Wendet man die Restformel (2) auf das Berechnungsschema der Distributionen [A, § 9, (1)—(4)] an, so ergibt sich die analoge Restformel:

$$(3) \qquad (\mathfrak{a}\mu)\,(\bar{\mathfrak{q}}) \doteq \mathfrak{a}(\mu\bar{\mathfrak{q}})$$

für ganze Divisoren $\mathfrak{a}$ von K/Ω. Dabei gilt sogar $=$ statt nur $\doteq$, wenn die beiden Distributionen mittels einer homogenen M-Basis $x_0, \ldots, x_n$ von K/Ω (A, § 3, 2) und der ihr meromorph zugeordneten $M\mu$-Basis $x_0\mu, \ldots, x_n\mu$ von $K\mu/\Omega$ gebildet werden. Beim Beweis beachte man, daß nach dem zuvor Gesagten einer für $\mu\bar{\mathfrak{q}}$ primitiven Normierung von $x_0, \ldots, x_n$ eine für $\bar{\mathfrak{q}}$ primitive Normierung von $x_0\mu, \ldots, x_n\mu$ entspricht.

§ 2.

Die Kummer-Erzeugung und das Kummer-Zerlegungsgesetz für den n-Teilungskörper.

Es sei n eine natürliche Zahl. Wir betrachten den n-Teilungskörper K/Kn von K/Ω. Dabei machen wir durchweg folgende drei Voraussetzungen, ohne sie immer zu wiederholen:

a) *Es gibt einen rationalen Punkt* $\mathfrak{o}$ *von* K/Ω.

b) *Die n-Teilungsklassen von* K/Ω *sind rational.*

c) n *ist nicht durch Char.* Ω *teilbar.*

a) und b) können durch eine endlich-algebraische Konstantenerweiterung verwirklicht werden, c) wird der Einfachheit halber vorausgesetzt. a) ist schon für die Definition des n-Teilungskörpers gemäß § 1 erforderlich, b) und c) sichern die in § 1 ausgesprochenen Tatsachen für ihn.

1. Kurz zusammengefaßt hat man unter den Voraussetzungen a), b), c) folgenden Tatbestand:

Die n-Teilungsklassen J, also die Lösungen von $J^n = 1$, bilden eine abelsche Gruppe D_n von der Ordnung n^2 und vom Typus (n, n); letzteres ergibt sich gruppentheoretisch, indem man neben n die Teiler von n betrachtet. Der n-Teilungskörper K/Kn ist unverzweigt und abelsch, mit der zu D_n isomorphen Gruppe $\mathfrak{T}_n$ der Translationen τ_J um die n-Teilungsklassen J als Galoisgruppe. Das Zerlegungsgesetz für die algebraisch-abgeschlossene Konstantenerweiterung $\bar{K}/\bar{K}n$ (oder also das Zerlegungsgesetz der algebraischen Punkte für K/Kn) lautet:

$$\bar{\mathfrak{p}}n_0 = \prod_{n_0\bar{\mathfrak{q}}=\bar{\mathfrak{p}}} \bar{\mathfrak{q}}, \quad \text{wobei} \quad \frac{n_0\bar{\mathfrak{q}}}{\mathfrak{o}} \sim \left(\frac{\bar{\mathfrak{q}}}{\mathfrak{o}}\right)^n.$$

Man beachte, daß zur Formulierung dieses Zerlegungsgesetzes ein rationaler Bezugspunkt $\mathfrak{o}$ und damit einer der zum Multiplikator n gehörigen Meromorphismen, nämlich n_0, ausgezeichnet werden muß, obwohl der Relativkörper K/Kn selbst unabhängig von $\mathfrak{o}$ ist. Entsprechendes gilt auch für die Formulierung der weiteren Ergebnisse.

2. Wie in der Theorie der Kummer-Erzeugungen üblich, schreiben wir für Elemente z, z' aus K:

$$z \underset{n}{=} z' \text{ in } K, \text{ wenn } z' = zc^n \text{ mit } c \neq 0 \text{ aus } K,$$

und reden in diesem Sinne von den n-Klassen aus K. Unter den Voraussetzungen a), b) folgern wir zunächst:

Kummer-Erzeugung des n-Teilungskörpers. *Ω enthält die n-ten Einheitswurzeln. Dementsprechend besitzt $K/K\mathfrak{n}$ eine Kummer-Erzeugung. Diese lautet:*

$$K = K\mathfrak{n}(\sqrt[n]{z_J\,\mathfrak{n}_0}).$$

Dabei ist das Elementsystem $z_J\,\mathfrak{n}_0$ aus $K\mathfrak{n}$ folgendermaßen erklärt: Es gibt in K ein Elementsystem

$$w_J \cong \frac{\mathfrak{i}\,\mathfrak{n}_0}{\mathfrak{o}\,\mathfrak{n}_0},$$

wo $\frac{\mathfrak{i}}{\mathfrak{o}}$ das auf $\mathfrak{o}$ bezogene Repräsentantensystem der n-Teilungsklassen J durchläuft. Damit ist

$$z_J\,\mathfrak{n}_0 = w_J^n.$$

Das zugeordnete Elementsystem z_J aus K ist also durch

$$z_J \cong \left(\frac{\mathfrak{i}}{\mathfrak{o}}\right)^n$$

mit bestimmter Normierung der Faktoren aus Ω gegeben.

Beweis. Wegen $J^n = 1$ ist zunächst klar, daß es zu jeder n-Teilungsklasse J ein Element z_J aus K mit

$$z_J \cong \left(\frac{\mathfrak{i}}{\mathfrak{o}}\right)^n, \quad \text{also} \quad z_J\,\mathfrak{n}_0 \cong \left(\frac{\mathfrak{i}\,\mathfrak{n}_0}{\mathfrak{o}\,\mathfrak{n}_0}\right)^n$$

gibt. Nach dem Zerlegungsgesetz für $\overline{K}/\overline{K}\mathfrak{n}$ ist nun

$$\mathfrak{i}\,\mathfrak{n}_0 = \prod_J \tau_J\,\bar{\mathfrak{i}}_0, \quad \mathfrak{o}\,\mathfrak{n}_0 = \prod_J \tau_J\,\bar{\mathfrak{o}}_0,$$

wo $\bar{\mathfrak{i}}_0$, $\bar{\mathfrak{o}}_0$ feste (nicht notwendig rationale) Lösungen von

$$\mathfrak{n}_0\,\bar{\mathfrak{i}}_0 = \mathfrak{i}, \quad \mathfrak{n}_0\,\bar{\mathfrak{o}}_0 = \mathfrak{o}$$

sind. Wegen der Invarianz der Nullklassen bei Translationen folgt daraus die Äquivalenz in $\overline{K}$:

$$\frac{\mathfrak{i}\,\mathfrak{n}_0}{\mathfrak{o}\,\mathfrak{n}_0} = \prod_J \tau_J\left(\frac{\bar{\mathfrak{i}}_0}{\bar{\mathfrak{o}}_0}\right) \sim \left(\frac{\bar{\mathfrak{i}}_0}{\bar{\mathfrak{o}}_0}\right)^{n^2}.$$

Nach der Definition von $\mathfrak{n}_0$ gilt ferner in $\overline{K}$:

$$\left(\frac{\bar{\mathfrak{i}}_0}{\bar{\mathfrak{o}}_0}\right)^n \sim \mathfrak{n}_0\left(\frac{\bar{\mathfrak{i}}_0}{\bar{\mathfrak{o}}_0}\right) = \frac{\mathfrak{i}}{\mathfrak{o}}, \quad \text{also} \quad \left(\frac{\bar{\mathfrak{i}}_0}{\bar{\mathfrak{o}}_0}\right)^{n^2} \sim \left(\frac{\mathfrak{i}}{\mathfrak{o}}\right)^n \sim 1.$$

Die damit in $\overline{K}$ festgestellte Beziehung

$$\frac{\mathfrak{i}\,\mathfrak{n}_0}{\mathfrak{o}\,\mathfrak{n}_0} \sim 1$$

gilt wegen der Invarianz der Divisorenäquivalenz auch in K; denn $\mathfrak{i} n_0$, $\mathfrak{o} n_0$ sind ganze Divisoren von K/Ω. Hiernach gibt es zu jeder n-Teilungsklasse J ein Element w_J aus K mit

$$w_J \cong \frac{\mathfrak{i}\, n_0}{\mathfrak{o}\, n_0}.$$

Die obengenannten Elemente z_J lassen sich dann durch Faktoren aus Ω so normieren, daß

$$z_J\, n_0 = w_J^n$$

gilt. Eine zulässige Änderung der w_J um Faktoren $\neq 0$ aus Ω ergibt für die z_J eine Änderung um Faktoren $\neq 0$ aus Ω^n, so daß die n-Klassen der normierten z_J in K eindeutig festliegen. Der Multiplikation der J:

$$J_1 J_2 = J$$

entspricht die Multiplikation der $\frac{\mathfrak{i}}{\mathfrak{o}}$ bis auf Faktoren $\neq 0$ aus K, also die Multiplikation der w_J bis auf Faktoren $\neq 0$ aus $K n$, und daher die Multiplikation der z_J bis auf Faktoren $\neq 0$ aus K^n, d. h. die n-Klassenmultiplikation der z_J in K:

$$z_{J_1} z_{J_2} \underset{n}{=} z_J \text{ in } K.$$

Da $z_J \underset{n}{=} 1$ in K nur für $J = 1$ gilt, repräsentieren also die z_J eine n-Klassengruppe in K, die zur Gruppe D_n der n-Teilungsklassen J und damit zur Galoisgruppe $\mathfrak{T}_n$ von K/Kn isomorph ist. Hat insbesondere J die genaue Ordnung n, so ist $w_J^n = z_J n_0$ die früheste in Kn gelegene Potenz von w_J. Da K/Kn galoissch ist, sind also die n-ten Einheitswurzeln in Kn und daher in Ω enthalten. Aus der festgestellten Isomorphie folgt dann nach der Theorie der Kummer-Erzeugungen die Behauptung.

Die vollen n-Klassen der z_J in K ergeben übrigens gerade diejenigen Elemente aus K, die n-te Potenzen von Divisoren (nullten Grades) von K/Ω sind, jedes solche Element in einer bestimmten Normierung durch einen Faktor $\neq 0$ aus Ω.

3. Ist $\mathfrak{p}$ ein Primdivisor ersten Grades von K/Ω, so gibt es in der n-Klasse von z_J in K zu $\mathfrak{p}$ prime Vertreter z'_J (für $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{o}, \mathfrak{i}$ genügt schon $z'_J = z_J$); denn man kann w_J durch einen Faktor aus Kn prim zu $\mathfrak{p} n_0$ machen. Für alle solchen Vertreter gehören die Reste $z'_J(\mathfrak{p})$ einer und derselben n-Klasse in Ω an. Wir verstehen im folgenden bei Betrachtung eines $\mathfrak{p}$ unter z_J einen zu $\mathfrak{p}$ prim normierten Vertreter der n-Klasse des bisherigen normierten $z_J \cong \left(\frac{\mathfrak{i}}{\mathfrak{o}}\right)^n$, und unter w_J dann eine Lösung von $z_J n_0 = w_J^n$. Diese Normierung kann auch gleichzeitig für mehrere $\mathfrak{p}$ vorgenommen werden. Wir beweisen nunmehr: