in \beta$; aus

$$\mathfrak{c}(\beta) = \prod_{y \in \beta} \mathfrak{c}(y)$$

folgt dann $x \in \mathfrak{c}(\beta)$ für alle $x \in \alpha$ und schließlich

$$\alpha \subseteqq \mathfrak{c}(\beta).$$

Umgekehrt sei $\alpha \subseteqq \mathfrak{c}(\beta)$ und x sei ein Element von $\alpha\beta$. Man hat dann

$$x \in \beta, \quad x \in \alpha \subseteqq \mathfrak{c}(\beta) \subseteqq \mathfrak{c}(x)$$

und daraus folgt $x \circ x$. Nach (24. 2) muß dann $\mathfrak{c}^2(x) = \mathfrak{n}$ und $x \in \mathfrak{n}$ sein. Es folgt schließlich $\alpha\beta = \mathfrak{n}$ und hiermit ist gezeigt, daß auch (24. 1) eine Folge von (24. 2) ist. Der behauptete Satz ist deshalb richtig.

25. Wir nehmen jetzt an, wir hätten eine Paarung der Menge $\mathfrak{m}$ gefunden, für welche die eine und dann auch die andere der äquivalenten Forderungen (24. 1) und (24. 2) gilt.

Die Menge $\mathfrak{m}$ wird teilweise geordnet, wenn wir Bindungen nach folgender Regel einführen:

(25. 1) Es soll $a \subseteqq b$ dann und nur dann gesetzt werden, wenn $\mathfrak{c}^2(a) \subseteqq \mathfrak{c}^2(b)$ ist.

Nach dieser Regel ist ein Element x dann und nur dann gemeinsamer Teil von a und b, wenn

$$\mathfrak{c}^2(x) \subseteqq \mathfrak{c}^2(a)\,\mathfrak{c}^2(b) \tag{25. 2}$$

ist. Da nun x in $\mathfrak{c}^2(x)$ enthalten ist, muß auch

$$x \in \mathfrak{c}^2(a)\,\mathfrak{c}^2(b) \tag{25. 3}$$

sein, und umgekehrt folgt (25. 2) aus (25. 3), weil $\mathfrak{c}^2(a)\,\mathfrak{c}^2(b)$ eine normale Teilmenge von $\mathfrak{m}$ ist. Die Menge der gemeinsamen Teile von a und b ist also mit $\mathfrak{c}^2(a)\,\mathfrak{c}^2(b)$ identisch, und a, b sind dann und nur dann relativ prim, wenn $\mathfrak{c}^2(a)\,\mathfrak{c}^2(b) = \mathfrak{n}$ ist, oder, da (24. 2) gelten muß, wenn $a \circ b$ ist.

Die konjugierten Elemente der gegebenen Paarung sind also gleichzeitig auch die relativ primen Elemente der durch (25. 1) definierten teilweisen Ordnung von $\mathfrak{m}$. Nun muß aber auch (24. 1) gelten, und nach dem Satz 4 des § 19 ist der Verband $\mathfrak{M}$ der normalen Teilmengen von $\mathfrak{m}$ ein Somenring. Die übrigen Behauptungen des folgenden Satzes werden ganz ähnlich aus unseren Resultaten abgeleitet.

Satz 6. *Eine Paarung einer Menge* $\mathfrak{m}$ *sei vorgegeben, für welche mindestens eine der drei folgenden Behauptungen zutrifft:*

a) Die konjugierten Elemente der Paarung können als relativ prime Elemente einer geeigneten teilweisen Ordnung von $\mathfrak{m}$ *gedeutet werden.*

b) Der Verband $\mathfrak{M}$ *der normalen Teilmengen von* $\mathfrak{m}$ *bildet einen Somenring.*

c) Aus $a \circ b$ *folgt* $\mathfrak{c}^2(a)\,\mathfrak{c}^2(b) = \mathfrak{n}$ *und umgekehrt.*

Dann bestehen gleichzeitig alle drei Behauptungen.

26. Nach dem letzten Satz erzeugen die relativ primen Elemente einer beliebigen teilweisen Ordnung $\mathfrak{m}(\mathsf{A})$ von $\mathfrak{m}$ eine Paarung dieser Menge, für welche die Aussagen (24. 1) und (24. 2) bestehen. Geht man nun von dieser Paarung aus, und führt man die Bindungen (25. 1) ein, so erhält man eine neue teilweise Ordnung $\mathfrak{m}(\mathsf{A}^*)$ von $\mathfrak{m}$, für welche die relativ primen Elemente dieselben sind wie für $\mathfrak{m}(\mathsf{A})$.

Ist nun $a \subseteqq b$ eine Bindung von A, so ist jedes Element x, welches bei der teilweisen Ordnung $\mathfrak{m}(\mathsf{A})$ relativ prim zu b ist, auch relativ prim zu a, und diese Tatsache wird durch die Relation $\mathfrak{c}(b) \subseteqq \mathfrak{c}(a)$ und daher auch durch die Relation

$$\mathfrak{c}^2(a) \subseteqq \mathfrak{c}^2(b)$$

ausgedrückt. Also muß nach (25. 1) die Bindung $a \subseteqq b$ in A^* vorkommen und man hat jedenfalls

(26. 1) $$\mathsf{A} \subseteqq \mathsf{A}^*.$$

Schon die einfachsten Beispiele lehren, daß unter Umständen nicht alle Bindungen von A^* in A enthalten zu sein brauchen, und daß folglich verschiedene teilweise Ordnungen von $\mathfrak{m}$ zu derselben Paarung der relativ primen Elemente führen können.

Wird nun durch Adjunktion einer beliebigen Menge B von Bindungen die teilweise Ordnung $\mathfrak{m}\,(\mathsf{A})$ in eine teilweise Ordnung $\mathfrak{m}\,(\mathsf{A}_1)$ übergeführt, so kann zweierlei vorkommen. Erstens kann die kleinste normale Menge $\mathfrak{n}$ in eine Menge $\mathfrak{n}_1$ übergehen, welche *mehr* Elemente als $\mathfrak{n}$ besitzt. Ist aber zweitens $\mathfrak{n}_1 = \mathfrak{n}$, so müssen je zwei Elemente x, y, welche relativ prim für die Ordnung $\mathfrak{m}\,(\mathsf{A}_1)$ sind, ebenfalls zueinander relativ prim für die Ordnung $\mathfrak{m}\,(\mathsf{A})$ sein und die Menge der zueinander relativ primen Elementenpaare wird beim Übergang von $\mathfrak{m}\,(\mathsf{A})$ zu $\mathfrak{m}\,(\mathsf{A}_1)$ nicht vermehrt.

Ist also insbesondere

$$\mathsf{A} \subset \mathsf{A}_1 \subset \mathsf{A}^*,$$

so muß $\mathfrak{n} \subseteqq \mathfrak{n}_1 \subseteqq \mathfrak{n}^*$ sein, und wegen $\mathfrak{n}^* = \mathfrak{n}$ ist auch $\mathfrak{n}_1 = \mathfrak{n}$. Hieraus schließt man, daß die Paarung der relativ primen Elemente für A, A_1 und A^* dieselbe sein muß. Zu den Bindungen der teilweisen Ordnung $\mathfrak{m}\,(\mathsf{A}^*)$ kann man dagegen keine einzige neue adjungieren, ohne daß die kleinste normale Menge $\mathfrak{n}$ durch eine umfassendere ersetzt wird, oder, falls $\mathfrak{n}$ unverändert bleibt, ohne daß gewisse Paare von relativ primen Elementen verlorengehen. Unter den teilweisen Ordnungen, deren relativ prime Elemente dieselbe Paarung von $\mathfrak{m}$ erzeugen, gibt es also eine ausgezeichnete, welche dadurch charakterisiert ist, daß sie die umfassendste Menge von Bindungen enthält.

Eine teilweise Ordnung von $\mathfrak{m}$, welche diese letzte Eigenschaft besitzt, soll *gesättigt* genannt werden.

27. Die reduzierten Paarungen einer Menge. Die Elemente $a, b, \ldots, x, \ldots$ einer Menge $\mathfrak{m}$ fassen wir zu Klassen $\bar{a}, \bar{b}, \ldots, \bar{x}, \ldots$ zusammen und erhalten eine Menge $\bar{\mathfrak{m}}$ dieser Klassen, deren Untermengen wir mit $\bar{\mathfrak{a}}, \bar{\mathfrak{b}}, \ldots$ bezeichnen. Jede Teilmenge $\bar{\mathfrak{a}}$ von $\bar{\mathfrak{m}}$ kann als eine Teilmenge von $\mathfrak{m}$ aufgefaßt werden. Dafür aber, daß eine Teilmenge $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{m}$ auch als Teilmenge von $\bar{\mathfrak{m}}$ darstellbar sei, muß $\mathfrak{a}$ mit jedem Element einer Klasse auch alle übrigen Elemente derselben Klasse enthalten, d. h. $\mathfrak{a}$ muß eine *Klassenmenge* sein.

Hat man also eine spezielle Menge $\mathfrak{M}$ von Teilmengen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots$ von $\mathfrak{m}$ irgendwie definiert, so kann man die Frage stellen, ob *überhaupt* die Elemente von $\mathfrak{m}$ so auf Klassen $\bar{a}, \bar{b}, \ldots$ verteilt werden können, daß jedes der Elemente $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots$ von $\mathfrak{M}$ eine Klassenmenge wird.

Diese Frage ist sofort zu beantworten, wenn $\mathfrak{M}$ der Verband der normalen Teilmengen von $\mathfrak{m}$ bei einer beliebig vorgegebenen Paarung ist. Für zwei Elemente x, y von $\mathfrak{m}$ sei nämlich $\mathfrak{c}(x) \neq \mathfrak{c}(y)$, so daß z. B. ein Element z von $\mathfrak{m}$ in $\mathfrak{c}(x)$, aber nicht in $\mathfrak{c}(y)$ enthalten ist. Aus $z \in \mathfrak{c}(x)$ folgt dann $x \in \mathfrak{c}(z)$; dagegen kann y kein Element von $\mathfrak{c}(z)$ sein, weil dann entgegen der Voraussetzung $z \in \mathfrak{c}(y)$ wäre. Sind dagegen x und y Elemente, für welche $\mathfrak{c}(x) = \mathfrak{c}(y)$ ist, und bedeutet α eine normale Teilmenge von $\mathfrak{m}$, welche x enthält, so hat man

$$\mathfrak{c}(\alpha) \subseteqq \mathfrak{c}(x) = \mathfrak{c}(y)$$

und folglich

$$\mathfrak{c}^2(y) \subseteqq \mathfrak{c}^2(\alpha) = \alpha.$$

Also muß α auch das Element y enthalten, und es gilt der

Satz 7. *Bei einer Einteilung der Elemente einer gepaarten Menge in Klassen sind dann und nur dann sämtliche normalen Teilmengen von* $\mathfrak{m}$ *auch Klassenmengen, wenn für irgend zwei Repräsentanten* x, y *einer und derselben Klasse immer* $\mathfrak{c}(x) = \mathfrak{c}(y)$ *ist.*

Eine solche Einteilung in Klassen ist also nur dann nicht trivial, wenn es überhaupt verschiedene Elemente von $\mathfrak{m}$ gibt, für welche $\mathfrak{c}(x) = \mathfrak{c}(y)$ ist.

28. Es seien x_1, y_1 konjugierte Elemente von $\mathfrak{m}$, so daß man schreiben kann

$$y_1 \in \mathfrak{c}(x_1).$$

Ferner seien x_2, y_2 zwei weitere Elemente von $\mathfrak{m}$, für welche gilt

$$\mathfrak{c}(x_1) = \mathfrak{c}(x_2), \quad \mathfrak{c}(y_1) = \mathfrak{c}(y_2).$$

Dann erhält man nacheinander:

$$y_1 \in \mathfrak{c}(x_2), \quad x_2 \in \mathfrak{c}(y_1) = \mathfrak{c}(y_2),$$

und daher müssen auch die Elemente x_2, y_2 konjugiert sein.

Für zwei Klassen $\bar{x}$, $\bar{y}$ einer Klasseneinteilung von $\mathfrak{m}$, welche der im Satze 7 des vorigen Paragraphen angegebenen Bedingung genügt, gilt also folgendes: entweder ist kein einziger Repräsentant x von $\bar{x}$ konjugiert zu einem Repräsentanten y von $\bar{y}$ oder aber *jeder* Repräsentant von $\bar{x}$ ist zu *jedem* Repräsentanten von $\bar{y}$ konjugiert. Ist letzteres der Fall, so wollen wir schreiben $\bar{x} \circ \bar{y}$ und auf diese Weise wird die Menge $\bar{\mathfrak{m}}$ aller Klassen gepaart.

29. Ist $\mathfrak{a}$ irgendeine Teilmenge von $\mathfrak{m}$, so bezeichne man mit

$$\bar{\mathfrak{a}} = \mathfrak{f}(\mathfrak{a}) \tag{29. 1}$$

die Menge der Klassen $\bar{x}$, welche mindestens einen in $\mathfrak{a}$ enthaltenen Repräsentanten x besitzen. Mit dieser Bezeichnung erhält man zunächst für die charakteristische Funktion $\bar{\mathfrak{c}}(\bar{x})$ der Paarung von $\bar{\mathfrak{m}}$ die Identität

$$\bar{\mathfrak{c}}(\mathfrak{f}(x)) = \mathfrak{f}(\mathfrak{c}(x)). \tag{29. 2}$$

Nun sei $\mathfrak{a}$ irgendeine Teilmenge von $\mathfrak{m}$ und

$$\mathfrak{c}(\mathfrak{a}) = \prod_{x \in \mathfrak{a}} \mathfrak{c}(x).$$

Da die normalen Teilmengen $\mathfrak{c}(x)$ nach dem Satz 7 lauter Klassenmengen sind, erhält man die Gleichung

$$(29.\,3) \qquad \mathfrak{f}(\mathfrak{c}(\mathfrak{a})) = \mathfrak{f}\left(\prod_{x \in \mathfrak{a}} \mathfrak{c}(x)\right) = \prod_{x \in \mathfrak{a}} \mathfrak{f}(\mathfrak{c}(x)).$$

Mit Benutzung von (29. 2) hat man aber

$$(29.\,4) \qquad \prod_{x \in \mathfrak{a}} \mathfrak{f}(\mathfrak{c}(x)) = \prod_{x \in \mathfrak{a}} \bar{\mathfrak{c}}(\mathfrak{f}(x)) = \prod_{\bar{x} \in \bar{\mathfrak{a}}} \bar{\mathfrak{c}}(\bar{x}) = \bar{\mathfrak{c}}(\bar{\mathfrak{a}}).$$

Die Vergleichung von (29. 3) und (29. 4) liefert jetzt

$$(29.\,5) \qquad \bar{\mathfrak{c}}(\mathfrak{f}(\mathfrak{a})) = \mathfrak{f}(\mathfrak{c}(\mathfrak{a})),$$

und es ist also auch

$$(29.\,6) \qquad \bar{\mathfrak{c}}^2(\bar{\mathfrak{a}}) = \bar{\mathfrak{c}}\big(\mathfrak{f}(\mathfrak{c}(\mathfrak{a}))\big) = \mathfrak{f}(\mathfrak{c}^2(\mathfrak{a}))$$

Ist nun $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}^2(\mathfrak{a})$ eine normale Teilmenge von $\mathfrak{m}$, so hat man folglich

$$\bar{\mathfrak{c}}^2(\bar{\mathfrak{a}}) = \mathfrak{f}(\mathfrak{a}) = \bar{\mathfrak{a}},$$

d. h. $\bar{\mathfrak{a}}$ ist auch eine normale Teilmenge von $\overline{\mathfrak{m}}$. Ist umgekehrt $\bar{\mathfrak{a}}$ normal, so erhält man zunächst aus (29. 1) und (29. 6)

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{a}) = \bar{\mathfrak{a}} = \mathfrak{f}(\mathfrak{c}^2(\mathfrak{a})).$$

Nun sei $\mathfrak{b}$ die kleinste Klassenmenge, für welche $\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{b}$ ist; es ist dann

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{f}(\mathfrak{b}), \quad \mathfrak{c}^2(\mathfrak{a}) = \mathfrak{c}^2(\mathfrak{b})$$

und daher auch

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{b}) = \mathfrak{f}(\mathfrak{c}^2(\mathfrak{b})).$$

Da aber $\mathfrak{b}$ eine Klassenmenge ist, folgt daraus $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}^2(\mathfrak{b})$, d. h. $\mathfrak{b}$ ist eine normale Teilmenge von $\mathfrak{m}$, für welche $\mathfrak{f}(\mathfrak{b}) = \bar{\mathfrak{a}}$ ist. Die normalen Teilmengen von $\mathfrak{m}$ und von $\overline{\mathfrak{m}}$ sind also *eineindeutig* aufeinander bezogen.

Für Klassenmengen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ gelten aber die Gleichungen

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = \mathfrak{f}(\mathfrak{a})\,\mathfrak{f}(\mathfrak{b}), \quad \mathfrak{f}(\mathfrak{a} \dotplus \mathfrak{b}) = \mathfrak{f}(\mathfrak{a}) \dotplus \mathfrak{f}(\mathfrak{b}),$$

so daß schließlich der Satz besteht:

Satz 8. *Wird eine gepaarte Menge $\mathfrak{m}$ homomorph auf eine Menge $\overline{\mathfrak{m}}$ abgebildet, so daß für je zwei Repräsentanten x_1, x_2 eines Elementes $\bar{x}$ von $\overline{\mathfrak{m}}$ immer $\mathfrak{c}(x_1) = \mathfrak{c}(x_2)$ ist, so wird dadurch auch $\overline{\mathfrak{m}}$ gepaart, und zwar so, daß die Verbände $\mathfrak{M}$ und $\overline{\mathfrak{M}}$ der normalen Elemente von $\mathfrak{m}$ bzw. $\overline{\mathfrak{m}}$ isomorph auf einander abgebildet werden.*

30. Unter allen Homomorphien, für welche der letzte Satz gilt, gibt es eine ausgezeichnete: es ist diejenige, bei welcher jede Klasse $\bar{x}$ mit dem Repräsentanten x aus überhaupt allen Elementen x_i besteht, für welche

$$(30.\,1) \qquad \mathfrak{c}(x_i) = \mathfrak{c}(x)$$

ist. Bei dieser Wahl der Klassen $\bar{x}$ (und nur bei dieser) besteht die Aussage:

$$\text{(30. 2)} \qquad \text{aus } \bar{\mathfrak{c}}(\bar{x}) = \bar{\mathfrak{c}}(\bar{y}) \text{ folgt } \bar{x} = \bar{y}.$$

Ist nämlich $\bar{x} \neq \bar{y}$, so ist für irgendeinen Repräsentanten x von $\bar{x}$ und für irgendeinen Repräsentanten y von $\bar{y}$ immer $\mathfrak{c}(y) \neq \mathfrak{c}(x)$, weil aus $\mathfrak{c}(y) = \mathfrak{c}(x)$ folgen würde, daß auch y ein Repräsentant von $\bar{x}$ ist. Dann kann nach (29. 5) eben nicht $\bar{\mathfrak{c}}(\bar{x}) = \bar{\mathfrak{c}}(\bar{y})$ sein.

Eine Paarung von $\bar{\mathfrak{m}}$, für welche (30. 2) besteht, soll eine *reduzierte* Paarung genannt werden. Ist die Paarung reduziert, so sind auch die Elemente

$$\bar{\xi} = \bar{\mathfrak{c}}^2(\bar{x}), \quad \bar{\eta} = \bar{\mathfrak{c}}^2(\bar{y})$$

des Verbandes $\overline{\mathfrak{M}}$ nur dann einander gleich, wenn $\bar{x} = \bar{y}$ ist.

Durch die Gleichung $\bar{\xi} = \bar{\mathfrak{c}}^2(\bar{x})$ wird somit die ganze Menge $\bar{\mathfrak{m}}$ *eineindeutig* auf eine Teilmenge $\overline{\mathfrak{M}}_1$ des Verbandes $\overline{\mathfrak{M}}$ abgebildet, d. h. die Menge $\bar{\mathfrak{m}}$ wird in $\overline{\mathfrak{M}}$, oder in den zu $\overline{\mathfrak{M}}$ isomorphen Verband $\mathfrak{M}$, *eingebettet*.

31. Anwendung auf teilweise geordnete Mengen. Ehe wir die letzten Resultate für teilweise geordnete Mengen verwenden, wollen wir einige Bemerkungen allgemeiner Natur einschieben.

Es sei A die Menge der Bindungen, welche eine teilweise Ordnung $\mathfrak{m}(\mathsf{A})$ von $\mathfrak{m}$ definieren, und D_0 sei die Gesamtheit der in A enthaltenen Doppelbindungen. Dann ist D_0 ebenso wie A notwendig eine transitive Menge von Bindungen. Allgemeiner sei mit D eine transitive Teilmenge der Doppelbindungen D_0 verstanden, welche aber alle Doppelbindungen $x \subseteqq x$ enthält. Ordnet man jedem Element a von $\mathfrak{m}$ alle Elemente x zu, für welche die Bindungen $a \subseteqq x$ und $x \subseteqq a$ in D vorkommen, so werden die Elemente von $\mathfrak{m}$ in Klassen $\bar{a}, \bar{b}, \ldots$ zusammengefaßt. Die Menge $\bar{\mathfrak{m}}$ aller dieser Klassen wird dann teilweise geordnet, wenn wir $\bar{a} \subseteqq \bar{b}$ schreiben, sobald für zwei Repräsentanten a von $\bar{a}$ und b von $\bar{b}$ (und dann auch für alle übrigen) die Bindung $a \subseteqq b$ in A vorkommt. Diese Operation, durch welche die teilweise Ordnung $\mathfrak{m}(\mathsf{A})$ in die teilweise Ordnung $\bar{\mathfrak{m}}(\bar{\mathsf{A}})$ übergeht, kann als eine *Identifizierung* der Elementenpaare von D aufgefaßt werden.

32. Zwischen den Operationen der Identifizierung, welche soeben betrachtet wurde, und der Adjunktion einer Menge B von Bindungen, welche im § 21 erklärt wurde, besteht nun ein Vertauschungssatz.

Bei der Identifizierung entspricht nämlich der Menge B von Bindungen $a \subseteqq b$ eindeutig eine Menge $\bar{\mathsf{B}}$ von Bindungen $\bar{a} \subseteqq \bar{b}$.

Durch Adjunktion der Menge B gehe die teilweise Ordnung $\mathfrak{m}(\mathsf{A})$ in $\mathfrak{m}(\mathsf{C})$ über. Ebenso gehe durch Adjunktion der Bindungen $\bar{\mathsf{B}}$ die teilweise Ordnung $\bar{\mathfrak{m}}(\bar{\mathsf{A}})$ in $\bar{\mathfrak{m}}(\bar{\mathsf{C}})$ über. Durch Identifizierung der Elementenpaare aus D gehe endlich $\mathfrak{m}\,(\mathsf{C})$ in $\overline{\mathfrak{m}}\,(\mathsf{C}^*)$ über. Jede Bindung aus $\overline{\mathsf{A}} \dotplus \overline{\mathsf{B}}$ ist in C^* enthalten, und daraus folgt

$$\overline{\mathsf{C}} \subseteqq \mathsf{C}^*. \tag{32. 1}$$

Es wird nun behauptet, daß darüber hinaus

$$\overline{\mathsf{C}} = \mathsf{C}^* \tag{32. 2}$$

ist.

Die Gleichung (32. 2) ist tatsächlich richtig, wenn die Menge B aus einer einzigen Bindung $a \subseteqq b$ besteht. Es sei nämlich $\bar{x} \subseteqq \bar{y}$ eine Bindung von C^*, welche nicht in $\overline{\mathsf{A}}$ enthalten ist. Sind dann x, y zwei Repräsentanten von $\bar{x}$ bzw. $\bar{y}$, so ist die Bindung $x \subseteqq y$ wohl in C, aber nicht in A enthalten. Dann müssen aber die Bindungen $x \subseteqq a$, $b \subseteqq y$ in A und die Bindungen $\bar{x} \subseteqq \bar{a}$, $\bar{b} \subseteqq \bar{y}$ in $\overline{\mathsf{A}}$ enthalten sein. Daraus folgt, daß $\bar{x} \subseteqq \bar{y}$ auch in $\overline{\mathsf{C}}$ enthalten ist, und hiermit ist in diesem speziellen Fall (32. 2) bewiesen.

Zweitens betrachten wir eine Menge $\{\mathsf{B}_i\}$ von Bindungen, welche dieselben Eigenschaften haben soll, wie die gleichnamige Menge des § 21. Unter der Annahme, daß der Vertauschungssatz für alle B_i gilt, muß er auch für ihre Vereinigung $\mathsf{B} = \Sigma \dotplus \mathsf{B}_i$ bestehen. Dies folgt direkt aus der Tatsache, daß man hier

$$\overline{\mathsf{C}} = \Sigma \dotplus \overline{\mathsf{C}}_i, \quad \mathsf{C}^* = \Sigma \dotplus \mathsf{C}_i^*$$

schreiben kann, und daß nach Voraussetzung $\overline{\mathsf{C}}_i = \mathsf{C}_i^*$ ist.

Der Beweis des Vertauschungssatzes für beliebige Mengen B wird dann nach der Schlußweise des § 22 zu Ende geführt.

33. Durch eine beliebige eindeutige Abbildung sollen die Elemente $a, b, \ldots$ einer Menge $\mathfrak{m}$ auf die Elemente $\bar{a}, \bar{b}, \ldots$ einer Menge $\overline{\mathfrak{m}}$ abgebildet werden. Denkt man sich zwischen je zwei Elementen von $\mathfrak{m}$, welche dasselbe Bild $\bar{a}$ besitzen, Doppelbindungen aufgestellt, so ist der Prozeß der Identifizierung der Elementenpaare von D der Abbildung äquivalent, von der wir ausgegangen sind.

Wir betrachten nun irgendeine teilweise Ordnung $\mathfrak{m}\,(\mathsf{A})$ von $\mathfrak{m}$, adjungieren die Doppelbindungen D zu den Bindungen A und identifizieren in der auf diese Weise erhaltenen teilweisen Ordnung $\mathfrak{m}\,(\mathsf{C})$ die Elementenpaare von D. Als Resultat erhalten wir eine teilweise Ordnung $\overline{\mathfrak{m}}\,(\overline{\mathsf{C}})$ von $\overline{\mathfrak{m}}$.

Nach dem Vertauschungssatz des letzten Paragraphen kann man nun dieselbe teilweise Ordnung $\overline{\mathfrak{m}}\,(\overline{\mathsf{C}})$ erhalten, indem man von den Bindungen $\overline{\mathsf{A}}$ ausgeht, welche in $\overline{\mathfrak{m}}$ den Bindungen A von $\mathfrak{m}$ entsprechen, und die kleinste transitive Menge von Bindungen der Elemente von $\overline{\mathfrak{m}}$ bestimmt, welche alle Bindungen von $\overline{\mathsf{A}}$ enthält.

34. Von einer beliebigen teilweisen Ordnung $\mathfrak{m}\,(\mathsf{A})$ der Menge $\mathfrak{m}$ ausgehend, bilden wir nach dem § 26 die gesättigte teilweise Ordnung $\mathfrak{m}\,(\mathsf{A}^*)$. Die Bindungen von A^* werden nach der Regel (25. 1) hergestellt; Doppelbindungen von A^* bestehen danach zwischen je zwei Elementen, für welche $\mathfrak{c}^2(a) = \mathfrak{c}^2(b)$ und folglich auch $\mathfrak{c}^3(a) = \mathfrak{c}^3(b)$ oder $\mathfrak{c}\,(a) = \mathfrak{c}\,(b)$ gilt.

Genau dieselben Doppelbindungen werden nach dem § 30 *benötigt, um durch Identifizierung die Paarung der relativ primen Elemente von* $\mathfrak{m}\,(\mathsf{A})$ *zu reduzieren.*

Nach dem vorigen Paragraphen kann man diese Reduktion der Paarung folgendermaßen konstruieren: man betrachte die Menge $\bar{\mathfrak{m}}$, welche aus $\mathfrak{m}$ durch Identifizierung der Elementenpaare der Doppelbindungen D^*, welche in A^* enthalten sind, entsteht. Hierauf führe man sämtliche Bindungen $\bar{a} \subseteqq \bar{b}$ ein, für welche die Bindung $a \subseteqq b$ zwischen mindestens einem Repräsentanten a von $\bar{a}$ und mindestens einem Repräsentanten b von $\bar{b}$ in A vorhanden ist. Die kleinste transitive Menge $\bar{\mathsf{A}}$ von Bindungen, welche sämtliche so konstruierte Bindungen $\bar{a} \subseteqq \bar{b}$ enthält, bestimmt die gesuchte teilweise Ordnung $\bar{\mathfrak{m}}\,(\bar{\mathsf{A}})$ von $\bar{\mathfrak{m}}$. Man beachte, daß $\bar{\mathfrak{m}}\,(\bar{\mathsf{A}})$ immer gesättigt ist, wenn $\mathsf{A} = \mathsf{A}^*$ ist.

35. Was folgt nun aus der Tatsache, daß $\bar{\mathfrak{c}}\,(\bar{x})$ die charakteristische Funktion einer reduzierten Paarung ist? Sind $\bar{x}$ und $\bar{y}$ zwei verschiedene Elemente von $\bar{\mathfrak{m}}$, so müssen die normalen Mengen $\bar{\mathfrak{c}}\,(\bar{x})$ und $\bar{\mathfrak{c}}\,(\bar{y})$ voneinander verschieden sein. Mindestens ein Element $\bar{u}$ muß also vorhanden sein, welches z. B. in $\bar{\mathfrak{c}}\,(\bar{x})$, aber nicht in $\bar{\mathfrak{c}}\,(\bar{y})$ enthalten ist. Dann ist $\bar{u}$ relativ prim zu $\bar{x}$, aber nicht relativ prim zu $\bar{y}$, und es gibt einen Teil $\bar{z}$ von $\bar{u}$ und $\bar{y}$, welcher nicht in $\bar{\mathfrak{n}}$ enthalten ist, und welcher selbstverständlich — ebenso wie $\bar{u}$ — relativ prim zu $\bar{x}$ ist. Da dieser Sachverhalt auch umkehrbar ist, läßt sich sagen:

Dann und nur dann ist $\bar{\mathfrak{c}}\,(\bar{x})$ *die charakteristische Funktion einer reduzierten Paarung, wenn man jedem Paar von verschiedenen Elementen* $\bar{x}$, $\bar{y}$ *aus* $\bar{\mathfrak{m}}$ *ein nicht in* $\bar{\mathfrak{n}}$ *enthaltenes Element* $\bar{z}$ *zuordnen kann, welches Teil des einen der beiden Elemente* $\bar{x}$, $\bar{y}$ *ist und relativ prim zum anderen ist.*

Teilweise Ordnungen einer Menge $\bar{\mathfrak{m}}$, welche diese Eigenschaften besitzen, hat zuerst Herr A. Bischof in seiner sehr bemerkenswerten Dissertation[3]) betrachtet und ihre große Bedeutung nach vielen Seiten beleuchtet. Unsere Resultate geben nun ein Mittel, sämtliche teilweise geordnete Mengen herzustellen, welche den zusätzlichen Forderungen genügen, die Bischof

[3]) Artur Bischof, Beiträge zur Carathéodoryschen Algebraisierung des Integralbegriffs. Schriften des Math. Inst. und des Instituts f. angew. Math. d. Univ. Berlin, Bd. 5, Heft 4, 1941.

benutzt hat. Man braucht nur, wie wir soeben sahen, von einer beliebigen teilweisen Ordnung $\mathfrak{m}(\mathsf{A})$ von $\mathfrak{m}$ ausgehend, die Elemente von $\mathfrak{m}$ in geeigneter Weise zu Klassen zusammenzufassen.

36. Beispiele. Wir betrachten eine gepaarte Menge $\mathfrak{m}$ von fünf Elementen 0, 1, 2, 3 und 4. Hierbei soll 0 zu allen übrigen Elementen konjugiert sein, und es sollen außerdem die Relationen

$$1 \circ 2, \quad 2 \circ 3, \quad 3 \circ 4 \tag{36. 1}$$

bestehen. Dann hat man

$$\begin{cases} \mathfrak{c}(0) = \mathfrak{m} = \mu, \quad \mathfrak{c}(\mathfrak{m}) = \{0\} = \nu, \\ \mathfrak{c}(1) = \{0, 2\}, \quad \mathfrak{c}(2) = \{0, 1, 3\}, \quad \mathfrak{c}(3) = \{0, 2, 4\}, \quad \mathfrak{c}(4) = \{0, 3\}. \end{cases} \tag{36. 2}$$

Der Verband $\mathfrak{M}$ der normalen Elemente besteht hier aus den sechs Elementen

$$\begin{cases} \mu, \quad \nu, \quad \alpha = \{0, 2\}, \qquad \beta = \{0, 3\}, \\ \alpha' = \mathfrak{c}(\alpha) = \{0, 1, 3\}, \quad \beta' = \mathfrak{c}(\beta) = \{0, 2, 4\} \end{cases} \tag{36. 3}$$

und hat die Gestalt der nebenstehenden Figur.

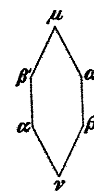

Fig. 1.

Dieser Verband ist kein Booleescher Ring, denn man hat $\alpha' \beta' = \nu$, und nach dem Satz 4 des § 19 müßte $\alpha' \subseteqq \beta$ sein, was nicht der Fall ist.

Dagegen ist die Paarung eine reduzierte. Die Menge $\mathfrak{m}$ wird eineindeutig auf einen Teil von $\mathfrak{M}$ abgebildet, wenn man setzt

$$\nu \sim 0, \quad \alpha' \sim 1, \quad \alpha \sim 2, \quad \beta \sim 3, \quad \beta' \sim 4. \tag{36. 4}$$

37. Die Betrachtung der Elementenpaare von $\mathfrak{m}$, welche bei der Zuordnung (36. 4) relativ primen Elementen des Verbandes $\mathfrak{M}$ entsprechen, liefert eine neue Paarung von $\mathfrak{m}$, welche durch die Relationen

$$1 \circ 2, \quad 1 \circ 4, \quad 2 \circ 3, \quad 3 \circ 4 \tag{37. 1}$$

definiert ist, und demnach dadurch erhalten wird, daß man den früheren Relationen (36. 1) noch $1 \circ 4$ hinzufügt. Bezeichnet man mit $\mathfrak{c}^*(x)$ die charakteristische Funktion dieser neuen Paarung, so erhält man

$$\mathfrak{c}^*(1) = \mathfrak{c}^*(3) = \{0, 2, 4\}, \quad \mathfrak{c}^*(2) = \mathfrak{c}^*(4) = \{0, 1, 3\}.$$

Der neue Verband $\mathfrak{M}^*$ ist ein Booleescher Ring, der aus den vier Elementen

$$\mu, \quad \nu, \quad \gamma = \{0, 2, 4\}, \quad \gamma' = \{0, 1, 3\}$$

besteht. Hier ist aber die neue Paarung von $\mathfrak{m}$ nicht mehr reduziert.

38. In einem dritten Beispiel sollen die Elemente $x, y, \ldots$ von $\mathfrak{m}$ die *offenen* Punktmengen eines beliebigen Euklidischen Raumes sein, und zwei Elemente sollen konjugiert sein, wenn ihr (mengentheoretischer) Durchschnitt leer ist.

Hier wollen wir folgende (von den früheren verschiedene) Bezeichnungen benutzen: die Komplementärmenge einer beliebigen Punktmenge X des Raumes wird mit X', der offene Kern von X bzw. X' wird mit X_α, X'_α, und die abgeschlossene Hülle dieser Punktmengen mit X_β, X'_β bezeichnet. Endlich soll $\mathfrak{g}(X)$ die Menge aller offenen Teilmengen von X bedeuten, so daß man auch schreiben kann

$$\mathfrak{g}(X) = \mathfrak{g}(X_\alpha).$$

Für die charakteristische Funktion der angegebenen Paarung hat man dann

$$\mathfrak{c}(x) = \mathfrak{g}(x') = \mathfrak{g}(x'_\alpha).$$

Es sei jetzt $\mathfrak{a}$ eine beliebige Teilmenge von $\mathfrak{m}$; mit v bezeichnen wir die Vereinigung aller offenen Punktmengen, welche als Elemente von $\mathfrak{a}$ auftreten. Die offenen Punktmengen, welche zu allen Punktmengen aus $\mathfrak{a}$ fremd sind, und die offenen Punktmengen, welche zu v fremd sind, sind nun dieselben. Daraus folgt

$$\mathfrak{c}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{c}(v) = \mathfrak{g}(v') = \mathfrak{g}(v'_\alpha).$$

Infolgedessen kann man schreiben

$$\mathfrak{c}(\mathfrak{g}(y)) = \mathfrak{c}(y) = \mathfrak{g}(y').$$

Mit $y = x'_\alpha$ hat man aber $y' = x_\beta$, und folglich

$$\mathfrak{c}^2(x) = \mathfrak{c}(\mathfrak{g}(x'_\alpha)) = \mathfrak{g}(x_\beta),$$
$$\mathfrak{c}^2(\mathfrak{a}) = \mathfrak{c}^2(v) = \mathfrak{g}(v_\beta).$$

Alle normalen Teilmengen von $\mathfrak{m}$ können also in der Gestalt $\mathfrak{g}(v_\beta)$ geschrieben werden.

Sind nun v und w offene Punktmengen, so folgt aus $vw = 0$ zwar nicht $v_\beta w_\beta = 0$, trotzdem aber ist immer $\mathfrak{g}(v_\beta)\,\mathfrak{g}(w_\beta) = 0$. Wegen $v \in \mathfrak{g}(v_\beta)$, $w \in \mathfrak{g}(w_\beta)$ ist umgekehrt immer $vw = 0$ eine Folge von $\mathfrak{g}(v_\beta)\,\mathfrak{g}(w_\beta) = 0$. Nach dem Satz 6 des § 25 muß also immer der Verband $\mathfrak{M}$ der normalen Teilmengen von $\mathfrak{m}$ ein Somenring sein. Letzteres folgt auch sofort nach demselben Satze aus der Tatsache, daß man die Elemente von $\mathfrak{m}$ teilweise ordnen kann.

Die zur gegebenen Paarung von $\mathfrak{m}$ korrespondierende reduzierte Paarung erhält man, indem man alle offenen Punktmengen, welche dieselbe abgeschlossene Hülle besitzen, zu einer Klasse zusammenfaßt.

Der Somenring $\mathfrak{M}$, welchen wir soeben erhalten haben, hat sehr eigentümliche Eigenschaften. Unter anderem liefert er das einfachste Beispiel eines vollkommenen Somenringes, dessen Elemente man nicht isomorph auf die Teilmengen einer festen Menge abbilden kann.

(Eingegangen am 6. Januar 1942.)