so geschieht das aus den folgenden drei Gründen: Erstens arbeitet der ursprüngliche MORDELLsche Beweis und auch die WEILsche Fassung mit den speziellen Formeln der Zweiteilung der elliptischen Funktionen. Er mag deshalb zwar kürzer sein, ist aber sicher weniger durchsichtig als mein Beweis. Zweitens erscheint es mir befriedigend, den WEILschen Endlichkeitssatz, der ja eine ganz allgemeine Strukturaussage ist, auch im Zuge der allgemeinen Strukturtheorie der algebraischen Funktionenkörper einer Unbestimmten zu beweisen und ihn so in dieser Theorie an wohlbestimmter Stelle fest zu verankern. Drittens sehe ich in der Befreiung von den speziellen Formeln der Zweiteilung und in der Einordnung in die allgemeine Strukturtheorie für $g = 1$ eine wesentliche Vorarbeit für einen rein-algebraischen Beweis des WEILschen Endlichkeitssatzes auch für $g > 1$.

Einen solchen allgemeinen Beweis zu geben, und dabei auch die bisher nur ganz wenigen restlos klare WEILsche Distributionslehre für algebraische Funktionenkörper mehrerer Unbestimmten in derjenigen Klarheit, Prägnanz und strukturellen Durchsichtigkeit zu entwickeln, durch die sich die arithmetische Theorie der algebraischen Funktionenkörper auszeichnet, erscheint mir als eine sehr lohnende und dankenswerte Aufgabe. Neben dieser Aufgabe, für die das hier bewiesene Zerlegungsgesetz auf den n-Teilungskörper des ABELschen Funktionenkörpers eines algebraischen Funktionenkörpers K/Ω vom Geschlecht $g > 1$ zu verallgemeinern ist, wäre es ferner interessant, in diesem Zerlegungsgesetz noch die hier gemachten Beschränkungen auf Primdivisoren ersten Grades und auf natürliche Multiplikatoren aufzuheben, was wohl beides nicht schwer ist.

§ 1.

Der μ-Teilungskörper [8]).

1. Es sei μ ein (eigentlicher) Meromorphismus von K/Ω (H II, § 2), also ein Isomorphismus von K/Ω auf einen Teilkörper $K\mu/\Omega$, der als hinterer Operator geschrieben wird. Der Relativkörper $K/K\mu$ heißt der μ-Teilungskörper von K/Ω. Sein Relativgrad $N(\mu) = [K : K\mu]$ (Norm von μ) ändert sich nicht bei Übergang zu einer Konstantenerweiterung von K/Ω. Dem Meromorphismus μ entspricht umkehrbar eindeutig eine (nicht-konstante) Korrespondenz von K/Ω auf sich (D I, §§ 2, 5), die als vorderer Operator

[8]) Die in diesem Paragraphen zusammengestellten Tatsachen finden sich im wesentlichen bereits in H II, § 2, D I, §§ 2, 5 und D II, § 4. Jedoch ist dort die Theorie des μ-Teilungskörpers nicht Selbstzweck, und außerdem lassen sich die in H II gegebenen Beweise zum großen Teil durch die Methodik von D I, II beträchtlich vereinfachen. Daher gebe ich hier eine kurze übersichtliche Zusammenstellung der wesentlichen Tatsachen über den μ-Teilungskörper.

geschrieben wird. Sie stellt sich im Bereich der algebraischen Punkte $\bar{\mathfrak{q}}$ von K/Ω (A, § 1, 3) durch die Formel dar:

$$\mu\bar{\mathfrak{q}} = N_{\bar{K}/\bar{K}\mu}(\bar{\mathfrak{q}})\mu^{-1}. \tag{1}$$

Durch Anwendung dieser Korrespondenz auf die algebraische Nullklassengruppe $\bar{D}$ von K/Ω (A, § 4, 1) entsteht der μ zugeordnete Multiplikator von K/Ω auf sich (D I, § 4), den wir hier unmißverständlich ebenfalls mit μ bezeichnen. Er stellt sich als ein Endomorphismus (Homomorphismus in sich) der Klassengruppe $\bar{D}$ dar. Mit $\mu\bar{D}$ bzw. $\bar{D}_\mu$ seien, wie in A, § 8, 3, die Gruppen der durch Ausübung von μ auf Klassen aus $\bar{D}$ entstehenden bzw. 1 werdenden Klassen bezeichnet. Es gilt:

Zu jedem algebraischen Punkt $\bar{\mathfrak{p}}$ von K/Ω gibt es einen algebraischen Punkt $\bar{\mathfrak{q}}$ von K/Ω mit $\mu\bar{\mathfrak{q}} = \bar{\mathfrak{p}}$, und wenn $N(\mu)$ nicht durch Char. Ω teilbar ist, gibt es zu jedem $\bar{\mathfrak{p}}$ genau $N(\mu)$ verschiedene solche $\bar{\mathfrak{q}}$.

Es ist also $\mu\bar{D} = \bar{D}$, d. h. μ stellt sich als Automorphismus von $\bar{D}$ dar; und wenn $N(\mu)$ nicht durch Char. Ω teilbar ist, hat $\bar{D}_\mu$ die Ordnung $N(\mu)$.

Beweis[9]). Die Beziehung $\mu\bar{\mathfrak{q}} = \bar{\mathfrak{p}}$ ist nach (1) gleichbedeutend damit, daß $\bar{\mathfrak{q}}$ einer derjenigen algebraischen Punkte von K/Ω ist, die in dem algebraischen Punkt $\bar{\mathfrak{p}}\mu$ von $K\mu/\Omega$ enthalten sind. Hiernach besitzt $\mu\bar{\mathfrak{q}} = \bar{\mathfrak{p}}$ für jedes $\bar{\mathfrak{p}}$ eine Lösung $\bar{\mathfrak{q}}$. Durch Division mit einer festen Beziehung $\mu\bar{\mathfrak{q}}_0 = \bar{\mathfrak{p}}_0$ folgt daraus $\mu\bar{D} = \bar{D}$. Die Zerlegung des Primdivisors $\bar{\mathfrak{p}}\mu$ von $\bar{K}\mu/\bar{\Omega}$ in Primdivisoren $\bar{\mathfrak{q}}$ von $\bar{K}/\bar{\Omega}$ hat ferner nach dem Gesagten die Form

$$\bar{\mathfrak{p}}\mu = \prod_{\mu\bar{\mathfrak{q}}=\bar{\mathfrak{p}}} \bar{\mathfrak{q}}^{e_{\bar{\mathfrak{q}}}} \quad \text{mit} \quad \sum_{\mu\bar{\mathfrak{q}}=\bar{\mathfrak{p}}} e_{\bar{\mathfrak{q}}} = N(\mu),$$

wo die Verzweigungsordnungen $e_{\bar{\mathfrak{q}}}$ zunächst nicht bekannt sind. Die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren in dieser Zerlegung ist gleich der Lösungsanzahl von $\mu\bar{\mathfrak{q}} = \bar{\mathfrak{p}}$. Durch Division mit $\mu\bar{\mathfrak{q}}_0 = \bar{\mathfrak{p}}$, wo $\bar{\mathfrak{q}}_0$ eine feste Lösung ist, folgt, daß diese Anzahl gleich der Ordnung von $\bar{D}_\mu$ und daher von $\bar{\mathfrak{p}}$ unabhängig ist. Ist also $N(\mu)$ nicht durch Char. Ω teilbar, so daß $\bar{K}/\bar{K}\mu$ separabel ist und daher mindestens ein $\bar{\mathfrak{p}}\mu$ unverzweigt bleibt, so sind notwendig alle $\bar{\mathfrak{p}}\mu$ unverzweigt, d. h. alle $e_{\bar{\mathfrak{q}}} = 1$, und $\bar{D}_\mu$ hat die Ordnung $\sum_{\mu\bar{\mathfrak{q}}=\bar{\mathfrak{p}}} 1 = N(\mu)$, wie behauptet. Der Beweis ergibt überdies:

---

[9]) Siehe schon H II, § 2 und für beliebiges Geschlecht A, § 8, 3. Der hier gegebene Beweis ersetzt die Anwendung der Relativgeschlechtsformel in H II, § 2 durch eine direktere Schlußweise, wie es für die Verallgemeinerung in A, § 8, 3 erforderlich war. Für den hier beiseite gelassenen Fall, daß $N(\mu)$ durch Char. Ω teilbar ist, siehe H II, § 2.

Ist $N(\mu)$ nicht durch Char. Ω teilbar, so ist $\overline{K}/\overline{K}\mu$ unverzweigt, und das Zerlegungsgesetz für $\overline{K}/\overline{K}\mu$ lautet:

$$\bar{\mathfrak{p}}\mu = \prod_{\mu\bar{\mathfrak{q}}=\bar{\mathfrak{p}}} \bar{\mathfrak{q}}.$$

2. Es sei A eine rationale Nullklasse von K/Ω (A, § 4, 1). Ferner sei n eine natürliche Zahl und $\mathfrak{o}$ ein rationaler Punkt von K/Ω; die Existenz eines solchen kann auf Grund einer endlich-algebraischen Konstantenerweiterung vorausgesetzt werden. Schließlich bedeute $\mathfrak{x}$ einen transzendenten Punkt von K/Ω (A, § 5, 2). Durch die Äquivalenzen

$$\tau_A \mathfrak{x} \sim \mathfrak{x} A, \qquad \frac{n_0 \mathfrak{x}}{\mathfrak{o}} \sim \left(\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{o}}\right)^n$$

werden dann Meromorphismen τ_A, n_0 von K/Ω definiert (A, § 6), indem durch $\mathfrak{x} \to \tau_A \mathfrak{x}$, $\mathfrak{x} \to n_0 \mathfrak{x}$ Meromorphismen des zu K/Ω isomorphen Körpers $\mathsf{K} = \Omega(\mathfrak{x})$ gegeben sind. τ_A heißt die Translation um die Klasse A und n_0 die n-Multiplikation mit dem Bezugspunkt $\mathfrak{o}$. Aus dem Additionstheorem (D I, § 2) ergeben sich[10]) für die zugeordneten Korrespondenzen von K/Ω im Bereich der algebraischen Punkte $\bar{\mathfrak{q}}$ von K/Ω die zur Definition von τ_A, n_0 analogen Formeln:

$$\tau_A \bar{\mathfrak{q}} \sim \bar{\mathfrak{q}} A, \qquad \frac{n_0 \bar{\mathfrak{q}}}{\mathfrak{o}} \sim \left(\frac{\bar{\mathfrak{q}}}{\mathfrak{o}}\right)^n.$$

Die diesen Korrespondenzen zugeordneten Multiplikatoren stellen sich demgemäß durch die Formeln dar:

$$\tau_A \overline{C} = \overline{C}, \quad n_0 \overline{C} = \overline{C}^n,$$

wo $\overline{C}$ die algebraischen Nullklassen von K/Ω durchläuft. Die Translationen τ_A lassen also als Multiplikatoren die algebraischen Nullklassen von K/Ω invariant; die n-Multiplikation n_0 ist als Multiplikator unabhängig vom Bezugspunkt $\mathfrak{o}$ und bedeutet einfach die Potenzierung mit n in der Gruppe $\overline{D}$. Die Translationen τ_A sind Automorphismen von K/Ω, es ist also $N(\tau_A) = 1$, und nach (1) gilt für sie:

$$\tau_A \bar{\mathfrak{q}} = \bar{\mathfrak{q}} \tau_A^{-1}.$$

Sie lassen hiernach nicht nur als Multiplikatoren, sondern auch als Automorphismen die Klassen aus $\overline{D}$ invariant. Für die n-Multiplikation n_0 gilt $N(n_0) = n^2$[11]). Der zugehörige Teilkörper Kn_0 hängt nicht vom Bezugspunkt $\mathfrak{o}$ ab, kann also einfach als Kn bezeichnet werden. K/Kn ist dann der n-Teilungskörper von K/Ω.

---

[10]) Man nehme die hier auftretenden Körper K, K als Körper K, K im Sinne von D I, § 2 und $\mathfrak{x}$, $\tau_A \mathfrak{x}$, $n_0 \mathfrak{x}$, ... als korrespondenzerzeugende Divisoren $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{K} = K\mathsf{K}$ im dortigen Sinne.

[11]) Diese wichtige Formel ergibt sich am einfachsten gemäß D II, § 4. Mein früher aus H I und H III, § 1 kombinierter rechnerischer Beweis ist durch diese einfache begriffliche Schlußweise als überholt anzusehen.

3. Ist wieder μ irgendein Meromorphismus von K/Ω, so heißen die Klassen $\bar{J}$ aus der Gruppe $\bar{D}_\mu$, also die Lösungen von $\mu \bar{J} = 1$ in der Gruppe $\bar{D}$, die μ-Teilungsklassen von K/Ω. Durch eine endlich-algebraische Konstantenerweiterung kann erreicht werden, daß sie rational sind; wir bezeichnen sie dann mit J, ihre Gruppe mit D_μ. Im Anschluß an die oben ausgesprochenen Sätze gilt:

Ist $N(\mu)$ nicht durch Char. Ω teilbar, und sind die μ-Teilungsklassen von K/Ω rational, so ist der μ-Teilungskörper $K/K\mu$ abelsch, mit der zu D_μ isomorphen Gruppe $\mathfrak{T}_\mu$ der Translationen τ_J um die μ-Teilungsklassen J als Galoisgruppe.

Beweis [12]). Da alle Lösungen $\bar{\mathfrak{q}}$ von $\mu \bar{\mathfrak{q}} = \bar{\mathfrak{p}}$ aus einer festen $\bar{\mathfrak{q}}_0$ in der Form

$$\bar{\mathfrak{q}} \sim \bar{\mathfrak{q}}_0 J, \quad \text{also} \quad \bar{\mathfrak{q}} = \tau_J \bar{\mathfrak{q}}_0 = \bar{\mathfrak{q}}_0 \tau_J^{-1}$$

entstehen, wo J die μ-Teilungsklassen durchläuft, kann das Zerlegungsgesetz für $\bar{K}/\bar{K}\mu$ in der Form

$$\bar{\mathfrak{p}}\mu = \prod_J \tau_J \bar{\mathfrak{q}}_0 = \prod_J \bar{\mathfrak{q}}_0 \tau_J^{-1}$$

geschrieben werden. Hiernach lassen die Translationsautomorphismen τ_J alle algebraischen Punkte $\bar{\mathfrak{p}}\mu$ und daher alle Divisoren $\mathfrak{a}\mu$ von $K\mu/\Omega$ invariant. Sie können dann für die Elemente $z\mu$ aus $K\mu$ nur die Multiplikation mit Faktoren $\neq 0$ aus Ω bewirken. Durch Betrachtung von $z\mu + 1$ folgt, daß diese Faktoren durchweg $= 1$ sind. Daher sind die τ_J Automorphismen von $K/K\mu$. Da ihre Anzahl mit dem Grad $N(\mu)$ von $K/K\mu$ übereinstimmt, ergibt sich die Behauptung.

4. Für die Elemente z aus K hat man einerseits

$$z\mu \equiv (z\mu)(\bar{\mathfrak{q}}) \bmod. \bar{\mathfrak{q}}, \quad \text{also auch} \quad \bmod. N_{\bar{K}/\bar{K}\mu}(\bar{\mathfrak{q}})$$

und daher nach (1)

$$z \equiv (z\mu)(\bar{\mathfrak{q}}) \bmod. \mu\bar{\mathfrak{q}},$$

während andererseits natürlich

$$z \equiv z(\mu\bar{\mathfrak{q}}) \bmod. \mu\bar{\mathfrak{q}}$$

ist. Durch Vergleich ergibt sich die *Restformel* (H II, § 2):

$$(2) \qquad (z\mu)(\bar{\mathfrak{q}}) = z(\mu\bar{\mathfrak{q}}).$$

Dabei können die Reste auch ∞ sein; (2) ergibt sich unter Einschluß dieses Falles, indem man neben z auch $\frac{1}{z}$ betrachtet, oder also von einem homogenen Elementsystem $z_0 : z_1 = 1 : z$ ausgeht (A, § 3, 1). In (2) steckt demnach als Teilaussage: Dann und nur dann ist $z\mu$ ganz für $\bar{\mathfrak{q}}$, wenn z ganz für $\mu\bar{\mathfrak{q}}$ ist.

---

[12]) Für beliebiges Geschlecht siehe wieder A, § 8, 5.