NIEDERSÄCHSISCHE STAATS- UND UNIVERSITÄTSBIBLIOTHEK GÖTTINGEN

Werk

Titel: Mathematische Zeitschrift

Ort: Berlin

Jahr: 1942

Kollektion: Mathematica

Werk Id: PPN266833020_0048

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN266833020_0048|LOG_0012

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.
Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.
Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Kummer-Zerlegungsgesetz für den n-Teilungskörper. *Der Restklassenkörper $\Omega_{\mathfrak{p}}/\Omega$ der Primdivisoren von K/Ω, die in einem Primdivisor ersten Grades $\mathfrak{p} n_0$ von $K n/\Omega$ aufgehen, wird in Kummer-Erzeugung gegeben durch*

$$\Omega_{\mathfrak{p}} = \Omega\left(\sqrt[n]{z_J(\mathfrak{p})}\right).$$

Beweis. Bei der getroffenen Normierung sind die $w_J = \sqrt[n]{z_J n_0}$ ganz für $\mathfrak{p} n_0$, und ihre Diskriminante $|S_{K/Kn}(w_J w_{J'})|$ ist prim zu $\mathfrak{p} n_0$. Letzteres sieht man so:

$$S_{K/Kn}(w_J w_{J'}) = \left\{\begin{matrix} n^2 w_J w_{J'} & \text{für } JJ' = 1 \\ 0 & \text{für } JJ' \neq 1 \end{matrix}\right\},$$

also

$$|S_{K/Kn}(w_J w_{J'})| = (n^2)^{n^2} (\prod_J w_J)^2;$$

die w_J sind prim zu $\mathfrak{p} n_0$ normiert, und n enthält — anders als für algebraische Zahlkörper — keinen Primdivisor, da es eine wegen der Voraussetzung c) von Null verschiedene Konstante ist. Demnach bilden die w_J eine $\mathfrak{p} n_0$-Ganzheitsbasis für K/Kn. Ist also $\mathfrak{q}$ ein Primdivisor von K/Ω, der in $\mathfrak{p} n_0$ aufgeht, so erzeugen die $w_J(\mathfrak{q})$ den Restklassenkörper $\Omega(\mathfrak{q}) = \Omega_{\mathfrak{p}}$ über dem Restklassenkörper $\Omega(\mathfrak{p} n_0) = \Omega$:

$$\Omega_{\mathfrak{p}} = \Omega(w_J(\mathfrak{q})).$$

Ist nun $\bar{\mathfrak{q}}$ ein in $\mathfrak{q}$ steckender algebraischer Punkt von K/Ω, so ist nach dem Zerlegungsgesetz der algebraischen Punkte $n_0 \bar{\mathfrak{q}} = \mathfrak{p}$, also nach der Restformel § 1, (2)

$$w_J(\mathfrak{q})^n = w_J(\bar{\mathfrak{q}})^n = (z_J n_0)(\bar{\mathfrak{q}}) = z_J(n_0 \bar{\mathfrak{q}}) = z_J(\mathfrak{p}).$$

Damit ergibt sich die Behauptung.

§ 3.

Das Klassenkörper-Zerlegungsgesetz für den n-Teilungskörper.

Es mögen nach wie vor die zu Beginn von § 2 gemachten Voraussetzungen a), b), c) gelten.

1. Wir betrachten die n-Klasseneinteilung der rationalen Punkte $\mathfrak{p}$ von K/Ω:

$$\mathfrak{p}' \underset{n}{\sim} \mathfrak{p}, \text{ wenn } \mathfrak{p}' \sim \mathfrak{p} C^n \text{ mit einer rationalen Klasse } C \text{ von } K/\Omega.$$

Die n-Klassen der $\mathfrak{p}$ sind die Nebengruppen ersten Grades zur Untergruppe D^n der rationalen Nullklassengruppe D von K/Ω; erst ihre Quotienten bilden die Faktorgruppe D/D^n. Im Hinblick auf die Definition des Meromorphismus n_0, nach der

$$\mathfrak{p} = n_0 \bar{\mathfrak{q}} \quad \text{gleichbedeutend mit} \quad \frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{o}} \sim \left(\frac{\bar{\mathfrak{q}}}{\mathfrak{o}}\right)^n$$

ist, denken wir uns die Faktorgruppe D/D^n durch die n-Klassen der Quotienten $\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{o}}$ repräsentiert. Ist $\bar{\mathfrak{q}}, \bar{\mathfrak{q}}'$ ein Lösungspaar von $\mathfrak{p} = n_0 \bar{\mathfrak{q}}$, $\mathfrak{p}' = n_0 \bar{\mathfrak{q}}'$, so bedeutet $\mathfrak{p}' \underset{n}{\sim} \mathfrak{p}$, daß $\bar{\mathfrak{q}}' \sim \bar{\mathfrak{q}} C J$ mit einer rationalen Klasse C und einer n-Teilungsklasse J von K/Ω ist; wegen der vorausgesetzten Rationalität der J folgt daraus $\Omega(\bar{\mathfrak{q}}') = \Omega(\bar{\mathfrak{q}})$, d. h. $\Omega_{\mathfrak{p}'} = \Omega_{\mathfrak{p}}$. Ferner ist dann und nur dann $\mathfrak{p} = n_0 \mathfrak{q}$ mit rationalem $\mathfrak{q}$, wenn $\mathfrak{p} \underset{n}{\sim} \mathfrak{o}$ ist. Damit haben wir schon folgende beiden Teilaussagen eines Klassenkörper-Zerlegungsgesetzes für $K/K n$:

Der Restklassenkörper $\Omega_{\mathfrak{p}}$ hängt nur von der n-Klasse von $\mathfrak{p}$ ab.

Dann und nur dann ist $\mathfrak{p} n_0$ voll-zerlegt, wenn $\mathfrak{p} \underset{n}{\sim} \mathfrak{o}$ ist.

Die letztere Aussage kann nach dem Kummer-Zerlegungsgesetz aus § 2 auch so ausgesprochen werden:

(1) $\quad z_J(\mathfrak{p}) \underset{n}{=} 1$ *in Ω (für alle J) ist gleichbedeutend mit* $\mathfrak{p} \underset{n}{\sim} \mathfrak{o}$.

2. Wir beweisen jetzt darüber hinaus:

Klassenkörper-Zerlegungsgesetz für den n-Teilungskörper. *Das n-Klassensystem der Kummer-Erzeugenden $z_J(\mathfrak{p})$ in Ω des Restklassenkörpers $\Omega_{\mathfrak{p}}/\Omega$ der Primdivisoren von K/Ω, die in einem Primdivisor ersten Grades $\mathfrak{p} n_0$ von $K n/\Omega$ aufgehen, entspricht umkehrbar eindeutig der n-Klasse von $\mathfrak{p}$:*

(2) $\quad z_J(\mathfrak{p}') \underset{n}{=} z_J(\mathfrak{p})$ *in Ω (für alle J) ist gleichbedeutend mit* $\mathfrak{p}' \underset{n}{\sim} \mathfrak{p}$.

Diese eineindeutige Zuordnung wird gegeben durch das Formelsystem:

(3) $$z_J \tau_P \underset{n}{=} z_J(\mathfrak{p}) \cdot z_J \quad \text{in } K,$$

wo P die Klasse von $\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{o}}$ bezeichnet, und sie ist ein Isomorphismus zwischen der Faktorgruppe D/D^n, repräsentiert durch die n-Klassen PD^n der $\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{o}}$, und der Multiplikationsgruppe Z_n der n-Klassensysteme der $z_J(\mathfrak{p})$ in Ω.

Beweis. Da z_J die n-te Potenz eines Divisors nullten Grades von K/Ω ist, und da die Translation τ_P die Nullklassen von K/Ω invariant läßt, hat man

$$z_J \tau_P \cong z_J \cdot c_{J,P}^n$$

mit Faktoren $c_{J,P} \neq 0$ aus K, also

$$z_J \tau_P = \gamma_{J,P} \cdot z_J \cdot c_{J,P}^n \underset{n}{=} \gamma_{J,P} \cdot z_J \quad \text{in } K$$

mit Faktoren $\gamma_{J,P} \neq 0$ aus Ω. Diese Faktoren bestimmen sich durch Restbildung mod. $\mathfrak{o}$. Links ist nach der Restformel § 1, (2)

$$(z_J \tau_P)(\mathfrak{o}) = z_J(\tau_P \mathfrak{o}) = z_J(\mathfrak{p}).$$

Rechts ist nach (1)

$$z_J(\mathfrak{o}) \underset{n}{=} 1 \text{ in } \Omega.$$

Man beachte hierbei, daß z_J gleichzeitig zu $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{o}$ prim normiert werden kann. Damit ergibt sich

$$\gamma_{J,P} \underset{n}{=} z_J(\mathfrak{p}) \text{ in } \Omega,$$

also (3). Demnach ist $\tau_P \to z_J(\mathfrak{p})$ ein Homomorphismus der Translationsgruppe $\mathfrak{T}$ der τ_P auf die Multiplikationsgruppe Z_n der n-Klassensysteme der $z_J(\mathfrak{p})$ in Ω. Durch Vorfügung des Isomorphismus $P \to \tau_P$ von D auf $\mathfrak{T}$ entsteht ein Homomorphismus $P \to z_J(\mathfrak{p})$ von D auf Z_n. Nach (1) ist dieser ein Isomorphismus von D/D^n auf Z_n. Damit ist die behauptete Isomorphieaussage und insbesondere auch die Eineindeutigkeitsaussage (2) bewiesen.

3. Es ist interessant zu bemerken, daß in Weils analytischem Beweis seines Endlichkeitssatzes das Formelsystem (3) für ($n = 2$) aus dem Satz über die Vertauschung von Argument und Parameter (hier $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{o}$) in den Elementarintegralen dritter Gattung gefolgert wird. Unsere einfache Schlußweise ist also als die Algebraisierung dieses Satzes anzusehen. Allgemeiner als (3) gilt übrigens nach dem Beweis das Formelsystem:

$$z_J \tau_{\frac{P}{P'}} \underset{n}{=} \frac{z_J(\mathfrak{p})}{z_J(\mathfrak{p}')} \cdot z_J \text{ in } K, \tag{3'}$$

in dem der feste Punkt $\mathfrak{o}$ mit $z_J(\mathfrak{o}) \underset{n}{=} 1$ in Ω durch einen beliebigen rationalen Punkt $\mathfrak{p}'$ von K/Ω ersetzt ist und $\frac{P}{P'}$ die Klasse von $\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}'}$ ist.

Wir bemerken ferner, daß das gewonnene Klassenkörper-Zerlegungsgesetz in seiner Isomorphieaussage den Typus des Artinschen Reziprozitätsgesetzes aus der algebraischen Zahlentheorie hat. An Stelle des dortigen Frobenius-Automorphismus tritt hier das Kummer-Erzeugendensystem $z_J(\mathfrak{p})$ von $\Omega_\mathfrak{p}/\Omega$, das aus dem festen Kummer-Erzeugendensystem $z_J\, \mathfrak{n}_0$ von $K/K\mathfrak{n}$ durch Restbildung nach dem zu zerlegenden Primdivisor $\mathfrak{p}\mathfrak{n}_0$ entsteht. Die durch (3) mit dem System $z_J(\mathfrak{p})$ verknüpfte Translation τ_P kann allerdings nicht als das formale Analogon des Frobenius-Automorphismus angesehen werden, weil sie zwar ein Automorphismus von K/Ω, aber im allgemeinen kein Automorphismus des betrachteten Relativkörpers $K/K\mathfrak{n}$ ist. Um dies genaue formale Analogon des Frobenius-Automorphismus zu erhalten, hätte man vielmehr die Zerlegungsgruppe von $\mathfrak{p}\mathfrak{n}_0$, als Untergruppe der Galoisgruppe $\mathfrak{T}_n$ von $K/K\mathfrak{n}$, durch die Translationen τ_J darzustellen und dann, vermöge des verschränkten Produktes mit dem Faktorensystem 1 von $K/K\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{T}_n$, von den $z_J\, \mathfrak{n}_0$ zu den τ_J überzugehen. Dies wäre noch im einzelnen auszuführen, etwa unter Benutzung der Ergebnisse von Teichmüller[13]).

---

[13]) O. Teichmüller, Verschränkte Produkte mit Normalringen, Multiplikation zyklischer Normalringe. Deutsche Math. 1 (1936).