Werk

Titel: Mathematische Zeitschrift

Ort: Berlin

Jahr: 1942

Kollektion: Mathematica

Werk Id: PPN266833020_0048

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN266833020_0048|LOG_0006

Über die ebene Bewegung eines unausdehnbaren Fadens.

Herrn KONRAD KNOPP
zum 60. Geburtstag am 22. Juli 1942 gewidmet.

Von

Georg Hamel in Berlin.

Wir betrachten zunächst einen unausdehnbaren Idealfaden, der also keinerlei Steifigkeit aufweist und studieren seine ebenen Bewegungen. Er möge schwer sein, seine Dichte je Längeneinheit ϱ konstant; im dritten Teil werden wir allgemeine äußere Kräfte $X(t)\,ds$, $Y(t)\,ds$ längs des Fadens verteilt annehmen. Die Bewegungsgleichungen finden sich in allen Lehrbüchern; wir nehmen im allgemeinen die Existenz und Stetigkeit der gebrauchten Ableitungen an. Aber in der Durchführung bei gegebenen Anfangs- und Randbedingungen gibt es noch merkwürdige, ja geradezu paradoxe Erscheinungen, worauf PAILLOUX[1]) und KUCHARSKI[2]) hingewiesen haben. Im Teil I behandeln wir ein von PAILLOUX auf S. 10 bis 15 der genannten Arbeit erwähntes Paradoxon; im Teil II behandeln wir dieselbe Aufgabe unter Berücksichtigung von Seilsteifigkeit; im Teil III formulieren wir einen Existenzsatz — wieder für den Idealfaden — bei Annahme vollkommener Stetigkeit, geben eine strenge Sonderlösung und skizzieren einen Weg zur Auffindung der allgemeinen Lösung. Zum Schluß ein allgemeiner Satz, der zeigt, daß eine bestimmte Beschränkung der Randbedingungen bei voller Stetigkeit eintreten muß.

I. Teil.

Ein Faden, der unausdehnbar sei und keinerlei Steifigkeit besitze, habe zu Anfang ($t = 0$) horizontale Lage; er sei schwer (Dichte je Längeneinheit $\varrho = \text{const}$) und werde losgelassen, doch sei das eine Ende (bei $s = 0$, s Bogenlänge, l gesamte Länge) festgehalten im Punkte $x = 0$, $y = 0$. Die Anfangsgeschwindigkeit sei 0. Das Problem ist schwierig, es kann mit Annahme vollständiger Stetigkeit und ohne Steifigkeit nicht gelöst werden, worauf schon PAILLOUX[3]) aufmerksam gemacht hat.

---

[1]) H. PAILLOUX, Contribution à l'étude des systèmes déformables. Ann. de Toulouse, 4 série, t. I, 1937.

[2]) W. KUCHARSKI, Zur Kinetik dehnungsloser Seile mit Knickstellen. Ing.-Archiv XII (1941), S. 109.

[3]) PAILLOUX, l. c. S. 10—15.

Denn setzt man mit der Fadenspannung S das Problem in rechtwinkligen Koordinaten an (die y-Achse zeige nach oben, die x-Achse nach rechts), so erhält man, wie bekannt, die Differentialgleichungen:

$$(1)\quad \begin{cases} \varrho \dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial s}(S\cos\vartheta) = \dfrac{\partial S}{\partial s}\cos\vartheta - S\sin\vartheta\,\dfrac{\partial\vartheta}{\partial s}, \\ \varrho \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\varrho g + \dfrac{\partial}{\partial s}(S\sin\vartheta) = -\varrho g + \dfrac{\partial S}{\partial s}\sin\vartheta + S\cos\vartheta\,\dfrac{\partial\vartheta}{\partial s}, \\ \dfrac{\partial x}{\partial s} = \cos\vartheta, \quad \dfrac{\partial y}{\partial s} = \sin\vartheta. \end{cases}$$

Der Faden sei zu Anfang ungespannt. Dann ist zu Anfang $S = 0$, $\vartheta = 0$, $\dfrac{\partial\vartheta}{\partial s} = 0$, $\dfrac{\partial S}{\partial s} = 0$ und also zu Anfang

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -g,$$

folglich, da die Anfangsgeschwindigkeiten Null sind, bis auf Glieder höherer als der zweiten Ordnung in t

$$x = s, \quad y = -\tfrac{1}{2} g t^2,$$

was mit $x = 0$, $y = 0$ für $s = 0$ unverträglich ist. Man überlegt nun leicht, daß ein *Knick* eintreten wird. Der weitaus größte Teil des Fadens muß zunächst dem freien Fallgesetz gemäß

$$y = -\tfrac{1}{2} g t^2 \quad \text{für} \quad s \geqq s_0$$

gehorchen, denn es gibt bei anfangs horizontaler Lage keine Kraft, auch keine Seilspannung, welche der Schwere entgegenwirken könnte. Nur am Ende, d. h. für $s < s_0$, wird eine Abweichung stattfinden; der feste Punkt 0 wird das Seil am Ende festhalten, es wird deshalb einen fortlaufenden Knick an der Stelle $s_0(t)$ bekommen.

Wir können nun das Problem wenigstens für *kleine* t, d. h. für einen Anfangszustand lösen, und zwar in folgender Weise:

Wir nehmen an, daß in erster Näherung

$$s_0 = a t^{\varkappa}$$

mit $0 < \varkappa$ angenommen werden kann; a positive Konstante. Für $s \geqq s_0$ bleibe das Seil horizontal, es sei dort $y = -\tfrac{1}{2} g t^2$.

Auch in dem kleinen Stück $s \leqq s_0$ sehen wir zu Anfang ϑ als klein an.

Fig. 1.

In dem Stück KE (Knick bis Ende) gelte streng $\vartheta = 0$. Dann haben wir dort die Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial S}{\partial s} = \varrho \ddot{x}$$

und da $\ddot{x}$ von s unabhängig sein muß (wegen der Unausdehnbarkeit), gilt für $s \geqq s_0$

$$S = \varrho \ddot{x} (s - l), \tag{2}$$

da $S = 0$ für $s = l$ sein muß.

Andererseits ist nach der bekannten Formel an einer Knickstelle[4])

$$S^{(0)} = \varrho \dot{s}_0^2 \quad \text{in } K, \tag{3}$$

so daß

$$\dot{s}_0^2 = x (s_0 - l) \tag{4}$$

gelten muß. Ist nun

$$s_0 = a t^{\varkappa}, \quad \dot{s}_0 = \varkappa a t^{\varkappa - 1}, \quad \varkappa > 0,$$

so gilt bei Vernachlässigung von s_0 gegen l (es soll t klein sein) nach (3)

$$\varrho \varkappa^2 a^2 t^{2\varkappa - 2} = S^{(0)}$$

und also nach (2)

$$\varkappa^2 a^2 t^{2\varkappa - 2} = - l \ddot{x}. \tag{5}$$

Wir müssen, damit $\ddot{x}$ zu Anfang Null sei, $\varkappa > 1$ voraussetzen. Dann folgt

$$\ddot{x} = - \frac{\varkappa^2 a^2}{l} t^{2\varkappa - 2},$$

$$\dot{x} = - \frac{\varkappa^2 a^2}{l} \frac{t^{2\varkappa - 1}}{2\varkappa - 1}, \quad x = - \frac{\varkappa a^2}{2 l (2\varkappa - 1)} t^{2\varkappa} + s. \tag{6}$$

Damit sind die Gleichungen für $s \geqq s_0$ erfüllt.

Nun betrachten wir den Teil $s \leqq s_0$.

Hier können wir in erster Näherung $\ddot{x}$ als klein voraussetzen, und da auch $\sin \vartheta$ klein, $\cos \vartheta \approx 1$ gilt, bekommen wir aus der ersten Gleichung (1) als erste Näherung

$$S = \text{const}, \quad \text{d. h. } S = S^{(0)} = \varrho \dot{s}_0^2 = \varrho a^2 \varkappa^2 t^{2\varkappa - 2}$$

(unabhängig von s). Mit analoger Vernachlässigung gibt die zweite Gleichung (1)

$$\varrho \ddot{y} = S^{(0)} \frac{\partial \vartheta}{\partial s} - \varrho g$$

oder

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \varkappa^2 t^{2\varkappa - 2} \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} - g \quad \left(\vartheta \approx \frac{\partial y}{\partial s} \text{ angenommen}\right).$$

Setzen wir in dieser Differentialgleichung $y = -\frac{1}{2} g t^2 + Y(t, s)$, so bekommen wir

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = a^2 \varkappa^2 t^{2\varkappa - 2} \frac{\partial^2 Y}{\partial s^2}.$$

---

[4]) Pailloux, C. R. Paris 1939, S. 325—327. Sur le mouvement d'un fil où glisse un petit anneau. Kucharski, l. c., Gleichung (12). Gleichung (3) ist keine andere als die Gleichung der Charakteristiken der ersten der Gleichungen (2) in Teil III.

Diese Gleichung aber muß nach Ähnlichkeitsbetrachtungen Lösungen der Form

$$t^\alpha f(z) \text{ mit } z = \frac{s}{a t^\varkappa}$$

haben. Die Rechnung bestätigt die Behauptung und gibt für f die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\varkappa^2 f''(1 - z^2) + \varkappa(2\alpha - \varkappa - 1) z f' - \alpha(\alpha - 1) f = 0.$$

Da $z = \frac{s}{a t^\varkappa}$, ferner $s \leqq s_0 = a t^\varkappa$ ist, kommen für z nur Werte $0 \leqq z \leqq 1$ in Frage.

Mithin gibt es Lösungen der Form

$$y = -\frac{1}{2} g t^2 + \sum_\alpha t^\alpha f_\alpha\left(\frac{s}{a t^\varkappa}\right). \tag{7}$$

Verlangt man für $s = s_0$ Anschluß an $y = -\frac{1}{2} g t^2$, so muß

$$\sum_\alpha t^\alpha f_\alpha(1) = 0$$

sein. Andererseits soll $y = 0$ für $s = 0$ sein, also $-\frac{1}{2} g t^2 + \Sigma t^\alpha f_\alpha(0) = 0$. Das läßt sich für $\alpha = 2$ und $f_2(0) = \frac{1}{2} g$ befriedigen.

Für $\alpha = 2$ aber lautet die gewöhnliche Differentialgleichung für f (wir unterdrücken den Index 2)

$$\varkappa^2 f''(1 - z^2) + \varkappa(3 - \varkappa) z f' - 2 f = 0. \tag{8}$$

Durch die Substitution $u = \frac{1-z}{2}$, $z = 1 - 2u$ geht die Gleichung über in

$$u(1 - u)\frac{d^2 f}{du^2} - \frac{3-\varkappa}{2\varkappa}(1 - 2u)\frac{df}{du} - \frac{2}{\varkappa^2} f = 0.$$

Dies ist eine Gaussche Differentialgleichung, d. h. sie ist von der Form

$$u(1 - u)\frac{d^2 f}{du^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1) u]\frac{df}{du} - \alpha\beta f = 0$$

mit

$$\gamma = -\frac{3-\varkappa}{2\varkappa} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2\varkappa}, \quad \alpha + \beta = -\frac{3}{\varkappa}, \quad \alpha\beta = \frac{2}{\varkappa^2},$$

$$\text{also } \alpha = -\frac{1}{\varkappa}, \quad \beta = -\frac{2}{\varkappa}.$$

Sie hat die beiden Integrale

$$F(\alpha, \beta, \gamma; u) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1!\,\gamma} u + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\,\gamma(\gamma+1)} u^2 + \dots$$

und

$$u^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1,\ \beta - \gamma + 1,\ 2 - \gamma;\ u).$$

Da aber wegen des stetigen Anschlusses in der Knickstelle $z = 1$, $f(1) = 0$ sein muß, müssen wir eine Lösung nehmen, die für $z = 1$, d. h. $u = 0$ selber Null wird. Nun ist $1 - \gamma = \frac{1}{2} + \frac{3}{2\varkappa} > 0$, also kommt nur

$$f(z) = C\left(\frac{1-z}{2}\right)^{1-\gamma} F\left(\alpha - \gamma + 1,\ \beta - \gamma + 1,\ 2 - \gamma;\ \frac{1-z}{2}\right)$$

in Frage. Da aber noch für $z = 0$ auch y gleich Null sein soll, so muß $f(0) = \frac{1}{2} g$ sein, und das liefert

$$C = \frac{\frac{1}{2} g\, 2^{1-\gamma}}{F\left(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma;\ \frac{1}{2}\right)},$$

somit

$$f(z) = \frac{1}{2} g\,(1-z)^{1-\gamma} \cdot \frac{F\left(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma;\ \frac{1-z}{2}\right)}{F\left(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma;\ \frac{1}{2}\right)},$$

$$y = -\frac{1}{2} g t^2 \left[1 - (1-z)^{1-\gamma} \frac{F\left(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma;\ \frac{1-z}{2}\right)}{F\left(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma;\ \frac{1}{2}\right)}\right] \text{mit}\, z = \frac{s}{a t^{\varkappa}}.$$

Weiter ergibt sich

$$\sin\vartheta = \frac{\partial y}{\partial s} = t^2 f'(z) \frac{1}{a t^{\varkappa}} = \frac{1}{a} t^{2-\varkappa} f'(z)$$

und daraus

$$\frac{\partial x}{\partial s} \approx 1 - \frac{1}{2}\sin^2\vartheta = 1 - \frac{1}{2a^2} t^{4-2\varkappa} (f'(z))^2,$$

somit

$$x \approx s - \frac{1}{2a^2} t^{4-2\varkappa} \int_0^s f'(z)^2\, ds = s - \frac{1}{2a} t^{4-\varkappa} \int_0^z f'(z)^2\, dz.$$

Das Integral existiert bis zu $z = 1$ hin, da sich $f(z)$ in der Nähe von $z = 1$ wie $(1-z)^{1-\gamma}$, f'^2 wie $(1-z)^{-2\gamma}$ verhält. Es ist aber $-2\gamma = -1 + \frac{3}{\varkappa} > -1$. Aus der Formel für x folgt an der Knickstelle

$$x_0 \approx s_0 - \frac{1}{2a} t^{4-\varkappa} \int_0^1 f'(z)^2\, dz.$$

Wegen des stetigen Anschlusses muß aber wegen (6)

$$-\frac{1}{2a} t^{4-\varkappa} \int_0^1 f'(z)^2\, dz = -\frac{\varkappa a^2}{2l(2\varkappa - 1)} t^{2\varkappa}$$

sein. Daraus folgt

erstens $4 - \varkappa = 2\varkappa$, d. h. $\qquad \varkappa = \frac{4}{3},$

zweitens berechnet sich a aus

$$a^3 = \frac{2\varkappa - 1}{\varkappa} \, l \int_0^1 f'(z)^2 \, dz.$$

Dabei ist wegen

$$\varkappa = \frac{4}{3}, \; 1-\gamma = \frac{1}{2} + \frac{3}{2\varkappa} = \frac{13}{8}, \; \alpha+1-\gamma = -\frac{1}{\varkappa} + \frac{13}{8} = \frac{7}{8}, \; \beta+1-\gamma = \frac{1}{8},$$

$$f(z) = \frac{1}{2} g (1-z)^{\frac{13}{8}} \frac{F\left(\frac{7}{8}, \frac{1}{8}, \frac{21}{8}; \frac{1-z}{2}\right)}{F\left(\frac{7}{8}, \frac{1}{8}, \frac{21}{8}; \frac{1}{2}\right)},$$

$$y = -\frac{1}{2} g t^2 \left[1 - (1-z)^{\frac{13}{8}} \frac{F\left(\frac{7}{8}, \frac{1}{8}, \frac{21}{8}; \frac{1-z}{2}\right)}{F\left(\frac{7}{8}, \frac{1}{8}, \frac{21}{8}; \frac{1}{2}\right)} \right].$$

Der Nenner ist sicher nicht Null, da alle Argumente positive Werte haben. Dabei ist $z = \frac{s}{a t^{\frac{4}{3}}} \leqq 1$; *die Knickstelle pflanzt sich nach dem Gesetz* $s_0 = a t^{\frac{4}{3}}$ *fort.* Es ist noch

$$x = s - \frac{1}{2a} t^{\frac{8}{3}} \int_0^z f'(z)^2 \, dz, \qquad \sin\vartheta = \frac{1}{a} t^{\frac{2}{3}} f'(z) \;\text{ für }\; s \leqq s_0,$$

und das gilt alles in erster Näherung für kleine t.

An der Knickstelle ist $f'(z)$ klein wie $(1-z)^{\frac{5}{8}}$, *also geht die Tangente noch stetig in das horizontale Stück KE über*; erst die Krümmung erleidet eine Unstetigkeit. *Die Beschleunigung* $\ddot{y}$ *wird dort unendlich und zwar positiv: der Faden wird an der Knickstelle nach oben gerissen.*

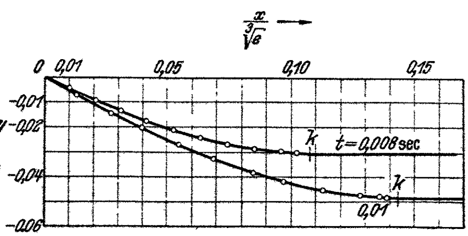


Fig. 2.

Damit ist die Lösung gefunden. Die genauen Bilder von Fig. 2 hat Frl. Ingeborg Kraft berechnet und gezeichnet.

Daß zuerst im Teil $0 \leqq s \leqq s_0$ das Glied mit $\ddot{x}$ vernachlässigt wurde, rechtfertigt sich hinterher. Aus

$$\varrho \ddot{x} = \frac{\partial S}{\partial s} \qquad (\cos\vartheta \approx 1, \quad \sin\vartheta \approx 0)$$

folgt

$$S = S^{(0)} + \int_{s_0}^{s} \varrho \ddot{x} \, ds.$$

$S^{(0)}$ ist klein wie $t^{2\varkappa-2} = t^{\frac{2}{3}}$, $\ddot{x}$ klein wie $t^{2-\varkappa} = t^{\frac{2}{3}}$. Also ist das vernachlässigte Glied kleiner als const $t^{\frac{2}{3}} \cdot s \leqq$ const $\cdot\, t^{\frac{2}{3}} \cdot t^{\frac{4}{3}} =$ const $t^2 \ll S^{(0)}$.

II. Teil.

Nun soll dasselbe Problem unter *Einbeziehung von energieverzehrender Seilsteifigkeit* behandelt und gezeigt werden, daß unter bestimmten Umständen der Faden wie ein starrer Körper herunterfallen kann. Elastische Kräfte bleiben außer Betracht.

In meinem Lehrbuch der elementaren Mechanik (§ 36) habe ich die Theorie der Seilsteifigkeit so aufgestellt, daß für das Biegungsmoment B gelte

$$|B| \leqq r \cdot S$$

da, wo keine Verbiegung stattfindet, dagegen $B = \pm rS$ da, wo Verbiegung stattfindet. Das Zeichen muß so gewählt werden, daß Energieverlust eintritt, d. h.

$$\operatorname{sign} B = \operatorname{sign} \frac{dk}{dt},$$

wo k die Krümmung bedeutet. r ist eine Erfahrungskonstante von der Dimension einer Länge. Die Theorie ist unvollkommen und muß durch eine verbesserte ersetzt werden, etwa derart, daß eine Beziehung der allgemeinen Art $F(B, H, S) \leqq 0$ bzw. $= 0$ erfüllt ist, wo H die Schubkraft bedeutet. Man sollte in erster Linie einmal

$$B^2 + a^2 H^2 \leqq B_0^2 + r^2 S^2$$

experimentell studieren, wo a, B_0, r Erfahrungskonstanten sind. Es zeigt sich, daß die zu Anfang ausgesprochene Behauptung nur gelten kann, wenn $B_0 \neq 0$ ist. *Der Einfachheit halber studieren wir hier die Annahme*

$$|B| \leqq B_0 > 0;$$

und $B = \pm B_0$ mit $\operatorname{sign} B = \operatorname{sign} \dfrac{dk}{dt}$.

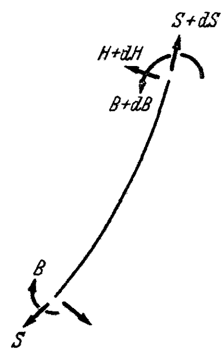


Fig. 3.

Unter Einführung von B, H, S gelten beim ebenen Problem die Gleichungen[5])

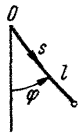
$$\frac{\partial B}{\partial s} + H = 0,$$

$$\frac{\partial S}{\partial s} - kH + \varkappa_s = \varrho\, w_s,$$

$$\frac{\partial H}{\partial s} + kS + \varkappa_\nu = \varrho\, w_\nu,$$

[5]) Siehe die „Elementare Mechanik" § 36, Nr. 184.

wo $\varkappa_s$, $\varkappa_\nu$ die Kraftkomponenten in Richtung s und ν (Normale) sind, w_s, w_ν die entsprechenden Beschleunigungen. Unter der Annahme des Falles in starrer Form ist $k = 0$ (außer in 0) und es gilt für $s > 0$



$$\frac{\partial S}{\partial s} + \varrho g \cos\varphi = -\varrho s \omega^2 \qquad (\omega = \dot\varphi),$$

$$\frac{\partial H}{\partial s} - \varrho g \sin\varphi = \varrho s \dot\omega.$$

Fig. 4. Am Ende $s = l$ gilt $S = 0$, $H = 0$, $B = 0$. Also bekommen wir

$$S = -\varrho g \cos\varphi (s - l) - \tfrac{1}{2}\varrho\omega^2(s^2 - l^2) = \varrho(l - s)\left[g\cos\varphi + \tfrac{1}{2}\omega^2(l + s)\right],$$

$$H = \tfrac{1}{2}\varrho\dot\omega(s^2 - l^2) + \varrho g \sin\varphi(s - l) = -\varrho(l - s)\left[\tfrac{1}{2}\dot\omega(l + s) + g\sin\varphi\right],$$

folglich

$$\frac{\partial B}{\partial s} = -H = \tfrac{1}{2}\varrho\dot\omega(l^2 - s^2) + \varrho g \sin\varphi(l - s),$$

$$B = \tfrac{1}{2}\varrho\dot\omega(l^2 s - l^3 - \tfrac{1}{3}s^3 + \tfrac{1}{3}l^3) + \varrho g\sin\varphi\,(ls - l^2 - \tfrac{1}{2}s^2 + \tfrac{1}{2}l^2)$$

$$= -\varrho\,(l - s)^2\left[\frac{1}{6}\dot\omega\,(2l + s) + \sin\varphi\,\frac{g}{2}\right].$$

In 0 ist

$$B^{(0)} = -\varrho l^2\left[\frac{1}{6}\dot\omega\, 2l + \sin\varphi\,\frac{g}{2}\right].$$

Hier soll Biegung stattfinden, also $B^{(0)} = \pm B_0$ sein. Da aber

$$\frac{dk}{dt} < 0, \quad \text{gilt} \quad B^{(0)} = -B_0$$

oder

$$\varrho l^2\left[\frac{1}{6}\dot\omega\, 2l + \sin\varphi\,\frac{g}{2}\right] = B_0,$$

$$\dot\omega = -\frac{3}{2}\frac{g}{l}\sin\varphi + \frac{3B_0}{\varrho l^3}.$$

Dies ist die Differentialgleichung der Bewegung.

Sie kann unter Benutzung der Anfangsbedingung $\omega = 0$ für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ einmal integriert werden und liefert

$$\omega^2 = \frac{3g}{l}\cos\varphi - \frac{6B_0}{\varrho l^3}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right).$$

Damit überhaupt die Bewegung beginnt und der Faden wegen übergroßer Steifigkeit nicht stehenbleibt, muß für $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\dot\omega < 0$ ausfallen, also $B_0 < \frac{\varrho g l^2}{2}$ sein. Soll der Faden unten ankommen und nicht zwischendurch steckenbleiben, so muß für $\varphi = 0$, $\omega^2 \geqq 0$ ausfallen, d. h.

$$\frac{6B_0}{\varrho l^3}\frac{\pi}{2} \leqq \frac{3g}{l}$$

oder

$$B_0 \leqq \frac{1}{\pi} \varrho g l^2$$

sein.

Nun muß noch die Ungleichheit $|B| \leqq B_0$ für $0 < s \leqq l$ kontrolliert werden. Es gibt zwei Fälle

(a) $$B = -\varrho (l-s)^2 \left[\frac{1}{6} \dot{\omega} (2l+s) + \frac{g}{2} \sin \varphi\right] \leqq 0.$$

Dann muß $-B \leqq B_0$ sein. Das gibt mit

$$\dot{\omega} = -\frac{3}{2} \frac{g}{l} \sin \varphi + \frac{3 B_0}{\varrho l^3}$$

einerseits

$$-\varrho (l-s)^2 \left[-\frac{1}{4} \frac{g}{l} \sin \varphi (2l+s) + \frac{1}{2} \frac{B_0}{\varrho l^3} (2l+s) + \frac{g}{2} \sin \varphi\right] \leqq 0,$$

andererseits

$$\varrho (l-s)^2 \left[-\frac{1}{4} \frac{g}{l} \sin \varphi (2l+s) + \frac{1}{2} \frac{B_0}{\varrho l^3} (2l+s) + \frac{g}{2} \sin \varphi\right] \leqq B_0.$$

Die erste Bedingung gibt wegen $\varrho (l-s)^2 \geqq 0$

$$-\frac{1}{4} \frac{g}{l} s \sin \varphi + \frac{1}{2} \frac{B_0}{\varrho l^3} (2l+s) \geqq 0$$

oder

(A) $$\sin \varphi \leqq \frac{2 B_0}{\varrho g l^2} \frac{2l+s}{s}.$$

Die zweite Bedingung gibt

$$-\frac{1}{4} \frac{g}{l} s (l-s)^2 \varrho \sin \varphi + B_0 \left[\frac{(l-s)^2 (2l+s)}{2 l^3} - 1\right] \leqq 0$$

oder

$$-\frac{1}{4} \frac{g}{l} s \varrho (l-s)^2 \sin \varphi + B_0 \frac{s (s^2 - 3 l^2)}{2 l^3} \leqq 0;$$

und das ist immer erfüllt.

(b) $$B \geqq 0,$$

d. h. nach derselben Rechnung

(B) $$\sin \varphi \geqq \frac{2 B_0}{\varrho g l^2} \frac{2l+s}{s}.$$

Dann verlangt $B \leqq B_0$

$$-\varrho (l-s)^2 \left[-\frac{1}{4} \frac{g}{l} \sin \varphi (2l+s) + \frac{1}{2} \frac{B_0}{\varrho l^3} (2l+s) + \frac{g}{2} \sin \varphi\right] \leqq B_0$$

oder

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{g \varrho}{l} s \sin \varphi (l-s)^2 - B_0 \left[\frac{1}{2} \frac{(2l+s)(l-s)^2}{l^3} + 1\right] \leqq 0$$

oder

(C) $$\sin \varphi \leqq \frac{2 B_0}{\varrho g l^2} \frac{4 l^3 - 3 l^2 s + s^3}{s (l-s)^2}.$$

Sind (B) und (C) überhaupt verträglich? Es muß dann

$$4\,l^3 - 3\,l^2\,s + s^3 > (2\,l + s)\,(l - s)^2 = 2\,l^3 - 3\,l^2\,s + s^3$$

sein, was stets der Fall ist. Zeichnen wir die Kurven

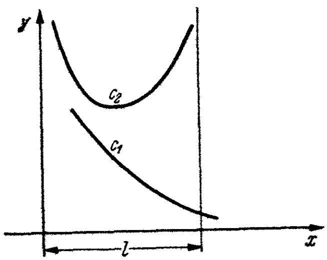


Fig. 5.

$$C_1: \quad y = \frac{2\,B_0}{\varrho\,g\,l^2}\,\frac{2\,l + s}{s}$$

und

$$C_2: \quad y = \frac{2\,B_0}{\varrho\,g\,l^2} \cdot \frac{4\,l^3 - 3\,l^2\,s + s^3}{s(l - s)^2},$$

so liegt C_1 stets unter C_2. Liegt $\sin\varphi$ unter C_1, so ist nach (a) keine Bedingung erforderlich, liegt aber $\sin\varphi$ über C_1, so muß es unter C_2 liegen. Da sowieso C_1 unter C_2 liegt und $\sin\varphi \leqq 1$ ist, ist notwendig und hinreichend, daß der tiefste Punkt von C_2 über oder bei 1 liegt, d. h. hinreichend und notwendig ist

$$\operatorname{Min} \frac{2\,B_0}{\varrho\,g\,l^2}\,\frac{4\,l^3 - 3\,l^2\,s + s^3}{s\,(l - s)^2} \geqq 1 \quad \text{in} \quad 0 < s < l.$$

Das gibt die Gleichung für die Stelle des Minimums

$$(-3\,l^2 + 3\,s^2)\,s\,(l - s)^2 - (4\,l^3 - 3\,l^2\,s + s^3)\,(l - s)\,(l - s - 2\,s) = 0$$

oder

$$s^3 - 3\,s^2\,l + 6\,l^2\,s - 2\,l^3 = 0.$$

Dafür kann man schreiben

$$(l - s)^3 + 3\,l^2(l - s) - 2\,l^3 = 0.$$

Für die Unbekannte $y = -\frac{s}{l} + 1$ liegt die kubische Gleichung

$$y^3 + 3\,y - 2 = 0$$

mit der Diskriminante $R = 1 + 1 = 2$ vor. Folglich ist nach der Cardanischen Formel

$$y = \sqrt[3]{1 + \sqrt{2}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{2}} = 0{,}5961\ldots,$$

folglich

$$s = l(1 - y) = l \cdot 0{,}4039.$$

Mithin lautet die Bedingung

$$\frac{2\,B_0}{\varrho\,g\,l^2} \cdot \frac{4 - 3 \cdot 0{,}4039 + 0{,}4039^2}{0{,}4039 \cdot 0{,}5961^2} \geqq 1;$$

oder

$$B_0 \geqq \varrho\, g\, l^2 \cdot 0{,}02431.$$

Wenn also

$$\frac{B_0}{\varrho\, g\, l^2} > 0{,}02431, \quad \textit{aber} \quad \frac{B_0}{\varrho\, g\, l^2} \leqq \frac{1}{\pi} = 0{,}31831$$

ist, ist starres Herabfallen des Fadens bis zur vertikalen Lage möglich.

Bemerkenswert ist vielleicht noch Folgendes. Wenn B zu klein ist, ist die Bedingung $|B| \leqq B_0$ zuerst für mittlere Werte von s verletzt, nämlich in der Umgebung von $s = l \cdot 0{,}4039$. Außerdem liegt dann der Fall (b) vor, wo $B > 0$ ist, also im Falle der Verletzung von $B \leqq B_0$, $\frac{dk}{dt} > 0$. Also wird sich der Faden im Falle der Verletzung von $|B| \leqq B_0$ in der Mitte nach oben biegen, an den Enden geradlinig fallen, sich also dem Bewegungszustand ohne Steifigkeit annähern. Doch ist dies zunächst nur ein Plausibilitätsergebnis, das noch näher untersucht werden muß.

Die allgemeinere Annahme $B^2 + a^2 H^2 \leqq B_0^2 + r^2 S^2$ kann geradeso untersucht werden, erfordert nur größeren Rechenaufwand.

III. Teil.

In diesem Teil wollen wir erstens die Bewegungsgleichungen des Idealfadens aus Teil I so umformen, daß nur noch S und ϑ als Unabhängige vorkommen, dann von diesen Gleichungen eine genaue Teillösung angeben und endlich ein Näherungsverfahren besprechen, das wahrscheinlich zu einem genauen Verfahren ausgebaut werden kann, wozu wir noch einige Beiträge liefern wollen.

1. *Wir verallgemeinern zuerst die Bewegungsgleichungen* durch Einführen irgendwelcher äußerer Kräfte $X(t)\,ds$, $Y(t)\,ds$, die längs des Fadens von außen einwirken mögen. Dann lauten die Bewegungsgleichungen

$$(1) \qquad \begin{cases} \varrho \dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \dfrac{\partial S}{\partial s}\cos\vartheta - S\sin\vartheta\,\dfrac{\partial\vartheta}{\partial s} + X(t), \\[2ex] \varrho \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \dfrac{\partial S}{\partial s}\sin\vartheta + S\cos\vartheta\,\dfrac{\partial\vartheta}{\partial s} + Y(t). \end{cases}$$

Um mittels $\frac{\partial x}{\partial s} = \cos\vartheta$, $\frac{\partial y}{\partial s} = \sin\vartheta$ den Winkel ϑ als Abhängige einzuführen, differenzieren wir nach s — die Existenz der Ableitungen wird vorausgesetzt — und erhalten

$$\varrho \frac{\partial^2}{\partial t^2}\cos\vartheta = \frac{\partial^2 S}{\partial s^2}\cos\vartheta - 2\frac{\partial S}{\partial s}\sin\vartheta\,\frac{\partial\vartheta}{\partial s} - S\cos\vartheta\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial s}\right)^2 - S\sin\vartheta\,\frac{\partial^2\vartheta}{\partial s^2},$$

$$\varrho \frac{\partial^2}{\partial t^2}\sin\vartheta = \frac{\partial^2 S}{\partial s^2}\sin\vartheta + 2\frac{\partial S}{\partial s}\cos\vartheta\,\frac{\partial\vartheta}{\partial s} - S\sin\vartheta\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial s}\right)^2 + S\cos\vartheta\,\frac{\partial^2\vartheta}{\partial s^2}.$$

Führt man die Differentiationen links aus, so vereinigen sich die Gleichungen leicht zu den beiden von $\sin\vartheta$ und $\cos\vartheta$ freien Differentialgleichungen

$$(2)^{6)}\quad \begin{cases} \varrho\dfrac{\partial^2\vartheta}{\partial t^2} = 2\dfrac{\partial S}{\partial s}\dfrac{\partial\vartheta}{\partial s} + S\dfrac{\partial^2\vartheta}{\partial s^2}, \\ \varrho\left(\dfrac{\partial\vartheta}{\partial t}\right)^2 = -\dfrac{\partial^2 S}{\partial s^2} + S\left(\dfrac{\partial\vartheta}{\partial s}\right)^2. \end{cases}$$

Dabei läuft s von 0 bis l (Fadenlänge), t von 0 bis $+\infty$. Wahrscheinlich besteht folgender Existenzsatz:

Bei hinreichender Beschränkung der gegebenen Größen gibt es eine eindeutig bestimmte Lösung, für die zur Zeit $t = 0$ *gegeben sind:* ϑ *und* $\dfrac{\partial\vartheta}{\partial t}$; *für* $s = 0$ *und* $s = l$ *aber* ϑ *und* S.

2. *Eine genaue Sonderlösung* kann man angeben. Es sei $S =$ const. $\dfrac{S}{\varrho}$ setzen wir gleich c^2. Dann bleiben die Gleichungen $\dfrac{\partial^2\vartheta}{\partial t^2} = c^2\dfrac{\partial^2\vartheta}{\partial s^2}$ und $\left(\dfrac{\partial\vartheta}{\partial t}\right)^2 = c^2\left(\dfrac{\partial\vartheta}{\partial s}\right)^2$. Beide haben die gemeinsamen Lösungen $\vartheta = f(s - ct)$ und $\vartheta = g(s + ct)$; aber nur eine von beiden. Betrachten wir den ersten Fall weiter. Es ist dann

$$(3)\quad \begin{cases} x(s, t) = \displaystyle\int_0^s \cos\,[f(s - ct)]\,\partial s + x_0(t), \\ y(s, t) = \displaystyle\int_0^s \sin\,[f(s - ct)]\,\partial s + y_0(t). \end{cases}$$

Differentiation ergibt

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= c\int_0^s \sin[f(s-ct)]\,f'(s-ct)\,\partial s + \dot{x}_0(t) \\ &= c\,[\cos f(-ct) - \cos f(s-ct)] + \dot{x}_0(t), \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= -c\int_0^s \cos\,[f(s-ct)]\cdot f'(s-ct)\,\partial s + \dot{y}_0(t) \\ &= c\,[\sin f(-ct) - \sin f(s-ct)] + \dot{y}_0(t). \end{aligned}$$

Nochmalige Differentiation ergibt

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= c^2\,[\sin f(-ct)\cdot f'(-ct) - \sin f(s-ct)\cdot f'(s-ct)] + \ddot{x}_0(t), \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= -c^2\,[\cos f(-ct)\,f'(-ct) - \cos f(s-ct)\cdot f'(s-ct)] + \ddot{y}_0(t). \end{aligned}$$

---

[6]) Die zweite Gleichung ist mit Gleichung (4) (S. 3) in der Arbeit von PAILLOUX identisch. Die Gleichungen stehen aber schon bei ROUTH, Bd. 2, Kap. XIII; s. auch mein Lehrbuch, § 58, Nr. 349.

Setzt man alles in (1) ein, so erhält man

$$(4)\qquad \begin{cases} c^2 \sin f(-ct)\, f'(-ct) + \ddot{x}_0(t) = \dfrac{1}{\varrho} X(t), \\ -c^2 \cos f(-ct) \cdot f'(-ct) + \ddot{y}_0(t) = \dfrac{1}{\varrho} Y(t). \end{cases}$$

Soll etwa, wie bei dem Fall des ersten Teils, der Anfangspunkt $s = 0$ festgehalten werden, so sind $x_0 \equiv 0$, $y_0 \equiv 0$, und man muß zur Erhaltung der Bewegung Kräfte annehmen:

$$\begin{aligned} X(t) &= S \sin f(-ct) \cdot f'(-ct), \\ Y(t) &= -S \cos f(-ct) \cdot f'(-ct). \end{aligned}$$

Daraus folgt eine Bedingungsgleichung für X, Y; nämlich einerseits muß

$$f'^2(-ct) = \frac{1}{S^2}(X^2 + Y^2),$$

andererseits $\operatorname{tg} f(-ct) = -\dfrac{X}{Y}$ sein, also $f(-ct) = -\operatorname{arctg}\dfrac{X}{Y}$;

$$-cf'(-ct) = \frac{Y\dot{X} - X\dot{Y}}{X^2 + Y^2}.$$

Vergleich gibt

$$\pm \frac{c}{S}\sqrt{X^2 + Y^2} = \frac{Y\dot{X} - X\dot{Y}}{X^2 + Y^2}$$

oder

$$(5)\qquad \mp \sqrt{S\varrho}\,(X^2 + Y^2)^{\frac{3}{2}} = -Y\dot{X} + X\dot{Y}.$$

Das läßt sich so veranschaulichen: *Betrachtet man die Kurve $x = \int X\,dt$, $y = \int Y\,dt$, also den Antrieb, so muß diese Kurve konstante Krümmung haben, d. h. ein Kreis sein. Der Radius des Kreises ist $\mp \dfrac{1}{\sqrt{S\varrho}}$, woraus sich S bestimmt.*

Als *zweites Beispiel* nehmen wir $X \equiv 0$, $Y \equiv -\varrho g$. Wir können dann auch noch $y_0 \equiv 0$ annehmen und müssen dann f aus

$$-c^2 \cos f(-ct)\, f'(-ct) = -g$$

bestimmen. $-ct = z$ gesetzt, gibt

$$\cos f(z) \cdot f'(z) = \frac{g}{c^2},$$

also $\sin f(z) = \dfrac{g}{c^2} z + a$ oder $f(z) = \arcsin\left(\dfrac{g}{c^2} z + a\right)$. Man kann unbeschadet der Allgemeinheit $a = 0$ setzen. Somit wird

$$x = \int_0^s \cos \arcsin\left(\frac{g}{c^2}(s - ct)\right) \partial s + x_0(t),$$

$$y = \int_0^s \sin \arcsin\left(\frac{g}{c^2}(s - ct)\right) \partial s$$

oder

$$x = \int_0^s \sqrt{1 - \frac{g^2}{c^4}(s - ct)^2}\, \partial s + x_0(t),$$

$$y = \int_0^s \frac{g}{c^2}(s - ct)\, \partial s$$

oder

$$(6) \quad \begin{cases} x = \frac{c^2}{2g}\left\{\arc\sin\left(\frac{gs}{c^2} - \frac{gt}{c}\right) + \left(\frac{gs}{c^2} - \frac{gt}{c}\right)\sqrt{1 - \left(\frac{gs}{c^2} - \frac{gt}{c}\right)^2}\right\} + \\ \qquad + \frac{c^2}{2g}\left\{\arc\sin\frac{gt}{c} + \frac{gt}{c}\sqrt{1 - \left(\frac{gt}{c}\right)^2}\right\} + x_0(t), \\ y = \frac{g}{2c^2}(s^2 - 2cts). \end{cases}$$

Die Wurzeln nehmen wir positiv, für den arc sin den Hauptwert. Man kann aber $x_0(t)$ nun nicht mehr Null setzen, sondern muß nach (4)

$$\ddot{x}_0(t) = -c^2 \sin f(-ct)\, f'(-ct) = -c^2 \sin f(z)\, f'(z)$$
$$= -c^2 \frac{g^2}{c^2}\frac{z}{c^2}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{g^2}{c^4}z^2}} = \frac{g^2}{c}\frac{t}{\sqrt{1 - \frac{g^2}{c^2}t^2}}$$

annehmen. Mithin ist

$$\dot{x}_0 = \frac{g^2}{c}\int \frac{t\,dt}{\sqrt{1 - \frac{g^2}{c^2}t^2}} = -c\sqrt{1 - \frac{g^2}{c^2}t^2} + a,$$

$$x_0 = -c\int \sqrt{1 - \frac{g^2}{c^2}t^2}\, dt + at + b$$
$$= -\frac{c^2}{2g}\left\{\arc\sin\frac{gt}{c} + \frac{gt}{c}\sqrt{1 - \frac{g^2t^2}{c^2}}\right\} + at + b.$$

Setzt man das in Formel (6) ein, so bekommt man für die Seilkurve

$$(7) \quad \begin{cases} x = \frac{c^2}{2g}\left\{\arc\sin\left(\frac{gs}{c^2} - \frac{gt}{c}\right) + \left(\frac{gs}{c^2} - \frac{gt}{c}\right)\sqrt{1 - \left(\frac{gs}{c^2} - \frac{gt}{c}\right)^2}\right\} + at + b, \\ y = \frac{g}{2c^2}(s^2 - 2cts). \end{cases}$$

Um diese Bewegung unter Einfluß der Schwere, bei der ferner der Anfangspunkt $s = 0$ auf der Höhe $y = 0$ gehalten wird, aufrechtzuerhalten, muß man dem Anfangspunkt die Beschleunigung

$$\ddot{x}_0 = \frac{g^2}{c}\frac{t}{\sqrt{1 - \frac{g^2}{c^2}t^2}}$$

erteilen.

Diese Bewegung ist deshalb von vornherein auf das Zeitintervall $0 \leqq t < \frac{c}{g}$ beschränkt. Ferner muß der Realität von x wegen

$$|s - ct| \leqq \frac{c^2}{g} \quad \text{für} \quad 0 \leqq s \leqq l, \quad 0 \leqq t < \frac{c}{g}$$

sein, was noch $l \leqq \frac{c^2}{g}$, also $S \geqq \varrho g l$, d. h. die konstante Fadenspannung größer als das Gewicht des Fadens verlangt.

Zur *Diskussion* kann man die zweite der Gleichungen (7) so schreiben:

$$y = \frac{g}{2c^2}\left((s - ct)^2 - c^2 t^2\right) = \frac{g}{2c^2}(s - ct)^2 - \frac{1}{2} g t^2,$$

womit man $s - ct = \mp \sqrt{\frac{2c^2}{g}\left(y + \frac{1}{2} g t^2\right)}$ erhält. Und da die Glieder $at + b$ belanglos sind, da sie nur eine gleichförmige Horizontalbewegung bedeuten, bekommt man x, das ja sonst nur eine Funktion von $s - ct$ ist, in der Form

$$x = F\left(y + \tfrac{1}{2} g t^2\right) + at + b;$$

d. h. man hat in einem mit der Beschleunigung g fallenden Raum $\xi, \eta\ (= y + \frac{1}{2} g t^2)$, der sich mit der beliebigen, konstanten Geschwindigkeit a horizontal bewegt, eine starre Kurve

$$\xi = F(\eta) = \mp \frac{c^2}{2g}\left\{\arcsin \frac{g}{c^2}\sqrt{\frac{2c^2}{g}\eta} + \frac{g}{c^2}\sqrt{\frac{2c^2}{g}\eta}\sqrt{1 - \frac{g^2}{c^4}\frac{2c^2}{g}\eta}\right\}$$

oder

$$\xi = \mp \frac{c^2}{2g}\left\{\arcsin \sqrt{\frac{2\eta g}{c^2}} + \sqrt{\frac{2\eta g}{c^2}}\sqrt{1 - \frac{2g\eta}{c^2}}\right\}.$$

Setzt man $\frac{2g\eta}{c^2} = \sin^2\varphi$, also $\eta = \frac{c^2}{2g}\sin^2\varphi = \frac{c^2}{4g}(1 - \cos 2\varphi)$; also $s - ct = \mp \sin\varphi \cdot \frac{c^2}{g}$ und präzisiert man das Zeichen von φ so, daß $s - ct = \frac{c^2}{g}\sin\varphi$, so wird $\xi = \frac{c^2}{4g}(2\varphi + \sin 2\varphi)$ und man erkennt, daß man es mit einer gewöhnlichen, spitzen Zykloide zu tun hat.

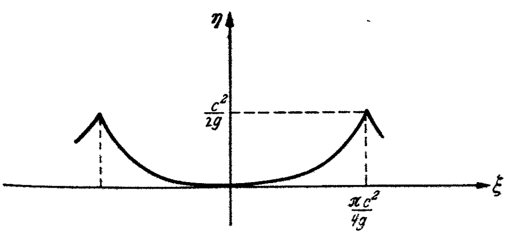


Fig. 6.

Diese Kurve fällt also; man muß aber beachten, daß der Anfangspunkt $s = 0$ gemäß $-ct = \frac{c^2}{g}\sin\varphi$ auf ihr wandert. Für den Endpunkt $s = l$ gilt $l - ct = \frac{c^2}{g}\sin\varphi$, also $\sin\varphi = \frac{g}{c^2}(l - ct)$. Dies ist möglich wegen $l \leqq \frac{c^2}{g}$ und $t < \frac{c}{g}$. Für den äußersten Wert $t = \frac{c}{g}$ müßte $\sin\varphi = \frac{g}{c^2}\left(l - \frac{c^2}{g}\right) = \frac{g}{c^2} l - 1$ sein, was ebenfalls statthaft ist.

3. *Ein Näherungsverfahren.* Wenn die Gleichung der Nr. 2,

$$\varrho\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\right)^2 - S\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial s}\right)^2 = 0,$$

nicht genau erfüllt, die linke Seite aber klein ist, sei es, daß $\frac{\partial\vartheta}{\partial s}$, also die Krümmung, und $\frac{\partial\vartheta}{\partial t}$, also die Winkelgeschwindigkeit der Fadentangente klein sind, oder aber, daß die beiden Glieder sich nahezu das Gleichgewicht halten, so wird man sie für eine rohe Näherung vernachlässigen können und erhält statt der zweiten Gleichung (2) $\frac{\partial^2 S}{\partial s^2} = 0$, also $S = S_1(t) + a(t)\,s$ mit $a(t) = \frac{S_2(t) - S_1(t)}{l}$, wenn $S_1(t)$ und $S_2(t)$ die beiden positiv vorausgesetzten Randwerte von S sind. Sie seien gegeben. S ist dann stets positiv. Damit wird aus der ersten Gleichung (2)

$$\varrho\frac{\partial^2\vartheta}{\partial t^2} = 2\,a(t)\frac{\partial\vartheta}{\partial s} + (S_1 + a\,s)\frac{\partial^2\vartheta}{\partial s^2}, \tag{8}$$

eine lineare, homogene Gleichung für ϑ. *Wir wollen noch annehmen, daß S_2 und S_1 proportional zueinander seien*, dann sind auch a und S_1 proportional und wir können mit $a(t) = \mu\,S_1(t)$ schreiben

$$\frac{\varrho}{S_1(t)}\cdot\frac{\partial^2\vartheta}{\partial t^2} = 2\,\mu\frac{\partial\vartheta}{\partial s} + (1 + \mu\,s)\frac{\partial^2\vartheta}{\partial s^2}.$$

Der alte Ansatz $\vartheta = u(s)\,v(t)$ gibt die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{d^2 v}{d t^2} - \lambda\frac{S_1(t)}{\varrho}v = 0 \tag{9 a}$$

und

$$-\lambda u + 2\mu\frac{du}{ds} + (1 + \mu s)\frac{d^2 u}{ds^2} = 0 \tag{9 b}$$

mit einer Konstanten λ.

Da $S > 0$, ist auch stets $1 + \mu\,s > 0$ für $0 \leqq s \leqq l$, auch (9 b) ist überall regulär.

Übrigens kann man (9 b) durch Besselsche Funktionen integrieren. Setzt man zunächst

$$1 + \mu\,s = z,$$

so wird aus (9 b)

$$\frac{d^2 u}{d z^2} + \frac{2}{z}\frac{du}{dz} - \frac{\lambda}{\mu^2 z}u = 0.$$

Durch die Transformation $z = -\frac{1}{4}\frac{\mu^2}{\lambda}\cdot x^2$, $y = x\cdot u$ erhält man die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)y = 0,$$

deren Lösung bekanntlich $A_1 J_1(x) + B_1 Y_1(x)$ ist. (J_1 die BESSELsche, Y_1 die NEUMANNsche Funktion vom Parameterwert 1.) Also hat (9 b) die allgemeine Lösung

$$u = \frac{1}{\sqrt{z}}\left\{A J_1\left(\sqrt{\frac{-4\lambda}{\mu^2} z}\right) + B Y_1\left(\sqrt{\frac{-4\lambda}{\mu^2} z}\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1+\mu s}}\left\{A J_1\left(\sqrt{\frac{-4\lambda}{\mu^2}(1+\mu s)}\right) + B Y_1\left(\sqrt{\frac{-4\lambda}{\mu^2}(1+\mu s)}\right)\right\}.$$

Man wird $\lambda > 0$ nehmen. Dann gibt es zwei voneinander unabhängige Lösungen $u_1(s)$ und $u_2(s)$, von denen die erste für $s = 0$, die zweite für $s = l$ verschwindet, während die andere 1 ist. Dies erkennt man sowohl direkt aus den Eigenschaften der BESSELschen Funktionen als auch daraus, daß man die Gleichung (9 b) durch die Transformation

$$u = \frac{1}{z} w$$

auf die Form

$$\frac{d^2 w}{dz^2} - \frac{\lambda}{\mu^2 z} w = 0$$

bringen kann, woraus die Behauptung unmittelbar folgt, weil stets $\frac{d^2 w}{dz^2} > 0$ ist.

(9 a) hat ein Fundamentalsystem $v_1(t)$ und $v_2(t)$ so, daß $\begin{Bmatrix} v_1(0)=1, & \dot v_1(0)=0 \\ v_2(0)=0, & \dot v_2(0)=1 \end{Bmatrix}$ ist. Setzt man jetzt das Integral an

$$\vartheta = \int_0^\infty u v\, d\lambda = \int_0^\infty [A(\lambda)\, u_1(\lambda, s) + B(\lambda)\, u_2(\lambda, s)]\,[C(\lambda)\, v_1(\lambda, t) + D(\lambda)\, v_2(\lambda, t)]\, d\lambda,$$

so ist

$$\vartheta(0, s) = \int_0^\infty [A(\lambda)\, u_1(\lambda, s) + B(\lambda)\, u_2(\lambda, s)]\, C(\lambda)\, d\lambda,$$

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right)_{t=0} = \int_0^\infty [A(\lambda)\, u_1(\lambda, s) + B(\lambda)\, u_2(\lambda, s)] \cdot D(\lambda)\, d\lambda,$$

$$\vartheta(t, 0) = \int_0^\infty B(\lambda)\, [C(\lambda)\, v_1(\lambda, t) + D(\lambda)\, v_2(\lambda, t)]\, d\lambda,$$

$$\vartheta(t, l) = \int_0^\infty A(\lambda)\, [C(\lambda)\, v_1(\lambda, t) + D(\lambda)\, v_2(\lambda, t)]\, d\lambda.$$

Aus diesen vier Integralgleichungen erster Art wären die vier unbekannten Funktionen AC, BC, AD, BD zu bestimmen. Diese Aufgabe werde nicht weiter erörtert.

Ist aber ein freies Ende da, also $S_2(t) \equiv 0$, so wird $\mu = -\frac{1}{l}$

$$u = \frac{1}{\sqrt{l-s}}\{A \cdot J_1(\sqrt{-4\lambda(l-s)}) + B\, Y_1(\sqrt{-4\lambda(l-s)})\}.$$

Von dieser Lösung ist der erste Teil brauchbar, da J_1 den Faktor $\sqrt{-2\lambda(l-s)}$ trägt, der zweite aber nicht, da er für $s = l$ unendlich wird; also ist jetzt

$$\vartheta = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{l-s}} J_1\left(\sqrt{-4\lambda(l-s)}\right) (C(\lambda)\, v_1(\lambda, t) + D(\lambda)\, v_2(\lambda, t)\, d\lambda$$

anzusetzen. Man kann jetzt zur Bestimmung von $C(\lambda)$ und $D(\lambda)$ wohl noch zwei Bedingungen ansetzen, aber nicht mehr vier. Etwa

$$\vartheta(0, s) = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{l-s}} J_1\left(\sqrt{-4\lambda(l-s)}\right) C(\lambda)\, d\lambda,$$

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t}(0, s) = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{l-s}} J_1\left(\sqrt{-4\lambda(l-s)}\right) D(\lambda)\, d\lambda.$$

Ist das andere Ende ($s = 0$) festgehalten, so ist das dortige S, also $S_1(t)$ als Reaktionsgröße unbekannt. Es ist die Frage, wie weit sie aus einer anderen Randbedingung, etwa über $\vartheta(t, 0)$ oder $\dot{\vartheta}(t, 0)$ bestimmt werden kann. Dazu siehe Nr. 5 am Schluß.

4. *Ein verallgemeinertes und schrittweise verbessertes Näherungsverfahren.* Eine Gleichung von der Form (8), nämlich die ursprüngliche Gleichung (2; 1)

$$\varrho \frac{\partial^2\vartheta}{\partial t^2} = 2 \frac{\partial S}{\partial s} \frac{\partial\vartheta}{\partial s} + S \frac{\partial^2\vartheta}{\partial s^2}$$

wird man, wenn $S > 0$ als gegeben aufgefaßt wird, nach CAUCHY und RIEMANN mit folgenden Randbedingungen integrieren können. Auf OA sei $\vartheta(0, t)$ gegeben, auf CB sei $\vartheta(l, t)$ gegeben, ferner auf OC die Werte von $\vartheta(s, 0)$ und $\left(\frac{\partial\vartheta(s, t)}{\partial t}\right)_{t=0}$. Stetiger Anschluß in O und C vorausgesetzt. AP und BP seien je eine Charakteristik, d. h. eine zur Differentialgleichung $\varrho\, ds^2 = S\, dt^2$ zugehörige Integralkurve[7]). Die nötige Verallgemeinerung des CAUCHYschen Satzes ist in der Literatur vorhanden[8]), die Verallgemeinerung der RIEMANNschen Methode ist leicht auszuführen. Wir wollen den behaupteten Satz als

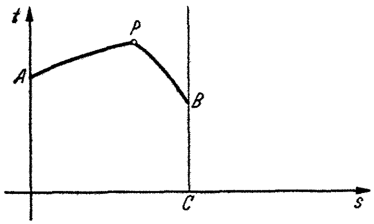


Fig. 7.

[7]) Vgl. Fußnote [4]).

[8]) Siehe etwa MASON, Math. Ann. **65** (1908), S. 570; A. MYLLER, ebenda **68** (1910), S. 75ff.; RELLICH, ebenda **103**. Ältere Arbeiten von PICARD, GOURSAT und HADAMARD sind hier genannt.

richtig ansehen, unbeschadet dessen, daß eine sorgfältige Durcharbeitung erwünscht wäre. Daß die Gleichung (2, 2)

$$\frac{\partial^2 S}{\partial s^2} - S\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial s}\right)^2 = -\varrho\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right)^2$$

wegen $\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial s}\right)^2 \geqq 0$ stets bei gegeben gedachtem ϑ unter Einführung der Randbedingungen $S = S_1(t)$ für $s = 0$, $S = S_2(t)$ für $s = l$ erfüllt werden kann, ist klar. *Auch ist leicht zu beweisen, daß, wenn* $S_1 > 0$, $S_2 > 0$, *auch stets* $S \geqq 0$ *ist* in $0 \leqq s \leqq l$. Denn würde S im Intervall negativ, so müßte ein Minimum mit negativem S vorhanden sein, also $\frac{\partial^2 S}{\partial s^2} > 0$, was aber der Gleichung widerspricht; es müßten denn gleichzeitig an der Minimalstelle $\frac{\partial \vartheta}{\partial s}$ und $\frac{\partial \vartheta}{\partial t}$ gleich Null sein. Diese scheinbare Ausnahme kann aber auch leicht erledigt werden.

Nun schlagen wir folgendes Verfahren der schrittweisen Verbesserung ein. Wir lösen erst:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial s^2} = 0 \quad \text{zu} \quad S = S_1 + \frac{S_2 - S_1}{l} s$$

und dann Gleichung (8), aus der wir einen ersten Näherungswert $\vartheta_1(s, t)$ bestimmen. Mit diesem gehen wir in die Gleichung (2, 2)

$$\frac{\partial^2 S}{\partial s^2} - S\left(\frac{\partial \vartheta_1}{\partial s}\right)^2 = -\varrho\left(\frac{\partial \vartheta_1}{\partial t}\right)^2;$$

und berechnen ein verbessertes S, so fahren wir fort. Der Konvergenzbeweis muß noch erbracht werden.

5. *Ein allgemeiner Satz über die möglichen Randbedingungen bei allgemeiner Stetigkeit und Differenzierbarkeit. Setzt man diese voraus und gibt die Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit beliebig, hält das eine Ende fest, läßt das andere los, so entsteht ein Widerspruch, wenn nicht die Anfangsrichtung im festgehaltenen Punkt eine ganz bestimmte ist*[9]). Es sei zu Anfang $x = x_0(s)$, $y = y_0(s)$; $\dot{x} = u_0(s)$, $\dot{y} = v_0(s)$, wobei natürlich wegen $\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 = 1$ gewisse Bedingungen für diese vier Funktionen erfüllt sein müssen, nämlich

$$\left(\frac{d x_0}{d s}\right)^2 + \left(\frac{d y_0}{d s}\right)^2 = 1 \quad \text{und} \quad \frac{d x_0}{d s}\frac{d u_0}{d s} + \frac{d y_0}{d s}\frac{d v_0}{d s} = 0. \tag{10}$$

Wenn nun der angehängte Index 0 allgemein die Werte für $t = 0$ bedeutet, so folgt aus den Bewegungsgleichungen (1) bei $X(t) \equiv 0$, $Y(t) = -\varrho g$ bis auf Glieder dritter Ordnung in t

$$x(s, t) = x_0(s) + u_0(s)t + \frac{1}{2\varrho}t^2\left\{\frac{\partial S}{\partial s}\cos\vartheta - S\sin\vartheta\frac{\partial \vartheta}{\partial s}\right\}_0,$$

$$y(s, t) = y_0(s) + v_0(s)t + \frac{1}{2\varrho}t^2\left\{-\varrho g + \frac{\partial S}{\partial s}\sin\vartheta + S\cos\vartheta\frac{\partial \vartheta}{\partial s}\right\}_0$$

[9]) Dazu siehe PAILLOUX, l. c.

und daraus

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{d x_0}{d s} + \frac{d u_0}{d s} t + \frac{1}{2\varrho} t^2 \left\{\frac{\partial^2 S}{\partial s^2} \cos\vartheta - 2 \frac{\partial S}{\partial s} \sin\vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial s} - \right.$$
$$\left. - S \cos\vartheta \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial s}\right)^2 - S \sin\vartheta \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial s^2}\right\}_0,$$

$$\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{d y_0}{d s} + \frac{d v_0}{d s} t + \frac{1}{2\varrho} t^2 \left\{\frac{\partial^2 S}{\partial s^2} \sin\vartheta + 2 \frac{\partial S}{\partial s} \cos\vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial s} - \right.$$
$$\left. - S \sin\vartheta \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial s}\right)^2 + S \cos\vartheta \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial s^2}\right\}_0.$$

Daraus ergibt sich weiter außer (10) wegen $\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 = 1$ wieder bei Berücksichtigung von Gliedern zweiter Ordnung in t

$$0 = t^2 \left\{\left(\frac{d u_0}{d s}\right)^2 + \left(\frac{d v_0}{d s}\right)^2 + \frac{1}{\varrho}\left(\frac{\partial^2 S}{\partial s^2} - S \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial s}\right)^2\right)_0\right\};$$

benutzt ist dabei

$$\frac{d x_0}{d s} = \cos\vartheta_0, \quad \frac{d y_0}{d s} = \sin\vartheta_0.$$

Folglich muß S_0 die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 S_0}{d s^2} - S_0 k_0^2 = -\varrho\left[\left(\frac{d u_0}{d s}\right)^2 + \left(\frac{d v_0}{d s}\right)^2\right] = -\varrho\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right)_0^2$$

erfüllen[10]). Diese Gleichung hat bei gegebenem k_0^2 und $\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right)_0^2$ eine Lösung der Form

$$S = A(s) + C_1 B(s) + C_2 C(s),$$

wo $A(s)$ eine Partikularlösung ist, $B(s)$ und $C(s)$ der homogenen Gleichung genügen:

$$\frac{d^2 B}{d s^2} - k_0^2 B = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{d^2 C}{d s^2} - k_0^2 C = 0.$$

Man kann noch $B(0) = 0$, $\frac{dB}{ds}(0) = 1$; $C(l) = 0$, $\frac{dC}{ds}(l) = 1$ vorschreiben, und es ist nicht C proportional zu B, weil $k_0^2 \geqq 0$ ist. Da nun $S = 0$ für $s = l$ sein soll (freies Ende), so folgt

$$C_1 B(l) = -A(l) \quad \text{und} \quad S = A(s) - \frac{A(l)}{B(l)} B(s) + C_2 C(s).$$

Soll nun $x(0, t) \equiv 0$, $y_0(0, t) \equiv 0$ sein, so müßte außer $x_0(0) = 0$, $y_0(0) = 0$, $u_0(0) = 0$, $v_0(0) = 0$ noch

$$\left(\frac{\partial S}{\partial s} \cos\vartheta - S \sin\vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial s}\right)_{\substack{s=0\\t=0}} = 0,$$

$$\left(-\varrho g + \frac{\partial S}{\partial s} \sin\vartheta + S \cos\vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial s}\right)_{\substack{t=0\\s=0}} = 0$$

---

10) Das ist natürlich (2, 2).

erfüllt sein. D. h. aber

$$\left(\frac{\partial S}{\partial s}\right)_{0,0} = \varrho g \sin \vartheta_{0,0},$$
$$(S k)_{0,0} = \varrho g \cos \vartheta_{0,0}.$$

Der Doppelindex 0, 0 bedeutet: $t = 0$, $s = 0$.

Setzt man obigen Wert von S ein, so erhält man

$$A'(0) - \frac{A(l)}{B(l)} + C_2 C'(0) = \varrho g \sin \vartheta_{0,0},$$
$$k_{0,0}(A(0) + C_2 C(0)) = \varrho g \cos \vartheta_{0,0}.$$

$C(0)$ ist sicher nicht Null, da sonst $C(s)$ und $B(s)$ proportional sein müßten, also kann man aus der zweiten Gleichung C_2 eliminieren und in die erste einsetzen (falls nicht $k_{0,0} = 0$ ist) und erhält so eine Bedingung für $\vartheta_{0,0}$, wie behauptet wurde. Denn alle sonst vorkommenden Größen sind wohl bestimmt. Sollte aber $k_{0,0} = 0$ sein, so folgte dasselbe und zwar $\cos \vartheta_{0,0} = 0$. Gibt man beispielsweise $u_0 \equiv 0$, $v_0 \equiv 0$, $k =$ konst, so ist $S = C_2 \operatorname{Sin} k(l - s)$ und die Gleichungen für C_2 und $\vartheta_{0,0}$ heißen

$$-C_2 k \operatorname{Cof} kl = \varrho g \sin \vartheta_{0,0},$$
$$C_2 k \operatorname{Sin} kl = \varrho g \cos \vartheta_{0,0},$$

also

$$\operatorname{tg} \vartheta_{0,0} = -\operatorname{Ctg} \cdot k l.$$

Wenn etwa k sehr klein ist, der Faden zu Anfang nahezu gestreckt ist, wird $\operatorname{tg} \vartheta_{0,0}$ sehr groß negativ, also $\vartheta_{0,0}$ nahezu $-\frac{\pi}{2}$, d. h. der Faden muß zu Anfang nahezu senkrecht herabhängen.

(Eingegangen am 24. Dezember 1941.)