Werk

Titel: Mathematische Zeitschrift

Ort: Berlin

Jahr: 1942

Kollektion: Mathematica

Werk Id: PPN266833020_0048

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN266833020_0048|LOG_0007

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Der n-Teilungskörper eines abstrakten elliptischen Funktionenkörpers als Klassenkörper, nebst Anwendung auf den Mordell-Weilschen Endlichkeitssatz.

Herrn KONRAD KNOPP
zum 60. Geburtstag am 22. Juli 1942 gewidmet.

Von

Helmut Hasse aus Göttingen, z. Z. in Berlin.

Inhalt.

Einleitung.

Wir betrachten einen algebraischen Funktionenkörper K einer Unbestimmten vom Geschlecht $g = 1$ über einem vollkommenen Konstantenkörper Ω.

In einigen meiner früheren Arbeiten[1]), sowie in zwei Arbeiten von DEURING[2]), die sich zur Hauptsache mit dem Beweis der RIEMANNschen Vermutung im Falle eines endlichen Ω befassen, spielt der μ-Teilungskörper K/K_μ von K/Ω, wo μ ein beliebiger Multiplikator von K/Ω ist, eine wichtige Rolle. Allerdings handelt es sich dort genauer um den μ-Teilungskörper $\overline{K}/\overline{K}_\mu$ der algebraisch-abgeschlossenen Konstantenerweiterung $\overline{K}/\overline{\Omega}$ von K/Ω[3]); die ganze Theorie wird nämlich in diesen Arbeiten, ehe die Anwendung auf endliches Ω erfolgt, zunächst für algebraisch-abgeschlossenes Ω entwickelt.

---

[1]) H. HASSE, Zur Theorie der abstrakten elliptischen Funktionenkörper I, II, III. J. reine angew. Math. **175** (1936); im folgenden zitiert mit H I, II, III.

[2]) M. DEURING, Arithmetische Theorie der Korrespondenzen algebraischer Funktionenkörper I, II. J. reine angew. Math. **177** (1937); **183** (1940); im folgenden zitiert mit D I, II.

[3]) Ich verwende ohne nochmalige Erklärung eine Reihe von Begriffsbildungen und Ausdrucksweisen, wie ich sie in einer im Druck befindlichen Arbeit entwickelt habe: H. HASSE, Zur arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionenkörper. Jahresber. Deutsche Math.-Ver. **52** (1942); im folgenden zitiert mit A.

Im Falle, daß der Grad $N(\mu)$ des μ-Teilungskörpers $\overline{K}/\overline{K}\mu$ nicht durch die Charakteristik von Ω teilbar ist, erweist sich $\overline{K}/\overline{K}\mu$, wie wir unten noch einmal näher ausführen werden, als unverzweigt und abelsch, mit der Gruppe der Translationen um die μ-Teilungsklassen als Galois-Gruppe, und mit dem folgenden einfachen Zerlegungsgesetz: Jeder Primdivisor $\bar{\mathfrak{p}}\mu$ von $\overline{K}\mu/\overline{\Omega}$ zerfällt in $N(\mu)$ verschiedene Primdivisoren $\mathfrak{q}$ von $\overline{K}/\overline{\Omega}$, nämlich in die $N(\mu)$ Lösungen von $\mu\bar{\mathfrak{q}} = \bar{\mathfrak{p}}$.

Es ist nun von Interesse zu fragen, welches Zerlegungsgesetz im μ-Teilungskörper $K/K\mu$ von K/Ω selbst gilt, wenn nur Ω von vornherein so umfassend vorausgesetzt wird, daß $K/K\mu$ galoissch und damit abelsch ist; die letztere Voraussetzung kann durch eine endlich-algebraische Konstantenerweiterung verwirklicht werden. Zu dieser Frage stellen wir folgende allgemeine Bemerkung voran.

In der Theorie der endlich-algebraischen Zahlkörper sind die Restklassenkörper der Primdivisoren endliche Körper und als solche durch alleinige Angabe ihres Grades gekennzeichnet. Daher genügt in dieser Theorie zur Beschreibung eines Zerlegungsgesetzes für einen galoisschen Relativkörper (von den endlich vielen verzweigten Primdivisoren abgesehen) die Angabe des gemeinsamen Relativgrades der Primfaktoren für jeden Primdivisor des Grundkörpers. In der Theorie der algebraischen Funktionenkörper über einem Körper Ω sind die Restklassenkörper der Primdivisoren endlich-algebraische Erweiterungen von Ω, also nicht mehr durch alleinige Angabe ihres Grades gekennzeichnet. Daher genügt hier zur Beschreibung eines Zerlegungsgesetzes nicht mehr die bloße Angabe des Relativgrades der Primfaktoren; es müssen vielmehr ihre Restklassenkörper selbst als Relativkörper über Ω angegeben werden. Für einen galoisschen (abelschen) Relativkörper sind diese Restklassenkörper selbst galoissch (abelsch) über Ω und hängen nur von dem Primdivisor des Grundkörpers ab (Theorie der Zerlegungsgruppe).

Wir begnügen uns im folgenden mit dem Studium der Zerlegung der Primdivisoren ersten Grades $\mathfrak{p}\mu$ von $K\mu/\Omega$. Die $\mathfrak{p}\mu$ zusammensetzenden Primdivisoren $\mathfrak{q}$ von K/Ω ergeben sich, indem man die Lösungen $\bar{\mathfrak{q}}$ von $\mu\bar{\mathfrak{q}} = \mathfrak{p}$ in $\overline{K}/\overline{\Omega}$ zu vollständigen Systemen in bezug auf Ω konjugierter zusammenfaßt. Es handelt sich dann um die Angabe des nur von $\mathfrak{p}$ abhängigen Restklassenkörpers

$$\Omega_{\mathfrak{p}} = \Omega(\mathfrak{q}) = \Omega(\bar{\mathfrak{q}}),$$

der durch Adjunktion der Reste der Elemente aus K für irgendein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges $\mathfrak{q}$ (oder — was wesentlich dasselbe — für irgendein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges $\bar{\mathfrak{q}}$) zu Ω entsteht. Ein Zerlegungsgesetz für die Primdivisoren ersten Grades $\mathfrak{p}\mu$ von $K\mu/\Omega$ muß diese Restklassenkörper $\Omega_{\mathfrak{p}}$ durch Eigenschaften von $\mathfrak{p}$ kennzeichnen.

Wir werden nun im folgenden ein solches Zerlegungsgesetz für den Fall eines natürlichen Multiplikators $\mu = n$ herleiten, und zwar wird sich zeigen, daß in diesem Falle ein umkehrbar eindeutiger und isomorpher Zusammenhang zwischen der Kummer-Erzeugung des Restklassenkörpers $\Omega_{\mathfrak{p}}$ und der n-Klasse des Primdivisors $\mathfrak{p}$ besteht. Dabei werden zwei Primdivisoren ersten Grades $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$ von K/Ω dann und nur dann zur gleichen n-Klasse gerechnet, wenn die von $\frac{\mathfrak{p}'}{\mathfrak{p}}$ repräsentierte rationale Nullklasse die n-te Potenz einer rationalen Nullklasse von K/Ω ist. Das Zerlegungsgesetz ist demnach vom Typus der aus der Klassenkörpertheorie der algebraischen Zahlkörper bekannten Zerlegungsgesetze, und es hat in seiner Isomorphieaussage überdies eine gewisse Ähnlichkeit mit dem Artinschen Reziprozitätsgesetz der Klassenkörpertheorie. Wir kommen unten darauf noch näher zurück.

Dieses Zerlegungsgesetz hat sich in einem von mir geleiteten Göttinger Seminar[4]) unter Mitarbeit von Frl. H. v. Caemmerer ergeben, und zwar bei unseren Bemühungen, den bekannten Endlichkeitssatz von Weil[5]) rein-algebraisch zu beweisen. Bei diesem Endlichkeitssatz handelt es sich um einen algebraischen Funktionenkörper K/Ω einer Unbestimmten von beliebigem Geschlecht g über einem endlich-algebraischen Zahlkörper Ω als Konstantenkörper. Der Satz besagt, daß die rationale Nullklassengruppe D von K/Ω (die in bekannter Weise als Additionsgruppe der rationalen g-gliedrigen Punktgruppen von K/Ω darstellbar ist) endlichen Rang hat. Der Weilsche Beweis dieses Satzes stützt sich auf die analytische Theorie der n-Teilung der zu K/Ω gehörigen Abelschen Funktionen, und zwar kommt er mit der speziellen Teilungszahl $n = 2$ aus. Es wird dort in analytischer Form ein Zusammenhang zwischen einer ad hoc konstruierten Klasseneinteilung der rationalen Punktgruppen und der durch Thetafunktionen dargestellten Kummer-Erzeugung des Zweiteilungskörpers entwickelt, der für $g = 1$ in den Spezialfall $n = 2$ des in dieser Arbeit behandelten Zerlegungsgesetzes übergeht. Für $g = 1$ geht der Weilsche Endlichkeitssatz bereits auf Mordell[6]) zurück, dessen Beweis[7]) sich auf die klassischen Zweiteilungsformeln der elliptischen Funktionen stützt und wesentlich frei von Analysis ist.

Wenn ich hier aus dem Zerlegungsgesetz für den n-Teilungskörper einen neuen Beweis des Mordell-Weilschen Endlichkeitssatzes für $g = 1$ herleite,

---

[4]) Eine Ausarbeitung dieses Seminars vom S. S. 1938 befindet sich in der Bücherei des Mathematischen Instituts Göttingen.

[5]) A. Weil, L'arithmétique sur les courbes algébriques. Acta math. 52 (1928).

[6]) L. J. Mordell, On the rational solutions of the indeterminate equations of the third and fourth degree. Proc. Cambridge Phil. Soc. 21 (1922), part 3.

[7]) Siehe auch die Weilsche Fassung dieses Beweises: A. Weil, Sur un théorème de Mordell. Bull. Scienc. Math. 54 (1930).

so geschieht das aus den folgenden drei Gründen: Erstens arbeitet der ursprüngliche MORDELLsche Beweis und auch die WEILsche Fassung mit den speziellen Formeln der Zweiteilung der elliptischen Funktionen. Er mag deshalb zwar kürzer sein, ist aber sicher weniger durchsichtig als mein Beweis. Zweitens erscheint es mir befriedigend, den WEILschen Endlichkeitssatz, der ja eine ganz allgemeine Strukturaussage ist, auch im Zuge der allgemeinen Strukturtheorie der algebraischen Funktionenkörper einer Unbestimmten zu beweisen und ihn so in dieser Theorie an wohlbestimmter Stelle fest zu verankern. Drittens sehe ich in der Befreiung von den speziellen Formeln der Zweiteilung und in der Einordnung in die allgemeine Strukturtheorie für $g = 1$ eine wesentliche Vorarbeit für einen rein-algebraischen Beweis des WEILschen Endlichkeitssatzes auch für $g > 1$.

Einen solchen allgemeinen Beweis zu geben, und dabei auch die bisher nur ganz wenigen restlos klare WEILsche Distributionslehre für algebraische Funktionenkörper mehrerer Unbestimmten in derjenigen Klarheit, Prägnanz und strukturellen Durchsichtigkeit zu entwickeln, durch die sich die arithmetische Theorie der algebraischen Funktionenkörper auszeichnet, erscheint mir als eine sehr lohnende und dankenswerte Aufgabe. Neben dieser Aufgabe, für die das hier bewiesene Zerlegungsgesetz auf den n-Teilungskörper des ABELschen Funktionenkörpers eines algebraischen Funktionenkörpers K/Ω vom Geschlecht $g > 1$ zu verallgemeinern ist, wäre es ferner interessant, in diesem Zerlegungsgesetz noch die hier gemachten Beschränkungen auf Primdivisoren ersten Grades und auf natürliche Multiplikatoren aufzuheben, was wohl beides nicht schwer ist.

§ 1.

Der μ-Teilungskörper[8]).

1. Es sei μ ein (eigentlicher) Meromorphismus von K/Ω (H II, § 2), also ein Isomorphismus von K/Ω auf einen Teilkörper $K\mu/\Omega$, der als hinterer Operator geschrieben wird. Der Relativkörper $K/K\mu$ heißt der μ-Teilungskörper von K/Ω. Sein Relativgrad $N(\mu) = [K : K\mu]$ (Norm von μ) ändert sich nicht bei Übergang zu einer Konstantenerweiterung von K/Ω. Dem Meromorphismus μ entspricht umkehrbar eindeutig eine (nicht-konstante) Korrespondenz von K/Ω auf sich (D I, §§ 2, 5), die als vorderer Operator

[8]) Die in diesem Paragraphen zusammengestellten Tatsachen finden sich im wesentlichen bereits in H II, § 2, D I, §§ 2, 5 und D II, § 4. Jedoch ist dort die Theorie des μ-Teilungskörpers nicht Selbstzweck, und außerdem lassen sich die in H II gegebenen Beweise zum großen Teil durch die Methodik von D I, II beträchtlich vereinfachen. Daher gebe ich hier eine kurze übersichtliche Zusammenstellung der wesentlichen Tatsachen über den μ-Teilungskörper.

geschrieben wird. Sie stellt sich im Bereich der algebraischen Punkte $\bar{\mathfrak{q}}$ von K/Ω (A, § 1, 3) durch die Formel dar:

$$\mu\bar{\mathfrak{q}} = N_{\bar{K}/\bar{K}\mu}(\bar{\mathfrak{q}})\mu^{-1}. \tag{1}$$

Durch Anwendung dieser Korrespondenz auf die algebraische Nullklassengruppe $\bar{D}$ von K/Ω (A, § 4, 1) entsteht der μ zugeordnete Multiplikator von K/Ω auf sich (D I, § 4), den wir hier unmißverständlich ebenfalls mit μ bezeichnen. Er stellt sich als ein Endomorphismus (Homomorphismus in sich) der Klassengruppe $\bar{D}$ dar. Mit $\mu\bar{D}$ bzw. $\bar{D}_\mu$ seien, wie in A, § 8, 3, die Gruppen der durch Ausübung von μ auf Klassen aus $\bar{D}$ entstehenden bzw. 1 werdenden Klassen bezeichnet. Es gilt:

Zu jedem algebraischen Punkt $\bar{\mathfrak{p}}$ von K/Ω gibt es einen algebraischen Punkt $\bar{\mathfrak{q}}$ von K/Ω mit $\mu\bar{\mathfrak{q}} = \bar{\mathfrak{p}}$, und wenn $N(\mu)$ nicht durch Char. Ω teilbar ist, gibt es zu jedem $\bar{\mathfrak{p}}$ genau $N(\mu)$ verschiedene solche $\bar{\mathfrak{q}}$.

Es ist also $\mu\bar{D} = \bar{D}$, d. h. μ stellt sich als Automorphismus von $\bar{D}$ dar; und wenn $N(\mu)$ nicht durch Char. Ω teilbar ist, hat $\bar{D}_\mu$ die Ordnung $N(\mu)$.

Beweis[9]). Die Beziehung $\mu\bar{\mathfrak{q}} = \bar{\mathfrak{p}}$ ist nach (1) gleichbedeutend damit, daß $\bar{\mathfrak{q}}$ einer derjenigen algebraischen Punkte von K/Ω ist, die in dem algebraischen Punkt $\bar{\mathfrak{p}}\mu$ von $K\mu/\Omega$ enthalten sind. Hiernach besitzt $\mu\bar{\mathfrak{q}} = \bar{\mathfrak{p}}$ für jedes $\bar{\mathfrak{p}}$ eine Lösung $\bar{\mathfrak{q}}$. Durch Division mit einer festen Beziehung $\mu\bar{\mathfrak{q}}_0 = \bar{\mathfrak{p}}_0$ folgt daraus $\mu\bar{D} = \bar{D}$. Die Zerlegung des Primdivisors $\bar{\mathfrak{p}}\mu$ von $\bar{K}\mu/\bar{\Omega}$ in Primdivisoren $\bar{\mathfrak{q}}$ von $\bar{K}/\bar{\Omega}$ hat ferner nach dem Gesagten die Form

$$\bar{\mathfrak{p}}\mu = \prod_{\mu\bar{\mathfrak{q}}=\bar{\mathfrak{p}}} \bar{\mathfrak{q}}^{e_{\bar{\mathfrak{q}}}} \quad \text{mit} \quad \sum_{\mu\bar{\mathfrak{q}}=\bar{\mathfrak{p}}} e_{\bar{\mathfrak{q}}} = N(\mu),$$

wo die Verzweigungsordnungen $e_{\bar{\mathfrak{q}}}$ zunächst nicht bekannt sind. Die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren in dieser Zerlegung ist gleich der Lösungsanzahl von $\mu\bar{\mathfrak{q}} = \bar{\mathfrak{p}}$. Durch Division mit $\mu\bar{\mathfrak{q}}_0 = \bar{\mathfrak{p}}$, wo $\bar{\mathfrak{q}}_0$ eine feste Lösung ist, folgt, daß diese Anzahl gleich der Ordnung von $\bar{D}_\mu$ und daher von $\bar{\mathfrak{p}}$ unabhängig ist. Ist also $N(\mu)$ nicht durch Char. Ω teilbar, so daß $\bar{K}/\bar{K}\mu$ separabel ist und daher mindestens ein $\bar{\mathfrak{p}}\mu$ unverzweigt bleibt, so sind notwendig alle $\bar{\mathfrak{p}}\mu$ unverzweigt, d. h. alle $e_{\bar{\mathfrak{q}}} = 1$, und $\bar{D}_\mu$ hat die Ordnung $\sum_{\mu\bar{\mathfrak{q}}=\bar{\mathfrak{p}}} 1 = N(\mu)$, wie behauptet. Der Beweis ergibt überdies:

---

[9]) Siehe schon H II, § 2 und für beliebiges Geschlecht A, § 8, 3. Der hier gegebene Beweis ersetzt die Anwendung der Relativgeschlechtsformel in H II, § 2 durch eine direktere Schlußweise, wie es für die Verallgemeinerung in A, § 8, 3 erforderlich war. Für den hier beiseite gelassenen Fall, daß $N(\mu)$ durch Char. Ω teilbar ist, siehe H II, § 2.

Ist $N(\mu)$ nicht durch Char. Ω teilbar, so ist $\overline{K}/\overline{K}\mu$ unverzweigt, und das Zerlegungsgesetz für $\overline{K}/\overline{K}\mu$ lautet:

$$\bar{\mathfrak{p}}\mu = \prod_{\mu\bar{\mathfrak{q}}=\bar{\mathfrak{p}}} \bar{\mathfrak{q}}.$$

2. Es sei A eine rationale Nullklasse von K/Ω (A, §4, 1). Ferner sei n eine natürliche Zahl und $\mathfrak{o}$ ein rationaler Punkt von K/Ω; die Existenz eines solchen kann auf Grund einer endlich-algebraischen Konstantenerweiterung vorausgesetzt werden. Schließlich bedeute $\mathfrak{x}$ einen transzendenten Punkt von K/Ω (A, § 5, 2). Durch die Äquivalenzen

$$\tau_A\,\mathfrak{x} \sim \mathfrak{x} A, \qquad \frac{n_\mathfrak{o}\,\mathfrak{x}}{\mathfrak{o}} \sim \left(\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{o}}\right)^n$$

werden dann Meromorphismen τ_A, $n_\mathfrak{o}$ von K/Ω definiert (A, § 6), indem durch $\mathfrak{x} \to \tau_A \mathfrak{x}$, $\mathfrak{x} \to n_\mathfrak{o}\,\mathfrak{x}$ Meromorphismen des zu K/Ω isomorphen Körpers $\mathsf{K} = \Omega(\mathfrak{x})$ gegeben sind. τ_A heißt die Translation um die Klasse A und $n_\mathfrak{o}$ die n-Multiplikation mit dem Bezugspunkt $\mathfrak{o}$. Aus dem Additionstheorem (D I, § 2) ergeben sich[10]) für die zugeordneten Korrespondenzen von K/Ω im Bereich der algebraischen Punkte $\bar{\mathfrak{q}}$ von K/Ω die zur Definition von τ_A, $n_\mathfrak{o}$ analogen Formeln:

$$\tau_A\,\bar{\mathfrak{q}} \sim \bar{\mathfrak{q}} A, \qquad \frac{n_\mathfrak{o}\bar{\mathfrak{q}}}{\mathfrak{o}} \sim \left(\frac{\bar{\mathfrak{q}}}{\mathfrak{o}}\right)^n.$$

Die diesen Korrespondenzen zugeordneten Multiplikatoren stellen sich demgemäß durch die Formeln dar:

$$\tau_A\,\overline{C} = \overline{C}, \quad n_\mathfrak{o}\,\overline{C} = \overline{C}^n,$$

wo $\overline{C}$ die algebraischen Nullklassen von K/Ω durchläuft. Die Translationen τ_A lassen also als Multiplikatoren die algebraischen Nullklassen von K/Ω invariant; die n-Multiplikation $n_\mathfrak{o}$ ist als Multiplikator unabhängig vom Bezugspunkt $\mathfrak{o}$ und bedeutet einfach die Potenzierung mit n in der Gruppe $\overline{D}$. Die Translationen τ_A sind Automorphismen von K/Ω, es ist also $N(\tau_A) = 1$, und nach (1) gilt für sie:

$$\tau_A\,\bar{\mathfrak{q}} = \bar{\mathfrak{q}}\,\tau_A^{-1}.$$

Sie lassen hiernach nicht nur als Multiplikatoren, sondern auch als Automorphismen die Klassen aus $\overline{D}$ invariant. Für die n-Multiplikation $n_\mathfrak{o}$ gilt $N(n_\mathfrak{o}) = n^2$[11]). Der zugehörige Teilkörper $Kn_\mathfrak{o}$ hängt nicht vom Bezugspunkt $\mathfrak{o}$ ab, kann also einfach als Kn bezeichnet werden. K/Kn ist dann der n-Teilungskörper von K/Ω.

---

[10]) Man nehme die hier auftretenden Körper K, K als Körper K, K im Sinne von D I, § 2 und $\mathfrak{x}$, $\tau_A\,\mathfrak{x}$, $n_\mathfrak{o}\,\mathfrak{x}$, ... als korrespondenzerzeugende Divisoren $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{K} = K\mathsf{K}$ im dortigen Sinne.

[11]) Diese wichtige Formel ergibt sich am einfachsten gemäß D II, § 4. Mein früher aus H I und H III, § 1 kombinierter rechnerischer Beweis ist durch diese einfache begriffliche Schlußweise als überholt anzusehen.

3. Ist wieder μ irgendein Meromorphismus von K/Ω, so heißen die Klassen $\bar{J}$ aus der Gruppe $\bar{D}_\mu$, also die Lösungen von $\mu \bar{J} = 1$ in der Gruppe $\bar{D}$, die μ-Teilungsklassen von K/Ω. Durch eine endlich-algebraische Konstantenerweiterung kann erreicht werden, daß sie rational sind; wir bezeichnen sie dann mit J, ihre Gruppe mit D_μ. Im Anschluß an die oben ausgesprochenen Sätze gilt:

Ist $N(\mu)$ nicht durch Char. Ω teilbar, und sind die μ-Teilungsklassen von K/Ω rational, so ist der μ-Teilungskörper $K/K\mu$ abelsch, mit der zu D_μ isomorphen Gruppe $\mathfrak{T}_\mu$ der Translationen τ_J um die μ-Teilungsklassen J als Galoisgruppe.

Beweis[12]). Da alle Lösungen $\bar{\mathfrak{q}}$ von $\mu \bar{\mathfrak{q}} = \bar{\mathfrak{p}}$ aus einer festen $\bar{\mathfrak{q}}_0$ in der Form

$$\bar{\mathfrak{q}} \sim \bar{\mathfrak{q}}_0 J, \quad \text{also} \quad \bar{\mathfrak{q}} = \tau_J \bar{\mathfrak{q}}_0 = \bar{\mathfrak{q}}_0 \tau_J^{-1}$$

entstehen, wo J die μ-Teilungsklassen durchläuft, kann das Zerlegungsgesetz für $\bar{K}/\bar{K}\mu$ in der Form

$$\bar{\mathfrak{p}}\mu = \prod_J \tau_J \bar{\mathfrak{q}}_0 = \prod_J \bar{\mathfrak{q}}_0 \tau_J^{-1}$$

geschrieben werden. Hiernach lassen die Translationsautomorphismen τ_J alle algebraischen Punkte $\bar{\mathfrak{p}}\mu$ und daher alle Divisoren $\mathfrak{a}\mu$ von $K\mu/\Omega$ invariant. Sie können dann für die Elemente $z\mu$ aus $K\mu$ nur die Multiplikation mit Faktoren $\neq 0$ aus Ω bewirken. Durch Betrachtung von $z\mu + 1$ folgt, daß diese Faktoren durchweg $= 1$ sind. Daher sind die τ_J Automorphismen von $K/K\mu$. Da ihre Anzahl mit dem Grad $N(\mu)$ von $K/K\mu$ übereinstimmt, ergibt sich die Behauptung.

4. Für die Elemente z aus K hat man einerseits

$$z\mu \equiv (z\mu)(\bar{\mathfrak{q}}) \text{ mod. } \bar{\mathfrak{q}}, \quad \text{also auch} \quad \text{mod. } N_{\bar{K}/\bar{K}\mu}(\bar{\mathfrak{q}})$$

und daher nach (1)

$$z \equiv (z\mu)(\bar{\mathfrak{q}}) \text{ mod. } \mu\bar{\mathfrak{q}},$$

während andererseits natürlich

$$z \equiv z(\mu\bar{\mathfrak{q}}) \text{ mod. } \mu\bar{\mathfrak{q}}$$

ist. Durch Vergleich ergibt sich die *Restformel* (H II, § 2):

$$(z\mu)(\bar{\mathfrak{q}}) = z(\mu\bar{\mathfrak{q}}). \tag{2}$$

Dabei können die Reste auch ∞ sein; (2) ergibt sich unter Einschluß dieses Falles, indem man neben z auch $\frac{1}{z}$ betrachtet, oder also von einem homogenen Elementsystem $z_0 : z_1 = 1 : z$ ausgeht (A, § 3, 1). In (2) steckt demnach als Teilaussage: Dann und nur dann ist $z\mu$ ganz für $\bar{\mathfrak{q}}$, wenn z ganz für $\mu\bar{\mathfrak{q}}$ ist.

---

[12]) Für beliebiges Geschlecht siehe wieder A, § 8, 5.

Wendet man die Restformel (2) auf das Berechnungsschema der Distributionen [A, § 9, (1)—(4)] an, so ergibt sich die analoge Restformel:

$$(\mathfrak{a}\mu)\,(\bar{\mathfrak{q}}) \doteq \mathfrak{a}(\mu\bar{\mathfrak{q}}) \tag{3}$$

für ganze Divisoren $\mathfrak{a}$ von K/Ω. Dabei gilt sogar $=$ statt nur $\doteq$, wenn die beiden Distributionen mittels einer homogenen M-Basis $x_0, \ldots, x_n$ von K/Ω (A, § 3, 2) und der ihr meromorph zugeordneten $M\mu$-Basis $x_0\mu, \ldots, x_n\mu$ von $K\mu/\Omega$ gebildet werden. Beim Beweis beachte man, daß nach dem zuvor Gesagten einer für $\mu\bar{\mathfrak{q}}$ primitiven Normierung von $x_0, \ldots, x_n$ eine für $\bar{\mathfrak{q}}$ primitive Normierung von $x_0\mu, \ldots, x_n\mu$ entspricht.

§ 2.

Die Kummer-Erzeugung und das Kummer-Zerlegungsgesetz für den n-Teilungskörper.

Es sei n eine natürliche Zahl. Wir betrachten den n-Teilungskörper K/Kn von K/Ω. Dabei machen wir durchweg folgende drei Voraussetzungen, ohne sie immer zu wiederholen:

a) *Es gibt einen rationalen Punkt* $\mathfrak{o}$ *von* K/Ω.

b) *Die n-Teilungsklassen von* K/Ω *sind rational.*

c) n *ist nicht durch Char.* Ω *teilbar.*

a) und b) können durch eine endlich-algebraische Konstantenerweiterung verwirklicht werden, c) wird der Einfachheit halber vorausgesetzt. a) ist schon für die Definition des n-Teilungskörpers gemäß § 1 erforderlich, b) und c) sichern die in § 1 ausgesprochenen Tatsachen für ihn.

1. Kurz zusammengefaßt hat man unter den Voraussetzungen a), b), c) folgenden Tatbestand:

Die n-Teilungsklassen J, also die Lösungen von $J^n = 1$, bilden eine abelsche Gruppe D_n von der Ordnung n^2 und vom Typus (n, n); letzteres ergibt sich gruppentheoretisch, indem man neben n die Teiler von n betrachtet. Der n-Teilungskörper K/Kn ist unverzweigt und abelsch, mit der zu D_n isomorphen Gruppe $\mathfrak{T}_n$ der Translationen τ_J um die n-Teilungsklassen J als Galoisgruppe. Das Zerlegungsgesetz für die algebraisch-abgeschlossene Konstantenerweiterung $\bar{K}/\bar{K}n$ (oder also das Zerlegungsgesetz der algebraischen Punkte für K/Kn) lautet:

$$\bar{\mathfrak{p}}\,n_0 = \prod_{n_0\bar{\mathfrak{q}} = \bar{\mathfrak{p}}} \bar{\mathfrak{q}}, \quad \text{wobei} \quad \frac{n_0\bar{\mathfrak{q}}}{\mathfrak{o}} \sim \left(\frac{\bar{\mathfrak{q}}}{\mathfrak{o}}\right)^n.$$

Man beachte, daß zur Formulierung dieses Zerlegungsgesetzes ein rationaler Bezugspunkt $\mathfrak{o}$ und damit einer der zum Multiplikator n gehörigen Meromorphismen, nämlich n_0, ausgezeichnet werden muß, obwohl der Relativkörper K/Kn selbst unabhängig von $\mathfrak{o}$ ist. Entsprechendes gilt auch für die Formulierung der weiteren Ergebnisse.

2. Wie in der Theorie der Kummer-Erzeugungen üblich, schreiben wir für Elemente z, z' aus K:

$$z \underset{n}{=} z' \text{ in } K, \text{ wenn } z' = zc^n \text{ mit } c \neq 0 \text{ aus } K,$$

und reden in diesem Sinne von den n-Klassen aus K. Unter den Voraussetzungen a), b) folgern wir zunächst:

Kummer-Erzeugung des n-Teilungskörpers. *Ω enthält die n-ten Einheitswurzeln. Dementsprechend besitzt $K/K\mathfrak{n}$ eine Kummer-Erzeugung. Diese lautet:*

$$K = K\mathfrak{n}(\sqrt[n]{z_J\, \mathfrak{n}_0}).$$

Dabei ist das Elementsystem $z_J\, \mathfrak{n}_0$ aus $K\mathfrak{n}$ folgendermaßen erklärt: Es gibt in K ein Elementsystem

$$w_J \cong \frac{\mathfrak{i}\, \mathfrak{n}_0}{\mathfrak{o}\, \mathfrak{n}_0},$$

wo $\frac{\mathfrak{i}}{\mathfrak{o}}$ das auf $\mathfrak{o}$ bezogene Repräsentantensystem der n-Teilungsklassen J durchläuft. Damit ist

$$z_J\, \mathfrak{n}_0 = w_J^n.$$

Das zugeordnete Elementsystem z_J aus K ist also durch

$$z_J \cong \left(\frac{\mathfrak{i}}{\mathfrak{o}}\right)^n$$

mit bestimmter Normierung der Faktoren aus Ω gegeben.

Beweis. Wegen $J^n = 1$ ist zunächst klar, daß es zu jeder n-Teilungsklasse J ein Element z_J aus K mit

$$z_J \cong \left(\frac{\mathfrak{i}}{\mathfrak{o}}\right)^n, \quad \text{also} \quad z_J\, \mathfrak{n}_0 \cong \left(\frac{\mathfrak{i}\, \mathfrak{n}_0}{\mathfrak{o}\, \mathfrak{n}_0}\right)^n$$

gibt. Nach dem Zerlegungsgesetz für $\bar{K}/\bar{K}\mathfrak{n}$ ist nun

$$\mathfrak{i}\mathfrak{n}_0 = \prod_J \tau_J \bar{\mathfrak{i}}_0, \quad \mathfrak{o}\,\mathfrak{n}_0 = \prod_J \tau_J \bar{\mathfrak{o}}_0,$$

wo $\bar{\mathfrak{i}}_0$, $\bar{\mathfrak{o}}_0$ feste (nicht notwendig rationale) Lösungen von

$$\mathfrak{n}_0 \bar{\mathfrak{i}}_0 = \mathfrak{i}, \quad \mathfrak{n}_0 \bar{\mathfrak{o}}_0 = \mathfrak{o}$$

sind. Wegen der Invarianz der Nullklassen bei Translationen folgt daraus die Äquivalenz in $\bar{K}$:

$$\frac{\mathfrak{i}\, \mathfrak{n}_0}{\mathfrak{o}\, \mathfrak{n}_0} = \prod_J \tau_J \left(\frac{\bar{\mathfrak{i}}_0}{\bar{\mathfrak{o}}_0}\right) \sim \left(\frac{\bar{\mathfrak{i}}_0}{\bar{\mathfrak{o}}_0}\right)^{n^2}.$$

Nach der Definition von $\mathfrak{n}_0$ gilt ferner in $\bar{K}$:

$$\left(\frac{\bar{\mathfrak{i}}_0}{\bar{\mathfrak{o}}_0}\right)^n \sim \mathfrak{n}_0 \left(\frac{\bar{\mathfrak{i}}_0}{\bar{\mathfrak{o}}_0}\right) = \frac{\mathfrak{i}}{\mathfrak{o}}, \quad \text{also} \quad \left(\frac{\bar{\mathfrak{i}}_0}{\bar{\mathfrak{o}}_0}\right)^{n^2} \sim \left(\frac{\mathfrak{i}}{\mathfrak{o}}\right)^n \sim 1.$$

Die damit in $\bar{K}$ festgestellte Beziehung

$$\frac{\mathfrak{i}\, \mathfrak{n}_0}{\mathfrak{o}\, \mathfrak{n}_0} \sim 1$$

gilt wegen der Invarianz der Divisorenäquivalenz auch in K; denn $\mathfrak{i}n_0$, $\mathfrak{o}n_0$ sind ganze Divisoren von K/Ω. Hiernach gibt es zu jeder n-Teilungsklasse J ein Element w_J aus K mit

$$w_J \cong \frac{\mathfrak{i}\,n_0}{\mathfrak{o}\,n_0}.$$

Die obengenannten Elemente z_J lassen sich dann durch Faktoren aus Ω so normieren, daß

$$z_J\, n_0 = w_J^n$$

gilt. Eine zulässige Änderung der w_J um Faktoren $\neq 0$ aus Ω ergibt für die z_J eine Änderung um Faktoren $\neq 0$ aus Ω^n, so daß die n-Klassen der normierten z_J in K eindeutig festliegen. Der Multiplikation der J:

$$J_1\, J_2 = J$$

entspricht die Multiplikation der $\frac{\mathfrak{i}}{\mathfrak{o}}$ bis auf Faktoren $\neq 0$ aus K, also die Multiplikation der w_J bis auf Faktoren $\neq 0$ aus $K n$, und daher die Multiplikation der z_J bis auf Faktoren $\neq 0$ aus K^n, d. h. die n-Klassenmultiplikation der z_J in K:

$$z_{J_1}\, z_{J_2} \underset{n}{=} z_J \text{ in } K.$$

Da $z_J \underset{n}{=} 1$ in K nur für $J = 1$ gilt, repräsentieren also die z_J eine n-Klassengruppe in K, die zur Gruppe D_n der n-Teilungsklassen J und damit zur Galoisgruppe $\mathfrak{T}_n$ von $K/K n$ isomorph ist. Hat insbesondere J die genaue Ordnung n, so ist $w_J^n = z_J\, n_0$ die früheste in $K n$ gelegene Potenz von w_J. Da $K/K n$ galoissch ist, sind also die n-ten Einheitswurzeln in $K n$ und daher in Ω enthalten. Aus der festgestellten Isomorphie folgt dann nach der Theorie der Kummer-Erzeugungen die Behauptung.

Die vollen n-Klassen der z_J in K ergeben übrigens gerade diejenigen Elemente aus K, die n-te Potenzen von Divisoren (nullten Grades) von K/Ω sind, jedes solche Element in einer bestimmten Normierung durch einen Faktor $\neq 0$ aus Ω.

3. Ist $\mathfrak{p}$ ein Primdivisor ersten Grades von K/Ω, so gibt es in der n-Klasse von z_J in K zu $\mathfrak{p}$ prime Vertreter z_J' (für $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{o}, \mathfrak{i}$ genügt schon $z_J' = z_J$); denn man kann w_J durch einen Faktor aus $K n$ prim zu $\mathfrak{p}\, n_0$ machen. Für alle solchen Vertreter gehören die Reste $z_J'(\mathfrak{p})$ einer und derselben n-Klasse in Ω an. Wir verstehen im folgenden bei Betrachtung eines $\mathfrak{p}$ unter z_J einen zu $\mathfrak{p}$ prim normierten Vertreter der n-Klasse des bisherigen normierten $z_J \cong \left(\frac{\mathfrak{i}}{\mathfrak{o}}\right)^n$, und unter w_J dann eine Lösung von $z_J\, n_0 = w_J^n$. Diese Normierung kann auch gleichzeitig für mehrere $\mathfrak{p}$ vorgenommen werden. Wir beweisen nunmehr:

Kummer-Zerlegungsgesetz für den n-Teilungskörper. *Der Restklassenkörper $\Omega_{\mathfrak{p}}/\Omega$ der Primdivisoren von K/Ω, die in einem Primdivisor ersten Grades $\mathfrak{p}\,n_0$ von Kn/Ω aufgehen, wird in Kummer-Erzeugung gegeben durch*

$$\Omega_{\mathfrak{p}} = \Omega\left(\sqrt[n]{z_J(\mathfrak{p})}\right).$$

Beweis. Bei der getroffenen Normierung sind die $w_J = \sqrt[n]{z_J\,n_0}$ ganz für $\mathfrak{p}\,n_0$, und ihre Diskriminante $|S_{K/Kn}(w_J\,w_{J'})|$ ist prim zu $\mathfrak{p}\,n_0$. Letzteres sieht man so:

$$S_{K/Kn}(w_J\,w_{J'}) = \begin{Bmatrix} n^2\,w_J\,w_{J'} & \text{für } JJ' = 1 \\ 0 & \text{für } JJ' \neq 1 \end{Bmatrix},$$

also

$$|S_{K/Kn}(w_J\,w_{J'})| = (n^2)^{n^2}\left(\prod_J w_J\right)^2;$$

die w_J sind prim zu $\mathfrak{p}\,n_0$ normiert, und n enthält — anders als für algebraische Zahlkörper — keinen Primdivisor, da es eine wegen der Voraussetzung c) von Null verschiedene Konstante ist. Demnach bilden die w_J eine $\mathfrak{p}\,n_0$-Ganzheitsbasis für K/Kn. Ist also $\mathfrak{q}$ ein Primdivisor von K/Ω, der in $\mathfrak{p}\,n_0$ aufgeht, so erzeugen die $w_J(\mathfrak{q})$ den Restklassenkörper $\Omega(\mathfrak{q}) = \Omega_{\mathfrak{p}}$ über dem Restklassenkörper $\Omega(\mathfrak{p}\,n_0) = \Omega$:

$$\Omega_{\mathfrak{p}} = \Omega(w_J(\mathfrak{q})).$$

Ist nun $\bar{\mathfrak{q}}$ ein in $\mathfrak{q}$ steckender algebraischer Punkt von K/Ω, so ist nach dem Zerlegungsgesetz der algebraischen Punkte $n_0\bar{\mathfrak{q}} = \mathfrak{p}$, also nach der Restformel § 1, (2)

$$w_J(\mathfrak{q})^n = w_J(\bar{\mathfrak{q}})^n = (z_J\,n_0)(\bar{\mathfrak{q}}) = z_J(n_0\bar{\mathfrak{q}}) = z_J(\mathfrak{p}).$$

Damit ergibt sich die Behauptung.

§ 3.

Das Klassenkörper-Zerlegungsgesetz für den n-Teilungskörper.

Es mögen nach wie vor die zu Beginn von § 2 gemachten Voraussetzungen a), b), c) gelten.

1. Wir betrachten die n-Klasseneinteilung der rationalen Punkte $\mathfrak{p}$ von K/Ω:

$$\mathfrak{p}' \underset{n}{\sim} \mathfrak{p}, \text{ wenn } \mathfrak{p}' \sim \mathfrak{p}\,C^n \text{ mit einer rationalen Klasse } C \text{ von } K/\Omega.$$

Die n-Klassen der $\mathfrak{p}$ sind die Nebengruppen ersten Grades zur Untergruppe D^n der rationalen Nullklassengruppe D von K/Ω; erst ihre Quotienten bilden die Faktorgruppe D/D^n. Im Hinblick auf die Definition des Meromorphismus n_0, nach der

$$\mathfrak{p} = n_0\,\bar{\mathfrak{q}} \quad \text{gleichbedeutend mit} \quad \frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{o}} \sim \left(\frac{\bar{\mathfrak{q}}}{\mathfrak{o}}\right)^n$$

ist, denken wir uns die Faktorgruppe D/D^n durch die n-Klassen der Quotienten $\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{o}}$ repräsentiert. Ist $\bar{\mathfrak{q}}, \bar{\mathfrak{q}}'$ ein Lösungspaar von $\mathfrak{p} = n_0 \bar{\mathfrak{q}}$, $\mathfrak{p}' = n_0 \bar{\mathfrak{q}}'$, so bedeutet $\mathfrak{p}' \underset{n}{\sim} \mathfrak{p}$, daß $\bar{\mathfrak{q}}' \sim \bar{\mathfrak{q}} C J$ mit einer rationalen Klasse C und einer n-Teilungsklasse J von K/Ω ist; wegen der vorausgesetzten Rationalität der J folgt daraus $\Omega(\bar{\mathfrak{q}}') = \Omega(\bar{\mathfrak{q}})$, d. h. $\Omega_{\mathfrak{p}'} = \Omega_{\mathfrak{p}}$. Ferner ist dann und nur dann $\mathfrak{p} = n_0 \mathfrak{q}$ mit rationalem $\mathfrak{q}$, wenn $\mathfrak{p} \underset{n}{\sim} \mathfrak{o}$ ist. Damit haben wir schon folgende beiden Teilaussagen eines Klassenkörper-Zerlegungsgesetzes für K/Kn:

Der Restklassenkörper $\Omega_{\mathfrak{p}}$ hängt nur von der n-Klasse von $\mathfrak{p}$ ab.

Dann und nur dann ist $\mathfrak{p} n_0$ voll-zerlegt, wenn $\mathfrak{p} \underset{n}{\sim} \mathfrak{o}$ ist.

Die letztere Aussage kann nach dem Kummer-Zerlegungsgesetz aus § 2 auch so ausgesprochen werden:

(1) $\quad z_J(\mathfrak{p}) \underset{n}{=} 1$ *in Ω (für alle J) ist gleichbedeutend mit* $\mathfrak{p} \underset{n}{\sim} \mathfrak{o}$.

2. Wir beweisen jetzt darüber hinaus:

Klassenkörper-Zerlegungsgesetz für den n-Teilungskörper. *Das n-Klassensystem der Kummer-Erzeugenden $z_J(\mathfrak{p})$ in Ω des Restklassenkörpers $\Omega_{\mathfrak{p}}/\Omega$ der Primdivisoren von K/Ω, die in einem Primdivisor ersten Grades $\mathfrak{p} n_0$ von Kn/Ω aufgehen, entspricht umkehrbar eindeutig der n-Klasse von $\mathfrak{p}$:*

(2) $\quad z_J(\mathfrak{p}') \underset{n}{=} z_J(\mathfrak{p})$ *in Ω (für alle J) ist gleichbedeutend mit* $\mathfrak{p}' \underset{n}{\sim} \mathfrak{p}$.

Diese eineindeutige Zuordnung wird gegeben durch das Formelsystem:

(3) $$z_J \tau_P \underset{n}{=} z_J(\mathfrak{p}) \cdot z_J \quad \text{in} \quad K,$$

wo P die Klasse von $\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{o}}$ bezeichnet, und sie ist ein Isomorphismus zwischen der Faktorgruppe D/D^n, repräsentiert durch die n-Klassen PD^n der $\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{o}}$, und der Multiplikationsgruppe Z_n der n-Klassensysteme der $z_J(\mathfrak{p})$ in Ω.

Beweis. Da z_J die n-te Potenz eines Divisors nullten Grades von K/Ω ist, und da die Translation τ_P die Nullklassen von K/Ω invariant läßt, hat man

$$z_J \tau_P \cong z_J \cdot c_{J,P}^n$$

mit Faktoren $c_{J,P} \neq 0$ aus K, also

$$z_J \tau_P = \gamma_{J,P} \cdot z_J \cdot c_{J,P}^n \underset{n}{=} \gamma_{J,P} \cdot z_J \quad \text{in } K$$

mit Faktoren $\gamma_{J,P} \neq 0$ aus Ω. Diese Faktoren bestimmen sich durch Restbildung mod. $\mathfrak{o}$. Links ist nach der Restformel § 1, (2)

$$(z_J \tau_P)(\mathfrak{o}) = z_J(\tau_P \mathfrak{o}) = z_J(\mathfrak{p}).$$

Rechts ist nach (1)

$$z_J(\mathfrak{o}) \underset{n}{=} 1 \text{ in } \Omega.$$

Man beachte hierbei, daß z_J gleichzeitig zu $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{o}$ prim normiert werden kann. Damit ergibt sich

$$\gamma_{J,P} \underset{n}{=} z_J(\mathfrak{p}) \text{ in } \Omega,$$

also (3). Demnach ist $\tau_P \to z_J(\mathfrak{p})$ ein Homomorphismus der Translationsgruppe $\mathfrak{T}$ der τ_P auf die Multiplikationsgruppe Z_n der n-Klassensysteme der $z_J(\mathfrak{p})$ in Ω. Durch Vorfügung des Isomorphismus $P \to \tau_P$ von D auf $\mathfrak{T}$ entsteht ein Homomorphismus $P \to z_J(\mathfrak{p})$ von D auf Z_n. Nach (1) ist dieser ein Isomorphismus von D/D^n auf Z_n. Damit ist die behauptete Isomorphieaussage und insbesondere auch die Eineindeutigkeitsaussage (2) bewiesen.

3. Es ist interessant zu bemerken, daß in Weils analytischem Beweis seines Endlichkeitssatzes das Formelsystem (3) für ($n = 2$) aus dem Satz über die Vertauschung von Argument und Parameter (hier $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{o}$) in den Elementarintegralen dritter Gattung gefolgert wird. Unsere einfache Schlußweise ist also als die Algebraisierung dieses Satzes anzusehen. Allgemeiner als (3) gilt übrigens nach dem Beweis das Formelsystem:

$$z_J \tau_{\frac{P}{P'}} \underset{n}{=} \frac{z_J(\mathfrak{p})}{z_J(\mathfrak{p}')} \cdot z_J \text{ in } K, \tag{3'}$$

in dem der feste Punkt $\mathfrak{o}$ mit $z_J(\mathfrak{o}) \underset{n}{=} 1$ in Ω durch einen beliebigen rationalen Punkt $\mathfrak{p}'$ von K/Ω ersetzt ist und $\frac{P}{P'}$ die Klasse von $\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}'}$ ist.

Wir bemerken ferner, daß das gewonnene Klassenkörper-Zerlegungsgesetz in seiner Isomorphieaussage den Typus des Artinschen Reziprozitätsgesetzes aus der algebraischen Zahlentheorie hat. An Stelle des dortigen Frobenius-Automorphismus tritt hier das Kummer-Erzeugendensystem $z_J(\mathfrak{p})$ von $\Omega_{\mathfrak{p}}/\Omega$, das aus dem festen Kummer-Erzeugendensystem $z_J\,\mathfrak{n}_0$ von $K/K\mathfrak{n}$ durch Restbildung nach dem zu zerlegenden Primdivisor $\mathfrak{p}\mathfrak{n}_0$ entsteht. Die durch (3) mit dem System $z_J(\mathfrak{p})$ verknüpfte Translation τ_P kann allerdings nicht als das formale Analogon des Frobenius-Automorphismus angesehen werden, weil sie zwar ein Automorphismus von K/Ω, aber im allgemeinen kein Automorphismus des betrachteten Relativkörpers $K/K\mathfrak{n}$ ist. Um dies genaue formale Analogon des Frobenius-Automorphismus zu erhalten, hätte man vielmehr die Zerlegungsgruppe von $\mathfrak{p}\mathfrak{n}_0$, als Untergruppe der Galoisgruppe $\mathfrak{T}_n$ von $K/K\mathfrak{n}$, durch die Translationen τ_J darzustellen und dann, vermöge des verschränkten Produktes mit dem Faktorensystem 1 von $K/K\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{T}_n$, von den $z_J\,\mathfrak{n}_0$ zu den τ_J überzugehen. Dies wäre noch im einzelnen auszuführen, etwa unter Benutzung der Ergebnisse von Teichmüller[13]).

[13]) O. Teichmüller, Verschränkte Produkte mit Normalringen, Multiplikation zyklischer Normalringe. Deutsche Math. 1 (1936).

Da der Satz von der Vertauschung von Argument und Parameter in den Elementarintegralen dritter Gattung ein ganz allgemeines Theorem der analytischen Theorie der algebraischen Funktionen ist, möchte ich auf Grund der vorstehenden beiden Bemerkungen glauben, daß seine rein-algebraische Formulierung und Ausdeutung zu einem ganz allgemeinen Reziprozitätsgesetz Artinscher Art für abelsche Erweiterungen algebraischer Funktionenkörper führen wird, von dem das hier mitgeteilte Ergebnis nur ein einfacher Spezialfall ist (Geschlecht 1, unverzweigte Erweiterung). Ein weiterer Spezialfall, der ebenfalls in diese Richtung weist, liegt in der bereits in allen Einzelheiten bekannten Klassenkörpertheorie der abelschen Erweiterungen von K/Ω bei endlichem Ω vor.

§ 4.

Der Mordell-Weilsche Endlichkeitssatz.

Es sei jetzt Ω ein endlich-algebraischer Zahlkörper. Der zu beweisende Satz lautet:

Die rationale Nullklassengruppe D von K/Ω hat endlichen Rang.

1. Aus dem in § 3 bewiesenen Zerlegungsgesetz für den n-Teilungskörper folgern wir mittels der in A, § 9 gegebenen Darstellung der Distributionslehre zunächst die folgende schwächere Endlichkeitsaussage:

Besitzt K/Ω einen rationalen Punkt und sind die n-Teilungsklassen von K/Ω rational, so ist die Faktorgruppe D/D^n endlich.

Beweis. Nach dem Klassenkörper-Zerlegungsgesetz für $K/K\,n$ ist D/D^n isomorph zur Multiplikationsgruppe der n-Klassensysteme der $z_J(\mathfrak{p})$ in Ω, wo $\mathfrak{p}$ die rationalen Punkte von K/Ω durchläuft. Es genügt demnach zu zeigen, daß die $z_J(\mathfrak{p})$ nur endlich viele n-Klassen in Ω durchlaufen. Dabei können wir die ursprüngliche Normierung:

$$z_J \cong \left(\frac{\mathfrak{i}}{\mathfrak{o}}\right)^n$$

aus § 2 zugrunde legen, weil es auf die endlich vielen $\mathfrak{p} = \mathfrak{i}$ (zu denen auch $\mathfrak{o}$ gehört) nicht ankommt. Für $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{i}$ folgt aus dem Hauptsatz der Distributionslehre (A, § 9, 7):

$$z_J(\mathfrak{p}) \doteq \left(\frac{\mathfrak{i}(\mathfrak{p})}{\mathfrak{o}(\mathfrak{p})}\right)^n.$$

Dabei seien die Distributionen $\mathfrak{i}(\mathfrak{p})$ [zu denen auch $\mathfrak{o}(\mathfrak{p})$ gehört] auf Grund der Endlichkeit der Divisorenklassenanzahl von Ω zahlnormiert. Dann bedeutet dieses System von Distributionsgleichungen ein System von Zahlgleichungen:

$$z_J(\mathfrak{p}) = \varepsilon_{J,\mathfrak{p}}\,\gamma_{J,\mathfrak{p}} \left(\frac{\mathfrak{i}(\mathfrak{p})}{\mathfrak{o}(\mathfrak{p})}\right)^n,$$

mit Zahlfaktoren $\gamma_{J,\mathfrak{p}} \neq 0$ aus Ω, die einem endlichen Vorrat angehören, und Einheitsfaktoren $\varepsilon_{J,\mathfrak{p}}$ aus Ω. Wegen der Endlichkeit des Einheitenranges von Ω ist auch die Anzahl der durch Einheiten gelieferten n-Klassen in Ω endlich. Daher durchlaufen die $z_J(\mathfrak{p})$ in der Tat nur endlich viele n-Klassen in Ω.

2. Gestützt auf die damit bewiesene schwächere Endlichkeitsaussage wird der Beweis des Endlichkeitssatzes selbst nach dem klassischen Verfahren der descente infinie geführt. Da mit einer abelschen Gruppe auch jede Untergruppe endlichen Rang hat, können wir für diesen Beweis, auf Grund einer endlich-algebraischen Konstantenerweiterung von K/Ω, ohne Einschränkung voraussetzen, daß K/Ω einen rationalen Punkt $\mathfrak{o}$ besitzt, und daß für eine feste natürliche Zahl $n > 1$ (es genügt $n = 2$) die n-Teilungsklassen von K/Ω rational sind, so daß also D/D^n endlich ist. Es gibt dann ein endliches System R von rationalen Punkten $\mathfrak{r}$ von K/Ω derart, daß die Brüche $\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{o}}$ die endlich vielen Klassen von D/D^n repräsentieren. Wir denken R so gewählt, daß die n-Hauptklasse D^n durch $\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{o}} = 1$ und zueinander reziproke n-Klassen durch Paare $\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{o}}, \frac{\bar{\mathfrak{r}}}{\mathfrak{o}}$ mit $\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{o}}\,\frac{\bar{\mathfrak{r}}}{\mathfrak{o}} \sim 1$ repräsentiert werden. Zu jedem rationalen Punkt $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0$ von K/Ω gibt es dann eine unendliche Folge rationaler Punkte $\mathfrak{p}_i$ von K/Ω derart, daß

$$\mathfrak{p}_{i-1} \sim \left(\frac{\mathfrak{p}_i}{\mathfrak{o}}\right)^n \mathfrak{r}_{i-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

mit $\mathfrak{r}_i$ aus R gilt. Dabei ist $\mathfrak{p}_i$ durch $\mathfrak{p}_{i-1}$ nur bis auf eine Translation um eine willkürliche n-Teilungsklasse festgelegt; wir arbeiten mit irgendeiner festen Wahl der $\mathfrak{p}_i$ zu $\mathfrak{p}$. Zusammengezogen hat man

$$\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{o}} \sim \left(\frac{\mathfrak{p}_k}{\mathfrak{o}}\right)^{n^k} \left(\frac{\mathfrak{r}_{k-1}}{\mathfrak{o}}\right)^{n^{k-1}} \cdots \left(\frac{\mathfrak{r}_1}{\mathfrak{o}}\right)^n \frac{\mathfrak{r}_0}{\mathfrak{o}} \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Entweder ist nun einmal $\left(\frac{\mathfrak{p}_k}{\mathfrak{o}}\right)^n \sim 1$. In diesem Falle gehört die Klasse von $\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{o}}$ zu der aus $\frac{R}{\mathfrak{o}}$ erzeugten Gruppe. Oder aber es sind alle $\left(\frac{\mathfrak{p}_i}{\mathfrak{o}}\right)^n \not\sim 1$, so daß kein $\mathfrak{p}_{i-1}$ zu R gehört; wegen der besonderen Wahl von R sind dann alle $\mathfrak{p}_{i-1} \neq \mathfrak{o}, \mathfrak{r}_{i-1}, \bar{\mathfrak{r}}_{i-1}$. In diesem Falle zeigen wir, daß es ein (von $\mathfrak{p}$ abhängiges) $k_0(\mathfrak{p})$ derart gibt, daß $\mathfrak{p}_k$ mit $k \geqq k_0(\mathfrak{p})$ einem von $\mathfrak{p}$ unabhängigen endlichen Vorrat P angehört. In jedem Falle gehört demnach die Klasse von $\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{o}}$ zu der aus $\frac{R}{\mathfrak{o}}$ und $\frac{P}{\mathfrak{o}}$ erzeugten Gruppe, d. h. die Gruppe D wird durch die endlich vielen Repräsentanten aus $\frac{R}{\mathfrak{o}}$ und $\frac{P}{\mathfrak{o}}$ erzeugt, hat also endlichen Rang.

3. Der Hauptschluß bei dieser descente infinie, nämlich der Nachweis der Endlichkeit des Vorrats P für $\mathfrak{p}_k$ im zweiten Falle, wird dadurch erbracht, daß für eine Beziehung vom Typus (1):

$$(3) \qquad \mathfrak{p} \sim \left(\frac{\mathfrak{p}'}{\mathfrak{o}}\right)^n \mathfrak{r} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{p} \neq \mathfrak{o}, \mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}}$$

die homogenen Koordinaten von $\mathfrak{p}'$ ihrer Höhe nach durch die homogenen Koordinaten von $\mathfrak{p}$ abgeschätzt werden. Dieser Teil unseres Beweises unterscheidet sich von dem entsprechenden Teil bei Mordell und Weil durch eine der Sachlage besser angepaßte Wahl der Koordinaten. Wir bilden nämlich die Koordinaten nicht mittels der Weierstrassschen Normalform der Erzeugung von K/Ω, was im Sinne von A, § 3 der Klasse von $\mathfrak{o}^3$ entspricht, sondern mittels der Klasse N von $\mathfrak{o}^{n^2}$. Der Grad n^2 dieser Klasse N erfüllt die in A, § 3, **3** geforderte Ungleichung: $n^2 \geqq 2^2 = 4 = 3g + 1$. Eine für unseren Zweck geeignete homogene N-Basis erhalten wir aus der Theorie des n-Teilungskörpers. Eine solche muß aus $\dim N = n^2$ Elementen bestehen. Nach dem Beweis des Kummer-Zerlegungsgesetzes in § 2 sind nun die dortigen n^2 Elemente

$$w_J \cong \frac{\mathfrak{i}\, \mathfrak{n}_0}{\mathfrak{o}\, \mathfrak{n}_0}$$

linear-unabhängig über K_n, also sicher über Ω. Diese Elemente bilden eine N-Basis. Denn nach der Definition von $\mathfrak{n}_0$ sind die $\mathfrak{i}$ die Lösungen von $\mathfrak{n}_0 \mathfrak{i} = \mathfrak{o}$. Daher ist $\mathfrak{o}\,\mathfrak{n}_0 = \prod\limits_{\mathfrak{i}} \mathfrak{i}$. Weil nun die Gruppe D_n der J den Typus (n, n) hat, gilt $\prod\limits_J J = 1$, also $\prod\limits_{\mathfrak{i}} \mathfrak{i} \sim \mathfrak{o}^{n^2}$, und somit in der Tat $\mathfrak{o}\,\mathfrak{n}_0 \sim \mathfrak{o}^{n^2}$. Wegen dieser Äquivalenz gibt es in K ein Element

$$t \cong \frac{\mathfrak{o}\,\mathfrak{n}_0}{\mathfrak{o}^{n^2}}\,.$$

Wir legen dann für unseren Zweck vorteilhafter folgende Normierung der homogenen N-Basis w_J zugrunde:

$$x_J = t\, w_J \cong \frac{\mathfrak{i}\,\mathfrak{n}_0}{\mathfrak{o}^{n^2}}\,.$$

Bei ihr ist nämlich die N-Basis x_J primitiv für alle $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{o}$. Ist also $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{o}$, so gilt nach A, § 9, 8 für die Höhe der homogenen n-Koordinaten von $\mathfrak{p}$ die Formel:

$$(4) \qquad H_x(\mathfrak{p}) \doteq |N(\mathfrak{o}(\mathfrak{p}))|^{n^2} \cdot N(\operatorname*{Max}_J |x_J(\mathfrak{p})|).$$

4. Mittels dieser Formel schätzen wir nunmehr bei Bestehen einer Beziehung (3) die Koordinaten von $\mathfrak{p}'$ durch die von $\mathfrak{p}$ ab. Wir schreiben dazu (3) in der Form:

$$(3') \qquad \mathfrak{p} = \varrho\, \mathfrak{n}_0 \mathfrak{p}' \quad \text{mit} \quad \mathfrak{p} \neq \mathfrak{o}, \mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}},$$

wo ϱ die Translation um die Klasse von $\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{o}}$ bezeichnet, und zerlegen diese Beziehung in zwei Einzelschritte, die Multiplikation n_0 und die Translation ϱ.

a) *Koordinatenabschätzung bei der Multiplikation.* Die zu betrachtende Beziehung lautet:

$$\mathfrak{p} = n_0\,\mathfrak{p}' \quad \text{mit} \quad \mathfrak{p} \neq \mathfrak{o}. \tag{3a}$$

Wir drücken die Basis x_J von $\left\{\frac{1}{\mathfrak{o}^{n^2}}\right\}$ in K durch die meromorph zugeordnete Basis $x_J\,n_0$ von $\left\{\frac{1}{(\mathfrak{o}\,n_0)^{n^2}}\right\}$ in Kn aus. Es ist

$$w_J^n = z_J\,n_0 \simeq \left(\frac{\mathfrak{i}\,n_0}{\mathfrak{o}\,n_0}\right)^n.$$

Hiernach besteht ein Gleichungssystem:

$$w_J^{n^2} = (z_J\,n_0)^n = \sum_{J'} \alpha_{J,J'} \cdot x_{J'}\,n_0$$

mit Koeffizienten $\alpha_{J,J'}$ aus Ω. Multiplikation mit t^{n^2} liefert das Gleichungssystem:

$$x_J^{n^2} = t^{n^2} \sum_{J'} \alpha_{J,J'} \cdot x_{J'}\,n_0,$$

das die N-Basis x_J durch die meromorph zugeordnete $N n_0$-Basis $x_J\,n_0$ ausdrückt. Dies Gleichungssystem ist auch an sich interessant, als eine algebraisch-durchsichtige homogene Erzeugung des n-Teilungskörpers K/Kn. Wir gehen zu den Resten mod. $\mathfrak{p}'$ über. Nach der Restformel § 1, (2) und nach (3a) ist

$$(x_J\,n_0)(\mathfrak{p}') = x_J(n_0\,\mathfrak{p}') = x_J(\mathfrak{p}).$$

Damit ergibt sich das Gleichungssystem:

$$x_J(\mathfrak{p}')^{n^2} = t(\mathfrak{p}')^{n^2} \sum_{J'} \alpha_{J,J'}\,x_{J'}(\mathfrak{p}),$$

das die homogenen N-Koordinaten von $\mathfrak{p}'$ durch die von $\mathfrak{p}$ ausdrückt; man beachte dabei, daß wegen $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{o}$ auch $\mathfrak{p}' \neq \mathfrak{o}$ ist, so daß die auftretenden Reste $\neq \infty$ sind. Aus diesem Gleichungssystem folgt eine Abschätzung:

$$N\left(\operatorname*{Max}_J |x_J(\mathfrak{p}')|\right)^{n^2} \leqq A \cdot |N(t(\mathfrak{p}'))|^{n^2} \cdot N\left(\operatorname*{Max}_J |x_J(\mathfrak{p})|\right) \tag{5a}$$

mit einer durch die Koeffizienten $\alpha_{J,J'}$ bestimmten, also von $\mathfrak{p}$ unabhängigen positiven Zahl A. Aus $t \simeq \frac{\mathfrak{o}\,n_0}{\mathfrak{o}^{n^2}}$ folgt nun nach dem Hauptsatz der Distributionslehre:

$$t(\mathfrak{p}') \doteq \frac{(\mathfrak{o}\,n_0)(\mathfrak{p}')}{\mathfrak{o}(\mathfrak{p}')^{n^2}}.$$

Darin ist nach der Restformel § 1, (3) und nach (3a)

$$(\mathfrak{o}\,n_0)(\mathfrak{p}') \doteq \mathfrak{o}(n_0\,\mathfrak{p}') = \mathfrak{o}(\mathfrak{p}).$$

Demnach ist

$$t(\mathfrak{p}') \doteq \frac{\mathfrak{o}(\mathfrak{p})}{\mathfrak{o}(\mathfrak{p}')^{n^2}},$$

und somit (im Sinne von A, § 9, 8)

$$|N(t(\mathfrak{p}'))| \doteq \frac{|N(\mathfrak{o}(\mathfrak{p}))|}{|N(\mathfrak{o}(\mathfrak{p}'))|^{n^2}}. \tag{6a}$$

Aus (5a) und (6a) folgt nach (4) eine Abschätzung:

$$H_x(\mathfrak{p}') \leqq C \cdot H_x(\mathfrak{p})^{\frac{1}{n^2}} \tag{7a}$$

mit einer von $\mathfrak{p}$ unabhängigen positiven Zahl C.

b) *Koordinatenabschätzung bei der Translation.* Die zu betrachtende Beziehung lautet:

$$\mathfrak{p} = \varrho\mathfrak{p}' \quad \text{mit} \quad \mathfrak{p} \neq \mathfrak{o}, \mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}}, \tag{3b}$$

wo ϱ die Translation um die Klasse von $\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{o}}$ ist. Der Beziehung $\mathfrak{o}\,\varrho^{-1} = \varrho\,\mathfrak{o} = \mathfrak{r}$ entsprechend drücken wir hier die durch den Isomorphismus ϱ^{-1} entstehende Basis $x_J\varrho^{-1}$ von $\left\{\frac{1}{\mathfrak{r}^{n^2}}\right\}$ durch die Basis x_J von $\left\{\frac{1}{\mathfrak{o}^{n^2}}\right\}$ aus. Wegen $\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{o}}\,\frac{\bar{\mathfrak{r}}}{\mathfrak{o}} \sim 1$ gibt es in K ein Element

$$u \cong \frac{\mathfrak{o}^2}{\mathfrak{r}\bar{\mathfrak{r}}}.$$

Es ist dann

$$\frac{1}{u^{n^2}}\left\{\frac{1}{\mathfrak{r}^{n^2}}\right\} \leqq \left\{\frac{1}{\mathfrak{o}^{2n^2}}\right\} = \left(\frac{1}{\mathfrak{o}^{n^2}}\right)^2,$$

letzteres nach dem Hilfssatz in A, § 2, 2. Hiernach besteht ein Gleichungssystem:

$$x_J\,\varrho^{-1} = u^{n^2} \sum_{J', J''} \alpha_{J, J', J''}\, x_{J'}\, x_{J''}$$

mit Koeffizienten $\alpha_{J, J', J''}$ aus Ω, das die durch den Isomorphismus ϱ^{-1} entstehende $N\varrho^{-1}$-Basis $x_J\varrho^{-1}$ durch die N-Basis x_J ausdrückt. Wir gehen zu den Resten mod. $\mathfrak{p}$ über. Nach der Restformel § 1, (2) und nach (3b) ist

$$(x_J\varrho^{-1})(\mathfrak{p}) = x_J(\varrho^{-1}\mathfrak{p}) = x_J(\mathfrak{p}').$$

Damit ergibt sich das Gleichungssystem:

$$x_J(\mathfrak{p}') = u(\mathfrak{p})^{n^2} \sum_{J', J''} \alpha_{J, J', J''}\, x_{J'}(\mathfrak{p})\, x_{J''}(\mathfrak{p}),$$

das die homogenen N-Koordinaten von $\mathfrak{p}'$ durch die von $\mathfrak{p}$ ausdrückt; man beachte dabei, daß wegen $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{o}, \mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}}$ die auftretenden Reste $\neq \infty$ sind. Aus diesem Gleichungssystem folgt eine Abschätzung:

$$N(\operatorname*{Max}_J |x_J(\mathfrak{p}')|) \leqq A_{\mathfrak{r}} \cdot |N(u(\mathfrak{p}))|^{n^2} \cdot N(\operatorname*{Max}_J |x_J(\mathfrak{p})|)^2 \tag{5b}$$

mit einer durch die Koeffizienten $\alpha_{J,J',J''}$ bestimmten, also nur von $\mathfrak{r}$, nicht von $\mathfrak{p}$ abhängigen positiven Zahl $A_{\mathfrak{r}}$. Aus $u \cong \frac{\mathfrak{o}^2}{\mathfrak{r}\bar{\mathfrak{r}}}$ folgt nun nach dem Hauptsatz der Distributionslehre:

$$u(\mathfrak{p}) \doteq \frac{\mathfrak{o}(\mathfrak{p})^2}{\mathfrak{r}(\mathfrak{p})\,\bar{\mathfrak{r}}(\mathfrak{p})}.$$

Darin ist nach der Restformel § 1, (3) und nach (3b)

$$\mathfrak{r}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{o}\,\varrho^{-1}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{o}(\varrho^{-1}\mathfrak{p}) = \mathfrak{o}(\mathfrak{p}').$$

Demnach ist

$$u(\mathfrak{p}) \doteq \frac{1}{\bar{\mathfrak{r}}(\mathfrak{p})} \cdot \frac{\mathfrak{o}(\mathfrak{p})^2}{\mathfrak{o}(\mathfrak{p}')};$$

da $\bar{\mathfrak{r}}(\mathfrak{p})$ wesentlich ganz ist, also beschränkten Nenner hat (A, § 9, 7), folgt hieraus

(6b) $$|N(u(\mathfrak{p}))| \leqq B_{\mathfrak{r}} \frac{|N(\mathfrak{o}(\mathfrak{p}))|^2}{|N(\mathfrak{o}(\mathfrak{p}'))|}$$

mit einer nur von $\mathfrak{r}$, nicht von $\mathfrak{p}$ abhängigen positiven Zahl $B_{\mathfrak{r}}$. Aus (5b) und (6b) folgt nach (4) eine Abschätzung:

(7b) $$H_x(\mathfrak{p}') \sim C_{\mathfrak{r}} \cdot H_x(\mathfrak{p})^2$$

mit einer nur von $\mathfrak{r}$, nicht von $\mathfrak{p}$ abhängigen positiven Zahl $C_{\mathfrak{r}}$.

Aus den für die speziellen Beziehungen (3a), (3b) gewonnenen Abschätzungen (7a), (7b) ergibt sich für die allgemeine Beziehung (3′), d. h. (3), durch Zusammensetzung:

$$H_x(\mathfrak{p}') \leqq C \cdot H_x(n_0\,\mathfrak{p}')^{\frac{1}{n^2}} \leqq C\,C_{\mathfrak{r}}^{\frac{1}{n^2}} \cdot H_x(\mathfrak{p})^{\frac{2}{n^2}}.$$

Bei der Beziehungskette (1) gilt demnach, weil die $\mathfrak{r}_i$ dem endlichen Repräsentantensystem R entnommen sein sollen, eine Abschätzung:

$$H_x(\mathfrak{p}_i) \leqq C_R \cdot H_x(\mathfrak{p}_{i-1})^{\frac{2}{n^2}}$$

mit einer nur von R, nicht von $\mathfrak{p}$ abhängigen positiven Zahl C_R. Daraus folgt für die Beziehung (2) durch Zusammensetzung:

$$H_x(\mathfrak{p}_k) \leqq C_R^{1+\frac{2}{n^2}+\cdots+\left(\frac{2}{n^2}\right)^{k-1}} \cdot H_x(\mathfrak{p})^{\left(\frac{2}{n^2}\right)^k},$$

also

$$H_x(\mathfrak{p}_k) < C_R^{\frac{n^2}{n^2-2}} \cdot H_x(\mathfrak{p})^{\left(\frac{2}{n^2}\right)^k}.$$

Wegen $n^2 \geqq 2^2 > 2$ gibt es hiernach ein $k_0(\mathfrak{p})$ derart, daß

$$H_x(\mathfrak{p}) \leqq C_R^{\frac{n^2}{n^2-2}} + 1 \text{ für alle } k \geqq k_0(\mathfrak{p}).$$

Für $k \geqq k_0(\mathfrak{p})$ ist demgemäß die Höhe der homogenen N-Koordinaten von $\mathfrak{p}_k$ unabhängig von $\mathfrak{p}$ beschränkt. Die $\mathfrak{p}_k$ in (2) gehören somit für $k \geqq k_0(\mathfrak{p})$ einem von $\mathfrak{p}$ unabhängigen endlichen Vorrat P an. Damit ist nach dem schon Gesagten der Endlichkeitssatz bewiesen.

(Eingegangen am 5. Oktober 1941.)