

## Werk

**Titel:** Mathematische Zeitschrift

**Ort:** Berlin

**Jahr:** 1942

**Kollektion:** Mathematica

**Werk Id:** PPN266833020\_0048

**PURL:** [http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN266833020\\_0048](http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN266833020_0048) | LOG\_0011

## Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

Wendet man die Restformel (2) auf das Berechnungsschema der Distributionen [A, § 9, (1)–(4)] an, so ergibt sich die analoge Restformel:

$$(3) \quad (\alpha \mu)(\bar{q}) \doteq \alpha(\mu \bar{q})$$

für ganze Divisoren  $\alpha$  von  $K/\Omega$ . Dabei gilt sogar  $=$  statt nur  $\doteq$ , wenn die beiden Distributionen mittels einer homogenen  $M$ -Basis  $x_0, \dots, x_n$  von  $K/\Omega$  (A, § 3, 2) und der ihr meromorph zugeordneten  $M\mu$ -Basis  $x_0\mu, \dots, x_n\mu$  von  $K\mu/\Omega$  gebildet werden. Beim Beweis beachte man, daß nach dem zuvor Gesagten einer für  $\mu \bar{q}$  primitiven Normierung von  $x_0, \dots, x_n$  eine für  $\bar{q}$  primitive Normierung von  $x_0\mu, \dots, x_n\mu$  entspricht.

## § 2.

### Die Kummer-Erzeugung

#### und das Kummer-Zerlegungsgesetz für den $n$ -Teilungskörper.

Es sei  $n$  eine natürliche Zahl. Wir betrachten den  $n$ -Teilungskörper  $K/Kn$  von  $K/\Omega$ . Dabei machen wir durchweg folgende drei Voraussetzungen, ohne sie immer zu wiederholen:

- a) *Es gibt einen rationalen Punkt  $\mathfrak{o}$  von  $K/\Omega$ .*
- b) *Die  $n$ -Teilungsklassen von  $K/\Omega$  sind rational.*
- c)  *$n$  ist nicht durch  $\text{Char. } \Omega$  teilbar.*

a) und b) können durch eine endlich-algebraische Konstantenerweiterung verwirklicht werden, c) wird der Einfachheit halber vorausgesetzt. a) ist schon für die Definition des  $n$ -Teilungskörpers gemäß § 1 erforderlich, b) und c) sichern die in § 1 ausgesprochenen Tatsachen für ihn.

1. Kurz zusammengefaßt hat man unter den Voraussetzungen a), b), c) folgenden Tatbestand:

Die  $n$ -Teilungsklassen  $J$ , also die Lösungen von  $J^n = 1$ , bilden eine abelsche Gruppe  $D_n$  von der Ordnung  $n^2$  und vom Typus  $(n, n)$ ; letzteres ergibt sich gruppentheoretisch, indem man neben  $n$  die Teiler von  $n$  betrachtet. Der  $n$ -Teilungskörper  $K/Kn$  ist unverzweigt und abelsch, mit der zu  $D_n$  isomorphen Gruppe  $\mathfrak{T}_n$  der Translationen  $\tau_J$  um die  $n$ -Teilungsklassen  $J$  als Galoisgruppe. Das Zerlegungsgesetz für die algebraisch-abgeschlossene Konstantenerweiterung  $\bar{K}/\bar{K}n$  (oder also das Zerlegungsgesetz der algebraischen Punkte für  $K/Kn$ ) lautet:

$$\bar{p}n_{\mathfrak{o}} = \prod_{n_{\mathfrak{o}} \bar{q} = \bar{p}} \bar{q}, \quad \text{wobei} \quad \frac{n_{\mathfrak{o}} \bar{q}}{\mathfrak{o}} \sim \left( \frac{\bar{q}}{\mathfrak{o}} \right)^n.$$

Man beachte, daß zur Formulierung dieses Zerlegungsgesetzes ein rationaler Bezugspunkt  $\mathfrak{o}$  und damit einer der zum Multiplikator  $n$  gehörigen Meromorphismen, nämlich  $n_{\mathfrak{o}}$ , ausgezeichnet werden muß, obwohl der Relativkörper  $K/Kn$  selbst unabhängig von  $\mathfrak{o}$  ist. Entsprechendes gilt auch für die Formulierung der weiteren Ergebnisse.

2. Wie in der Theorie der Kummer-Erzeugungen üblich, schreiben wir für Elemente  $z, z'$  aus  $K$ :

$$z \stackrel{n}{=} z' \text{ in } K, \text{ wenn } z' = zc^n \text{ mit } c \neq 0 \text{ aus } K,$$

und reden in diesem Sinne von den  $n$ -Klassen aus  $K$ . Unter den Voraussetzungen a), b) folgern wir zunächst:

**Kummer-Erzeugung des  $n$ -Teilungskörpers.**  $\Omega$  enthält die  $n$ -ten Einheitswurzeln. Dementsprechend besitzt  $K/K_n$  eine Kummer-Erzeugung. Diese lautet:

$$K = K_n(\sqrt[n]{z_J n_0}).$$

Dabei ist das Elementsystem  $z_J n_0$  aus  $K_n$  folgendermaßen erklärt: Es gibt in  $K$  ein Elementsystem

$$w_J \cong \frac{i n_0}{o n_0},$$

wo  $\frac{i}{o}$  das auf  $o$  bezogene Repräsentantensystem der  $n$ -Teilungsklassen  $J$  durchläuft. Damit ist

$$z_J n_0 = w_J^n.$$

Das zugeordnete Elementsystem  $z_J$  aus  $K$  ist also durch

$$z_J \cong \left(\frac{i}{o}\right)^n$$

mit bestimmter Normierung der Faktoren aus  $\Omega$  gegeben.

Beweis. Wegen  $J^n = 1$  ist zunächst klar, daß es zu jeder  $n$ -Teilungsklasse  $J$  ein Element  $z_J$  aus  $K$  mit

$$z_J \cong \left(\frac{i}{o}\right)^n, \text{ also } z_J n_0 \cong \left(\frac{i n_0}{o n_0}\right)^n$$

gibt. Nach dem Zerlegungsgesetz für  $\bar{K}/\bar{K}_n$  ist nun

$$i n_0 = \prod_J \tau_J \bar{i}_0, \quad o n_0 = \prod_J \tau_J \bar{o}_0,$$

wo  $\bar{i}_0, \bar{o}_0$  feste (nicht notwendig rationale) Lösungen von

$$n_0 \bar{i}_0 = i, \quad n_0 \bar{o}_0 = o$$

sind. Wegen der Invarianz der Nullklassen bei Translationen folgt daraus die Äquivalenz in  $\bar{K}$ :

$$\frac{i n_0}{o n_0} = \prod_J \tau_J \left(\frac{\bar{i}_0}{\bar{o}_0}\right) \sim \left(\frac{\bar{i}_0}{\bar{o}_0}\right)^{n^2}.$$

Nach der Definition von  $n_0$  gilt ferner in  $\bar{K}$ :

$$\left(\frac{\bar{i}_0}{\bar{o}_0}\right)^n \sim n_0 \left(\frac{\bar{i}_0}{\bar{o}_0}\right) = \frac{i}{o}, \quad \text{also} \quad \left(\frac{\bar{i}_0}{\bar{o}_0}\right)^{n^2} \sim \left(\frac{i}{o}\right)^n \sim 1.$$

Die damit in  $\bar{K}$  festgestellte Beziehung

$$\frac{i n_0}{o n_0} \sim 1$$

gilt wegen der Invarianz der Divisorenäquivalenz auch in  $K$ ; denn  $i n_0, o n_0$  sind ganze Divisoren von  $K/\Omega$ . Hiernach gibt es zu jeder  $n$ -Teilungsklasse  $J$  ein Element  $w_J$  aus  $K$  mit

$$w_J \cong \frac{i n_0}{o n_0}.$$

Die obengenannten Elemente  $z_J$  lassen sich dann durch Faktoren aus  $\Omega$  so normieren, daß

$$z_J n_0 = w_J^n$$

gilt. Eine zulässige Änderung der  $w_J$  um Faktoren  $\neq 0$  aus  $\Omega$  ergibt für die  $z_J$  eine Änderung um Faktoren  $\neq 0$  aus  $\Omega^n$ , so daß die  $n$ -Klassen der normierten  $z_J$  in  $K$  eindeutig festliegen. Der Multiplikation der  $J$ :

$$J_1 J_2 = J$$

entspricht die Multiplikation der  $\frac{i}{o}$  bis auf Faktoren  $\neq 0$  aus  $K$ , also die Multiplikation der  $w_J$  bis auf Faktoren  $\neq 0$  aus  $Kn$ , und daher die Multiplikation der  $z_J$  bis auf Faktoren  $\neq 0$  aus  $K^n$ , d. h. die  $n$ -Klassenmultiplikation der  $z_J$  in  $K$ :

$$z_{J_1} z_{J_2} \equiv_n z_J \text{ in } K.$$

Da  $z_J \equiv_n 1$  in  $K$  nur für  $J = 1$  gilt, repräsentieren also die  $z_J$  eine  $n$ -Klassen-Gruppe in  $K$ , die zur Gruppe  $D_n$  der  $n$ -Teilungsklassen  $J$  und damit zur Galois-Gruppe  $\mathfrak{T}_n$  von  $K/Kn$  isomorph ist. Hat insbesondere  $J$  die genaue Ordnung  $n$ , so ist  $w_J^n = z_J n_0$  die früheste in  $Kn$  gelegene Potenz von  $w_J$ . Da  $K/Kn$  galoissch ist, sind also die  $n$ -ten Einheitswurzeln in  $Kn$  und daher in  $\Omega$  enthalten. Aus der festgestellten Isomorphie folgt dann nach der Theorie der Kummer-Erzeugungen die Behauptung.

Die vollen  $n$ -Klassen der  $z_J$  in  $K$  ergeben übrigens gerade diejenigen Elemente aus  $K$ , die  $n$ -te Potenzen von Divisoren (nullten Grades) von  $K/\Omega$  sind, jedes solche Element in einer bestimmten Normierung durch einen Faktor  $\neq 0$  aus  $\Omega$ .

**3.** Ist  $p$  ein Primdivisor ersten Grades von  $K/\Omega$ , so gibt es in der  $n$ -Klasse von  $z_J$  in  $K$  zu  $p$  prime Vertreter  $z'_J$  (für  $p \neq o$ , i genügt schon  $z'_J = z_J$ ); denn man kann  $w_J$  durch einen Faktor aus  $Kn$  prim zu  $p n_0$  machen. Für alle solchen Vertreter gehören die Reste  $z'_J(p)$  einer und derselben  $n$ -Klasse in  $\Omega$  an. Wir verstehen im folgenden bei Betrachtung eines  $p$  unter  $z_J$  einen zu  $p$  prim normierten Vertreter der  $n$ -Klasse des bisherigen normierten  $z_J \cong \left(\frac{i}{o}\right)^n$ , und unter  $w_J$  dann eine Lösung von  $z_J n_0 = w_J^n$ . Diese Normierung kann auch gleichzeitig für mehrere  $p$  vorgenommen werden. Wir beweisen nunmehr: