Werk

Titel: Mathematische Zeitschrift

Ort: Berlin

Jahr: 1942

Kollektion: Mathematica

Werk Id: PPN266833020_0048

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN266833020_0048|LOG_0009

Der n-Teilungskörper eines abstrakten elliptischen Funktionenkörpers als Klassenkörper, nebst Anwendung auf den Mordell-Weilschen Endlichkeitssatz.

Herrn KONRAD KNOPP
zum 60. Geburtstag am 22. Juli 1942 gewidmet.

Von

Helmut Hasse aus Göttingen, z. Z. in Berlin.

Inhalt.

Einleitung.

Wir betrachten einen algebraischen Funktionenkörper K einer Unbestimmten vom Geschlecht $g = 1$ über einem vollkommenen Konstantenkörper Ω.

In einigen meiner früheren Arbeiten[1]), sowie in zwei Arbeiten von DEURING[2]), die sich zur Hauptsache mit dem Beweis der RIEMANNschen Vermutung im Falle eines endlichen Ω befassen, spielt der μ-Teilungskörper K/K_μ von K/Ω, wo μ ein beliebiger Multiplikator von K/Ω ist, eine wichtige Rolle. Allerdings handelt es sich dort genauer um den μ-Teilungskörper $\overline{K}/\overline{K}_\mu$ der algebraisch-abgeschlossenen Konstantenerweiterung $\overline{K}/\overline{\Omega}$ von K/Ω[3]); die ganze Theorie wird nämlich in diesen Arbeiten, ehe die Anwendung auf endliches Ω erfolgt, zunächst für algebraisch-abgeschlossenes Ω entwickelt.

---

1) H. HASSE, Zur Theorie der abstrakten elliptischen Funktionenkörper I, II, III. J. reine angew. Math. **175** (1936); im folgenden zitiert mit H I, II, III.

2) M. DEURING, Arithmetische Theorie der Korrespondenzen algebraischer Funktionenkörper I, II. J. reine angew. Math. **177** (1937); **183** (1940); im folgenden zitiert mit D I, II.

3) Ich verwende ohne nochmalige Erklärung eine Reihe von Begriffsbildungen und Ausdrucksweisen, wie ich sie in einer im Druck befindlichen Arbeit entwickelt habe: H. HASSE, Zur arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionenkörper. Jahresber. Deutsche Math.-Ver. **52** (1942); im folgenden zitiert mit A.

Im Falle, daß der Grad $N(\mu)$ des μ-Teilungskörpers $\overline{K}/\overline{K}\mu$ nicht durch die Charakteristik von Ω teilbar ist, erweist sich $\overline{K}/\overline{K}\mu$, wie wir unten noch einmal näher ausführen werden, als unverzweigt und abelsch, mit der Gruppe der Translationen um die μ-Teilungsklassen als Galois-Gruppe, und mit dem folgenden einfachen Zerlegungsgesetz: Jeder Primdivisor $\bar{\mathfrak{p}}\mu$ von $\overline{K}\mu/\overline{\Omega}$ zerfällt in $N(\mu)$ verschiedene Primdivisoren $\mathfrak{q}$ von $\overline{K}/\overline{\Omega}$, nämlich in die $N(\mu)$ Lösungen von $\mu\bar{\mathfrak{q}} = \bar{\mathfrak{p}}$.

Es ist nun von Interesse zu fragen, welches Zerlegungsgesetz im μ-Teilungskörper $K/K\mu$ von K/Ω selbst gilt, wenn nur Ω von vornherein so umfassend vorausgesetzt wird, daß $K/K\mu$ galoissch und damit abelsch ist; die letztere Voraussetzung kann durch eine endlich-algebraische Konstantenerweiterung verwirklicht werden. Zu dieser Frage stellen wir folgende allgemeine Bemerkung voran.

In der Theorie der endlich-algebraischen Zahlkörper sind die Restklassenkörper der Primdivisoren endliche Körper und als solche durch alleinige Angabe ihres Grades gekennzeichnet. Daher genügt in dieser Theorie zur Beschreibung eines Zerlegungsgesetzes für einen galoisschen Relativkörper (von den endlich vielen verzweigten Primdivisoren abgesehen) die Angabe des gemeinsamen Relativgrades der Primfaktoren für jeden Primdivisor des Grundkörpers. In der Theorie der algebraischen Funktionenkörper über einem Körper Ω sind die Restklassenkörper der Primdivisoren endlich-algebraische Erweiterungen von Ω, also nicht mehr durch alleinige Angabe ihres Grades gekennzeichnet. Daher genügt hier zur Beschreibung eines Zerlegungsgesetzes nicht mehr die bloße Angabe des Relativgrades der Primfaktoren; es müssen vielmehr ihre Restklassenkörper selbst als Relativkörper über Ω angegeben werden. Für einen galoisschen (abelschen) Relativkörper sind diese Restklassenkörper selbst galoissch (abelsch) über Ω und hängen nur von dem Primdivisor des Grundkörpers ab (Theorie der Zerlegungsgruppe).

Wir begnügen uns im folgenden mit dem Studium der Zerlegung der Primdivisoren ersten Grades $\mathfrak{p}\mu$ von $K\mu/\Omega$. Die $\mathfrak{p}\mu$ zusammensetzenden Primdivisoren $\mathfrak{q}$ von K/Ω ergeben sich, indem man die Lösungen $\bar{\mathfrak{q}}$ von $\mu\bar{\mathfrak{q}} = \mathfrak{p}$ in $\overline{K}/\overline{\Omega}$ zu vollständigen Systemen in bezug auf Ω konjugierter zusammenfaßt. Es handelt sich dann um die Angabe des nur von $\mathfrak{p}$ abhängigen Restklassenkörpers

$$\Omega_{\mathfrak{p}} = \Omega(\mathfrak{q}) = \Omega(\bar{\mathfrak{q}}),$$

der durch Adjunktion der Reste der Elemente aus K für irgendein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges $\mathfrak{q}$ (oder — was wesentlich dasselbe — für irgendein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges $\bar{\mathfrak{q}}$) zu Ω entsteht. Ein Zerlegungsgesetz für die Primdivisoren ersten Grades $\mathfrak{p}\mu$ von $K\mu/\Omega$ muß diese Restklassenkörper $\Omega_{\mathfrak{p}}$ durch Eigenschaften von $\mathfrak{p}$ kennzeichnen.

Wir werden nun im folgenden ein solches Zerlegungsgesetz für den Fall eines natürlichen Multiplikators $\mu = n$ herleiten, und zwar wird sich zeigen, daß in diesem Falle ein umkehrbar eindeutiger und isomorpher Zusammenhang zwischen der Kummer-Erzeugung des Restklassenkörpers $\Omega_\mathfrak{p}$ und der n-Klasse des Primdivisors $\mathfrak{p}$ besteht. Dabei werden zwei Primdivisoren ersten Grades $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$ von K/Ω dann und nur dann zur gleichen n-Klasse gerechnet, wenn die von $\frac{\mathfrak{p}'}{\mathfrak{p}}$ repräsentierte rationale Nullklasse die n-te Potenz einer rationalen Nullklasse von K/Ω ist. Das Zerlegungsgesetz ist demnach vom Typus der aus der Klassenkörpertheorie der algebraischen Zahlkörper bekannten Zerlegungsgesetze, und es hat in seiner Isomorphieaussage überdies eine gewisse Ähnlichkeit mit dem Artinschen Reziprozitätsgesetz der Klassenkörpertheorie. Wir kommen unten darauf noch näher zurück.

Dieses Zerlegungsgesetz hat sich in einem von mir geleiteten Göttinger Seminar[4]) unter Mitarbeit von Frl. H. v. Caemmerer ergeben, und zwar bei unseren Bemühungen, den bekannten Endlichkeitssatz von Weil[5]) rein-algebraisch zu beweisen. Bei diesem Endlichkeitssatz handelt es sich um einen algebraischen Funktionenkörper K/Ω einer Unbestimmten von beliebigem Geschlecht g über einem endlich-algebraischen Zahlkörper Ω als Konstantenkörper. Der Satz besagt, daß die rationale Nullklassengruppe D von K/Ω (die in bekannter Weise als Additionsgruppe der rationalen g-gliedrigen Punktgruppen von K/Ω darstellbar ist) endlichen Rang hat. Der Weilsche Beweis dieses Satzes stützt sich auf die analytische Theorie der n-Teilung der zu K/Ω gehörigen Abelschen Funktionen, und zwar kommt er mit der speziellen Teilungszahl $n = 2$ aus. Es wird dort in analytischer Form ein Zusammenhang zwischen einer ad hoc konstruierten Klasseneinteilung der rationalen Punktgruppen und der durch Thetafunktionen dargestellten Kummer-Erzeugung des Zweiteilungskörpers entwickelt, der für $g = 1$ in den Spezialfall $n = 2$ des in dieser Arbeit behandelten Zerlegungsgesetzes übergeht. Für $g = 1$ geht der Weilsche Endlichkeitssatz bereits auf Mordell[6]) zurück, dessen Beweis[7]) sich auf die klassischen Zweiteilungsformeln der elliptischen Funktionen stützt und wesentlich frei von Analysis ist.

Wenn ich hier aus dem Zerlegungsgesetz für den n-Teilungskörper einen neuen Beweis des Mordell-Weilschen Endlichkeitssatzes für $g = 1$ herleite,

---

[4]) Eine Ausarbeitung dieses Seminars vom S. S. 1938 befindet sich in der Bücherei des Mathematischen Instituts Göttingen.

[5]) A. Weil, L'arithmétique sur les courbes algébriques. Acta math. 52 (1928).

[6]) L. J. Mordell, On the rational solutions of the indeterminate equations of the third and fourth degree. Proc. Cambridge Phil. Soc. 21 (1922), part 3.

[7]) Siehe auch die Weilsche Fassung dieses Beweises: A. Weil, Sur un théorème de Mordell. Bull. Scienc. Math. 54 (1930).