

Werk

Titel: Mathematische Zeitschrift

Ort: Berlin

Jahr: 1942

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN266833020_0048

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN266833020_0048

LOG Id: LOG_0014

LOG Titel: Über die definiten selbstadjungierten, Eigenwertaufgaben bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen. IV.

LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN266833020

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN266833020>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Über die definiten selbstadjungierten Eigenwertaufgaben bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen. IV.

Herrn KONRAD KNOPP

zum 60. Geburtstag am 22. Juli 1942 gewidmet.

Von

E. Kamke in Tübingen.

§ 1.

Einleitung.

1.1. In dieser Arbeit, deren Beweisführungen von den vorangehenden Arbeiten¹⁾ unabhängig sind, handelt es sich wie in K II und K III um die Eigenwertaufgabe, die aus der Differentialgleichung

$$(1) \quad F(y) = \lambda G(y)$$

und den Randbedingungen

$$(2) \quad U_\mu(y) = 0 \quad (\mu = 1, \dots, 2m)$$

besteht. Dabei sind F und G die selbstadjungierten Differentialausdrücke

$$(3) \quad F(y) = \sum_{v=0}^m (f_v y^{(v)})^{(v)}, \quad G(y) = \sum_{v=0}^n (g_v y^{(v)})^{(v)},$$

die $f_v = f_v(x)$ und $g_v = g_v(x)$ sind im Intervall $a \leq x \leq b$ gegebene reelle, v -mal stetig differenzierbare Funktionen, ferner ist $f_m \neq 0$, $g_n \neq 0$, $|f_0| + |g_0| \neq 0$ ²⁾, $0 \leq n < m$. Die

$$(4) \quad U_\mu(y) = \sum_{z=0}^{2m-1} [\alpha_{\mu,z} y^{(z)}(a) + \beta_{\mu,z} y^{(z)}(b)]$$

sind gegebene Linearformen in den $y^{(z)}(a)$, $y^{(z)}(b)$ mit reellen Koeffizienten $\alpha_{\mu,z}$, $\beta_{\mu,z}$, deren Matrix den Rang $2m$ hat, d. h. die Gleichungen (2) sind voneinander linear unabhängig.

Die Gleichungen

$$F(y) = 0, \quad G(y) = 0$$

¹⁾ K I, K II, K III = KAMKE, Math. Zeitschr. 45 (1939), S. 759–787; 46 (1940), S. 231–250 und 251–286.

²⁾ Diese Voraussetzung wird allein in 4.4 benutzt und läßt sich in einer Reihe von Fällen auch umgehen. In dem Fall $n = 0$, d. h. für $G(y) = g(x)y$ ist sie sicher erfüllt, wenn $g \neq 0$ vorausgesetzt wird.

sollen keine Lösung gemeinsam haben, die $\equiv 0$ ist und die Randbedingungen (2) erfüllt³⁾.

Schließlich soll die Eigenwertaufgabe (1), (2) selbstadjungiert⁴⁾ und in dem in 1. 3 angegebenen Sinne definit⁵⁾ sein.

Diese Voraussetzungen sollen im folgenden immer erfüllt sein. Die Eigenwertaufgabe ist dann normal⁶⁾. Daher sind nach K II, Satz 3 und 4, alle Eigenwerte reell, ferner gibt es höchstens abzählbar viele Eigenwerte, und diese haben keinen im Endlichen gelegenen Häufungspunkt, können also nach wachsender Größe numeriert werden.

Aus K III läßt sich weiter entnehmen, daß es unendlich viele Eigenwerte gibt. Doch wird das hier nicht als bekannt vorausgesetzt, sondern im folgenden mitbewiesen.

1. 2. In dem Fall, daß für jede $2m$ -mal stetig differenzierbare Funktion $y(x)$, welche die Randbedingungen (2) erfüllt, neben der Definitheitsvoraussetzung von K III⁷⁾ auch noch⁸⁾

$$\int y G(y) dx \geq 0$$

gilt⁹⁾, liefert der Satz 2 von K III folgendes: Die Variationsaufgabe

$$(5) \quad \frac{\int y F(y) dx}{\int y G(y) dx} = \text{Min}$$

³⁾ Diese Voraussetzung ist z. B. erfüllt, wenn die Gleichungen $F(y) = 0$ und $G(y) = 0$ überhaupt keine Lösung außer $y \equiv 0$ gemeinsam haben, und das trifft z. B. zu, wenn $n = 0$, also $G(y) = g(x)y$ und $g \not\equiv 0$ ist. Denn dann folgt aus $G(y) = 0$, daß $y \equiv 0$ in einem Teilintervall, also, wenn y zugleich die lineare Differentialgleichung $F(y) = 0$ erfüllt, $y \equiv 0$ sogar in dem ganzen Intervall $\langle a, b \rangle$ ist.

⁴⁾ Vgl. S. 75 und K II, S. 231f.

⁵⁾ Sie ist dann, wie S. 71, Fußnote 20 gezeigt wird, auch in dem früheren Sinne von K III, S. 252 definit.

⁶⁾ Zu diesem Begriff vgl. K II, S. 237f. Daß die Eigenwertaufgabe unter den obigen Voraussetzungen normal ist, folgt aus K II, Satz 2 (d) in Verbindung mit der vorangehenden Fußnote.

⁷⁾ In K III, S. 252 war die Eigenwertaufgabe definit genannt, wenn für jede Funktion $y(x)$, die in $\langle a, b \rangle$ $2m$ -mal stetig differenzierbar ist und die $2m$ Randbedingungen (2) erfüllt,

$$\int_a^b y F(y) dx \geq 0$$

und außerdem für diejenigen dieser Funktionen $y(x) \not\equiv 0$, für die hierin etwa das Gleichheitszeichen gilt,

$$\int_a^b y G(y) dx \neq 0$$

ist und ein festes Vorzeichen hat.

⁸⁾ In dieser Arbeit ist durchweg $\int = \int_a^b$.

⁹⁾ Dann sind offenbar alle Eigenwerte ≥ 0 .

hat eine Lösung $y = \psi(x)$, wenn zur Konkurrenz alle diejenigen Funktionen $y(x)$ zugelassen werden, für die der Nenner > 0 ist und die

- (a) 2 m -mal stetig differenzierbar sind und
- (b) die 2 m Randbedingungen (2) erfüllen.

Der Minimalwert von (5) ist der kleinste Eigenwert λ_1 und $\psi(x)$ eine zu diesem gehörige Eigenfunktion der Aufgabe (1), (2).

Diese Festlegung des kleinsten Eigenwertes, die auf die höheren Eigenwerte ausgedehnt werden kann, hat bekanntlich neben der theoretischen auch eine erhebliche praktische Bedeutung für die wirkliche Berechnung der Eigenwerte¹⁰⁾, und zwar ist es für diese genäherte Berechnung der Eigenwerte durch die linke Seite von (5) um so günstiger, je weniger eingengt der Bereich der zugelassenen Funktionen $y(x)$ ist.

1.3. Im Fall $m = 1$ ¹¹⁾ hat HOLMGREN¹²⁾ für mehrere Typen von Randbedingungen nachgewiesen, daß die Bedingungen (a) und (b) nach geeigneter Umformung des Zählers von (5) gemildert werden können, d. h. der Bereich der zugelassenen Funktionen erweitert werden kann. Im folgenden soll gezeigt werden, daß das sogar für alle selbstadjungierten definiten Eigenwertaufgaben möglich ist¹³⁾.

Zunächst ist nach der DIRICHLETSchen Formel¹⁴⁾ für jede 2 m -mal stetig differenzierbare Funktion $y(x)$

$$\int y F(y) dx = \int \sum_{v=0}^m (-1)^v f_v y^{(v)2} dx + [R(y, y)]_a^b$$

mit

$$R(y, y) = \sum_{v=1}^m \sum_{p+q=v-1} (-1)^p (f_v y^{(v)})^{(q)} y^{(p)}$$

und entsprechend

$$\int y G(y) dx = \int \sum_{v=0}^n (-1)^v g_v y^{(v)2} dx + [S(y, y)]_a^b$$

¹⁰⁾ Vgl. dazu L. COLLATZ, Zeitschr. f. angewandte Mathematik und Mechanik **19** (1939), S. 224ff.

¹¹⁾ Dann ist $n = 0$, also $G(y)$ von der Gestalt $g(x)y$ mit $g(x) \neq 0$.

¹²⁾ E. HOLMGREN, Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik **1** (1903–04), S. 401–417. Die Differentialgleichung hat bei HOLMGREN die spezielle Gestalt $y'' = \lambda g(x)y$.

¹³⁾ Es bleibt zu untersuchen, ob und inwieweit die Ergebnisse etwa in der Arbeit von E. HÖLDER, Entwicklungssätze aus der Theorie der zweiten Variation [Acta Mathematica **70** (1939), S. 193–242] enthalten sind oder aus ihr herauspräpariert werden können. Wie mir Herr E. HÖLDER mitteilt, bereitet er eine Veröffentlichung über diese Frage vor.

¹⁴⁾ Vgl. E. KAMKE, Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen, S. 76f. Leipzig 1942.

mit

$$S(y, y) = \sum_{r=1}^n \sum_{p+q=r-1} (-1)^p (g, y^{(r)})^{(q)} y^{(p)}.$$

Trägt man dieses in (5) ein, so bestehen Zähler und Nenner aus Integralen, in denen von y nur Ableitungen der Ordnung $\leq m$ und $\leq n$ auftreten, und integralfreien „DIRICHLETSchen Restteilen“, die nur Ableitungen der Ordnung $\leq 2m-1$ und $\leq 2n-1$ enthalten. Diese Restteile werden mittels der Randbedingungen (2) weiter umgeformt.

Man bildet durch lineare Kombination der Randbedingungen (2) möglichst viele solcher Gleichungen, die nur Ableitungen der Ordnung $\leq m-1$ enthalten¹⁵⁾. Diese Randbedingungen seien jetzt mit

$$(6) \quad U_1(y) = 0, \dots, U_k(y) = 0$$

bezeichnet¹⁶⁾ und mögen die (für diese Untersuchung) *wesentlichen Randbedingungen* heißen¹⁷⁾. Zu diesen werden noch $2m-k$ der früheren Randbedingungen hinzugenommen, so daß im ganzen wieder $2m$ linear unabhängige Gleichungen entstehen. Diese letzten Randbedingungen seien mit

$$(7) \quad U_{k+1}(y) = 0, \dots, U_{2m}(y) = 0$$

bezeichnet und mögen die *restlichen Randbedingungen*¹⁸⁾ heißen.

Vermittels der k wesentlichen Randbedingungen können k der Ableitungen $y^{(v)}(a)$, $y^{(v)}(b)$ mit $v \leq m-1$ durch die übrigen dieser Ableitungen ausgedrückt werden (wobei auch Koeffizienten 0 vorkommen können); diese letzten $2m-k$ Ableitungen $y^{(v)}(a)$, $y^{(v)}(b)$ mit $v \leq m-1$ mögen *freie Ableitungen* heißen.

Werden nun mittels der restlichen Randbedingungen (7) in $[R(y, y)]_a^b$ und $[S(y, y)]_a^b$, soweit möglich, die Ableitungen der Ordnung $\geq m$ entfernt und dann noch alle Ableitungen der Ordnung $\leq m-1$ durch die freien Ableitungen ausgedrückt, so zeigt sich, daß alle Ableitungen der Ordnung $\geq m$ herausfallen (Beweis in 2.3 und 2.5). Die so umgeformten DIRICHLETSchen Restteile $[R(y, y)]_a^b$ und $[S(y, y)]_a^b$, die künftig (vgl. 2.5) mit $F_0(y, y)$ und

¹⁵⁾ D. h. mit Koeffizienten, die $\neq 0$ sind.

¹⁶⁾ $k=0$ bedeutet, daß keine wesentlichen Randbedingungen vorhanden sind.

¹⁷⁾ Für Beispiele siehe § 3.

¹⁸⁾ Schon früher sind in Einzelfällen die Randbedingungen unterteilt worden. So hat R. COURANT im Fall $m=1$ bei einigen Beispielen von „natürlichen“ Randbedingungen gesprochen; diese gehören zu den Randbedingungen, die oben als restliche Randbedingungen bezeichnet sind. In der technischen Literatur (vgl. C. B. BIEZENOR, GRAMMEL, Technische Dynamik, S. 165, Berlin 1939) sind im Falle $m=2$ bei einigen Typen von Eigenwertaufgaben „geometrische“ und „dynamische“ Randbedingungen unterschieden. Diese entsprechen den obigen wesentlichen und restlichen Randbedingungen.

$G_0(y, y)$ bezeichnet werden, mögen *reduzierte DIRICHLETSche Restteile* heißen. Sie sind quadratische Formen $F_0(y, y)$ und $G_0(y, y)$ der freien Ableitungen¹⁹⁾.

Die Eigenwertaufgabe (1), (2) soll jetzt *definit* heißen, wenn

$$(8) \quad (-1)^{\nu} f_{\nu}(x) \geq 0 \quad (\nu = 0, \dots, m) \quad \text{und} \quad (-1)^{\nu} g_{\nu}(x) \geq 0 \quad (\nu = 0, \dots, n)$$

ist und wenn außerdem die reduzierten Restteile

$$(9) \quad F_0(y, y) \geq 0, \quad G_0(y, y) \geq 0$$

sind²⁰⁾.

Weiters soll eine Funktion $y(x) \neq 0$ eine *zulässige Funktion* heißen, wenn sie

(a) in $\langle a, b \rangle$ $(m-1)$ -mal stetig differenzierbar, stückweise sogar m -mal stetig differenzierbar ist und

(b) die wesentlichen Randbedingungen (6) erfüllt²¹⁾.

¹⁹⁾ Dabei kann auch $F_0 \equiv 0$ und $G_0 \equiv 0$ sein.

²⁰⁾ Ist die Eigenwertaufgabe in dem obigen Sinne definit, so ist sie es auch im Sinne von K III, S. 252 (vgl. Fußnote 7 auf S. 68). Denn für zulässige Funktionen $y(x)$ im Sinne von K III, d. h. für Funktionen $y(x)$, die $2m$ -mal stetig differenzierbar sind und alle $2m$ Randbedingungen (2) erfüllen, ist nach der obigen Umformung der DIRICHLETSchen Formel

$$\int y F(y) dx = \int_{\nu=0}^m (-1)^{\nu} f_{\nu} y^{(\nu)2} dx + F_0(y, y)$$

und

$$\int y G(y) dx = \int_{\nu=0}^n (-1)^{\nu} g_{\nu} y^{(\nu)2} dx + G_0(y, y),$$

also

$$(*) \quad \int y F(y) dx \geq 0 \quad \text{und} \quad \int y G(y) dx \geq 0,$$

also die erste der früheren Definitheitsvoraussetzungen erfüllt. Besteht nun für eine dieser Funktionen $y(x)$ die Gleichung $\int y F(y) dx = 0$, so wähle man eine beliebige $2m$ -mal stetig differenzierbare Funktion $u(x)$, die mit ihren $2m-1$ ersten Ableitungen in den Punkten a und b verschwindet, also alle Randbedingungen (2) erfüllt. Dann erfüllt für beliebiges $\varepsilon \neq 0$ auch $y + \varepsilon u$ diese Randbedingungen, und nach (*) ist

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int (y + \varepsilon u) F(y + \varepsilon u) dx \\ &= \int y F(y) dx + 2\varepsilon \int u F(y) dx + \varepsilon^2 \int u F(u) dx \\ &= 2\varepsilon \int u F(y) dx + \varepsilon^2 \int u F(u) dx. \end{aligned}$$

Hätte das erste Integral der letzten Zeile für ein u einen Wert $\neq 0$, so ergäbe sich aus der Ungleichung für alle ε mit hinreichend kleinen absoluten Beträgen und mit einem zu diesem Integral entgegengesetzten Vorzeichen ein Widerspruch. Daher ist $\int u F(y) dx = 0$ für alle vorher genannten $u(x)$. Daraus folgt, daß $y(x)$ der Differentialgleichung $F(y) = 0$ genügt.

Ist nun zugleich $\int y G(y) dx = 0$, so ergibt sich in der gleichen Weise, daß auch $G(y) = 0$ ist. Dann ist aber nach dem zweiten Absatz von 1.1 $y \equiv 0$. Gilt in der ersten Ungleichung von (*) das Gleichheitszeichen für $y \neq 0$, so kann es also in der zweiten Ungleichung gestrichen werden, d. h. auch die restliche Bedingung für die Definitheit in dem früheren Sinne ist erfüllt.

²¹⁾ Die obigen beiden Bedingungen (a) und (b) bedeuten offenbar eine wesentliche Milderung der entsprechenden Bedingungen von 1.2.

1.4. Unter diesen Voraussetzungen wird die Variationsaufgabe

$$(10) \quad \frac{\int \sum_{v=0}^m (-1)^v f_v y^{(v)2} dx + F_0(y, y)}{\int \sum_{v=0}^n (-1)^v g_v y^{(v)2} dx + G_0(y, y)} = \text{Min}$$

gebildet. Über diese wird in § 4 bewiesen:

Satz 1. *In dem Bereich der zulässigen Funktionen $y(x)$, für die der Nenner $\neq 0$ ist, gibt es mindestens eine zulässige Funktion $y = \varphi(x)$, für die der Bruch (10) den kleinsten Wert annimmt. Dieser Minimalwert ist der kleinste Eigenwert λ_1 . Jede zulässige Funktion $y(x)$, für die (10) den Minimalwert annimmt, ist sogar $2m$ -mal stetig differenzierbar und eine zu λ_1 gehörige Eigenfunktion.*

Hieraus ergibt sich unmittelbar die

Folgerung. *Für jede zulässige Funktion $y(x)$ ist die linke Seite von (10) eine obere Schranke für den kleinsten Eigenwert.*

In § 3 werden die Eigenwertaufgaben zweiter Ordnung und die STURMSchen Eigenwertaufgaben vierter Ordnung mit $n = 0$ angegeben, bei denen die Voraussetzungen des obigen Satzes erfüllt sind. § 5 enthält einige Ergänzungen: die Ausdehnung des Satzes auf die höheren Eigenwerte, die independente Festlegung der Eigenwerte, BESSELSche Ungleichung und PARSEVALSche Formel bei einer neuen Definition der Fourier-Koeffizienten einer zulässigen Funktion, den KRYLOFFschen Abschätzungssatz für die Eigenwerte bei dem RITZschen Verfahren.

§ 2.

Untersuchung des Restteils der DIRICHLETSchen Formel.

In diesem Paragraphen wird nur die Selbstadjungiertheit, nicht die Definitheit der Eigenwertaufgabe benutzt.

2.1. Übergang zu einer Bilinearform. Im Intervall $\langle a, b \rangle$ sei $u(x)$ $2m$ -mal stetig differenzierbar und $v(x)$ $(m-1)$ -mal stetig differenzierbar und stückweis sogar m -mal stetig differenzierbar, dann besteht für den Differentialausdruck $F(y)$ die DIRICHLETSche Formel ²²⁾

$$(11) \quad \int_a^b v F(u) dx = \int_a^b \sum_{v=0}^m (-1)^v f_v u^{(v)} v^{(v)} dx + [R(u, v)]_a^b$$

mit

$$(12) \quad R(u, v) = \sum_{v=1}^m \sum_{p+q=v-1} (-1)^p (f_v u^{(v)})^{(q)} v^{(p)}.$$

²²⁾ Vgl. E. KAMKE, Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen, S. 76f, Leipzig 1942.

Ordnet man in R die Glieder um und führt man die Differentiationen aus, so erhält man

$$\begin{aligned} R(u, v) &= \sum_{p=0}^{m-1} (-1)^p v^{(p)} \sum_{r=p+1}^m (f_v u^{(r)})^{(v-p-1)} \\ &= \sum_{p=0}^{m-1} (-1)^p v^{(p)} \sum_{r=p+1}^m \sum_{q=r}^{v-p-1} \binom{v-p-1}{q} u^{(q)} f_v^{(v-p-r-1)} \\ &= \sum_{p=0}^{m-1} (-1)^p v^{(p)} \sum_{r=p+1}^m \sum_{q=r}^{2v-p-1} \binom{v-p-1}{q-q} u^{(q)} f_v^{(2v-p-q-1)} \\ &= \sum_{p=0}^{m-1} \sum_{q=p+1}^{2m-p-1} A_{p,q}(x) v^{(p)} u^{(q)} \end{aligned}$$

mit

$$A_{p,q}(x) = \sum_{\frac{p+q+1}{2} \leq r \leq \text{Min}(q, m)} (-1)^p \binom{v-p-1}{q-r} f_v^{(2v-p-q-1)}.$$

Da $p \leq m-1$ ist, ist für $p+q = 2m-1$

$$\text{Min}(q, m) = \text{Min}(2m-p-1, m) = m,$$

also

$$A_{p,q}(x) = (-1)^p f_m(x) \neq 0.$$

Die $A_{p,q}(x)$ erfüllen somit ein Dreieck (vgl. Fig. 1 für $m=3$) und haben in den Punkten der stark ausgezogenen Dreiecksseite Werte $\neq 0$. Durch Hinzunahme von Gliedern mit dem Wert 0 wird das Dreieck zu einem Trapez ergänzt (Fig. 2). Dann ist

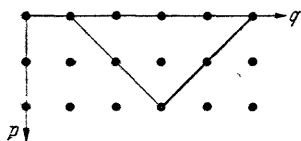


Fig. 1.

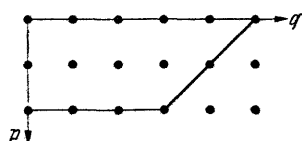


Fig. 2.

nahme von Gliedern mit dem Wert 0 wird das Dreieck zu einem Trapez ergänzt (Fig. 2). Dann ist

$$(13) \quad R(u, v) = \sum_{p=0}^{m-1} \sum_{q=0}^{2m-p-1} A_{p,q}(x) v^{(p)} u^{(q)}$$

eine Bilinearform in den Ableitungen $v^{(p)}$, $u^{(q)}$ mit

$$(14) \quad \text{Det} |A_{p,q}(x)| = \pm f_m^m \neq 0 \quad (0 \leq p \leq m-1; m \leq q \leq 2m-1).$$

Entsprechend ist für dieselben Funktionen u, v

$$(15) \quad \int v G(u) dx = \int \sum_{v=0}^n (-1)^v g_v u^{(v)} v^{(v)} dx + [S(u, v)]_a^b.$$

mit

$$(16) \quad \begin{aligned} S(u, v) &= \sum_{\nu=1}^n \sum_{p+q=\nu-1} (-1)^p (g, u^{(\nu)})^{(q)} v^{(p)} \\ &= \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{2n-p-1} B_{p,q}(x) v^{(p)} u^{(q)}, \end{aligned}$$

wobei jetzt jedoch über die der Determinante (14) entsprechende Determinante keine Aussage gemacht werden kann.

Später wird für eine beliebige Zahl λ noch die aus (11) und (15) folgende Formel

$$(17) \quad \begin{aligned} &\int v [F(u) - \lambda G(u)] dx \\ &= \int \left\{ \sum_{i=0}^m (-1)^i f, u^{(i)} v^{(i)} - \lambda \sum_{i=0}^n (-1)^i g, u^{(i)} v^{(i)} \right\} dx + [T(u, v)]_a^b \end{aligned}$$

mit

$$T(u, v) = R(u, v) - \lambda S(u, v)$$

benutzt werden. Die Koeffizienten von $S(u, v)$ liegen wegen $n < m$ ganz in dem Koeffizienten-Trapez von $R(u, v)$, jedoch liegt kein Koeffizient auf der schrägen Trapezlinie. Daher ist

$$(18) \quad \text{Det } |T(u, v)| = \text{Det } |R(u, v)| \neq 0 \quad (0 \leq p \leq m-1; m \leq q \leq 2m-1).$$

Werden nun die Größen

$$u(a), u'(a), \dots, u^{(m-1)}(a), u(b), \dots, u^{(m-1)}(b)$$

in irgendeiner Reihenfolge mit $u_1, \dots, u_{2m}$ bezeichnet, die entsprechenden $v^{(i)}(a), v^{(i)}(b)$ mit $v_1, \dots, v_{2m}$ und schließlich die Ableitungen $u^{(r)}(a), u^{(r)}(b)$ für $m \leq r \leq 2m-1$ mit $u_{2m+1}, \dots, u_{4m}$ und die entsprechenden Ableitungen von v , die später auftreten werden, mit $v_{2m+1}, \dots, v_{4m}$, so lauten die Randbedingungen (2)

$$(19) \quad U_\mu(u) = 0 \quad (\mu = 1, \dots, M)$$

mit $M = 2m$ und

$$U_\mu(u) = \sum_{\nu=1}^{2M} \alpha_{\mu,\nu} u_\nu \quad (\mu = 1, \dots, M);$$

die Matrix der $\alpha_{\mu,\nu}$ hat den Rang M . Ferner ist der Restteil der DIRICHLETSchen Formel (11), wenn noch weitere Glieder mit dem Wert 0 hinzugenommen werden,

$$(20) \quad [R(u, v)]_a^b = \sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^{2M} a_{p,q} v_p u_q$$

eine Bilinearform in den u, v mit

$$(21) \quad \text{Det } |a_{p,q}| \neq 0 \quad (p = 1, \dots, M; q = M+1, \dots, 2M).$$

Entsprechend ist

$$(22) \quad [S(u, v)]_a^b = \sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^{2M} b_{p,q} v_p u_q,$$

wobei jetzt über die Koeffizienten jedoch keine der Ungleichung (21) entsprechende Aussage gemacht werden kann, und schließlich ist der in (17) auftretende Restteil von der Gestalt

$$(23) \quad [T(u, v)]_a^b = \sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^{2M} c_{p,q} v_p u_q$$

mit

$$(24) \quad \text{Det } |c_{p,q}| \neq 0 \quad (p = 1, \dots, M; q = M+1, \dots, 2M).$$

Die Voraussetzung, daß die Eigenwertaufgabe (1), (2) selbstadjungiert ist, besagt folgendes²³⁾: Für je zwei Zahlensysteme

$$u(a), u'(a), \dots, u^{(2m-1)}(a), \quad u(b), \dots, u^{(2m-1)}(b)$$

und

$$v(a), v'(a), \dots, v^{(2m-1)}(a), \quad v(b), \dots, v^{(2m-1)}(b),$$

die beide die Randbedingungen (2) erfüllen, ist

$$(25) \quad [R(u, v)]_a^b = [R(v, u)]_a^b \quad \text{und} \quad [S(u, v)]_a^b = [S(v, u)]_a^b,$$

wo R und S durch (12) und (16) gegeben sind. In den soeben eingeführten Bezeichnungen besagt das: Es ist

$$(26) \quad \sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^{2M} a_{p,q} v_p u_q = \sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^{2M} a_{p,q} u_p v_q$$

für je zwei Zahlensysteme u_p und v_p , die beide die Gleichungen (19) erfüllen. Ferner gilt (26) auch mit $b_{p,q}$ statt $a_{p,q}$ und daher auch mit $c_{p,q}$ statt $a_{p,q}$.

Die weiteren Überlegungen werden für eine beliebige Bilinearform

$$(27) \quad A(u, v) = \sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^{2M} a_{p,q} v_p u_q$$

mit der Eigenschaft angestellt, daß (26) für alle Zahlensysteme u_p, v_p gelten soll, die beide die Gleichungen (19) erfüllen. Die Ergebnisse lassen sich unmittelbar auf die DIRICHLETSchen Restteile übertragen.

2.2. Umformung der Nebenbedingungen (19). Zunächst werden, entsprechend dem Vorgehen in 1.3, durch lineare Kombination der Gleichungen (19) möglichst viele linear unabhängige Gleichungen gebildet, in denen nur $u_1, \dots, u_M$ vorkommen, d. h. in denen alle übrigen u_v den Koeffizienten 0 haben. Ein solches Gleichungssystem sei

$$(28) \quad \bar{U}_1(u) = 0, \dots, \bar{U}_k(u) = 0;$$

es ist dann $0 \leq k \leq M$ ($k = 0$ bedeutet, daß es keine derartigen Gleichungen gibt). Dazu werden noch $M - k$ der ursprünglichen Gleichungen (19) ge-

²³⁾ Vgl. K II, S. 231.

nommen, die zusammen mit den Gleichungen (28) ein System von linear unabhängigen Gleichungen bilden, und mit

$$(29) \quad \bar{U}_{k+1}(u) = 0, \dots, \bar{U}_M(u) = 0$$

bezeichnet. Dann besagen die Gleichungen (19) dasselbe wie die Gleichungen (28) + (29). Die Gleichungen (28) entsprechen den wesentlichen Randbedingungen von 1. 3, die Gleichungen (29) den restlichen Randbedingungen und mögen hier wesentliche und restliche Nebenbedingungen heißen.

Die Gleichungen (28) sind von der Gestalt

$$\sum_{\nu=1}^M \beta_{\mu, \nu} u_{\nu} = 0 \quad (\mu = 1, \dots, k).$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit gibt es k Variable u_{ν} , die unter Abänderung der bisherigen Numerierung jetzt mit $u_1, \dots, u_k$ bezeichnet seien, so daß die Determinante ihrer Koeffizientenmatrix $\neq 0$ ist. Das System (28) kann dann nach $u_1, \dots, u_k$ aufgelöst werden:

$$(30) \quad u_{\mu} = \sum_{\nu=k+1}^M \gamma_{\mu, \nu} u_{\nu} \quad (\mu = 1, \dots, k);$$

$u_{k+1}, \dots, u_M$ mögen freie Variable heißen.

Die $M - k$ Gleichungen (29) haben nach Eintragen von (30) die Gestalt

$$\sum_{\nu=k+1}^{2M} \beta_{\mu, \nu} u_{\nu} = 0 \quad (\mu = k+1, \dots, M),$$

und aus ihnen lassen sich nach unserer Annahme keine weiteren Gleichungen gewinnen, die nur $u_1, \dots, u_M$ enthalten. Da die Gleichungen außerdem linear unabhängig sind, haben in ihnen $M - k$ der Größen u_{ν} , mit $\nu \geq M+1$ eine Koeffizientenmatrix, deren Determinante $\neq 0$ ist. Unter Abänderung der bisherigen Numerierung seien diese Größen mit $u_{M+k+1}, \dots, u_{2M}$ bezeichnet, während die übrigen u_{ν} , mit $\nu \geq M+1$ die Nummern $M+1, \dots, M+k$ erhalten. Die obigen Gleichungen können dann nach $u_{M+k+1}, \dots, u_{2M}$ aufgelöst werden:

$$(31) \quad u_{\mu} = \sum_{\nu=M+k+1}^{M+k} \gamma_{\mu, \nu} u_{\nu} \quad (\mu = M+k+1, \dots, 2M).$$

Die Gleichungen (30) + (31) besagen dasselbe wie die Gleichungen (28) + (29) und damit dasselbe wie die Gleichungen (19).

Die vorgenommene Umnumerierung der $u_1, \dots, u_M$ hat für die Bilinearform $A(u, v)$ die Wirkung, daß in der Matrix $(a_{p, q})$ Zeilen vertauscht werden und ebenso die entsprechenden Spalten, also nur Spalten mit einer Nummer $q \leq M$. Die Umnumerierung der $u_{M+1}, \dots, u_{2M}$ hat die Wirkung, daß in der Matrix $(a_{p, q})$ Spalten mit Nummern $q \geq M+1$ vertauscht werden.

Man erhält also jedenfalls wieder eine Bilinearform (27) mit der Eigenschaft (26); ferner bleibt die Eigenschaft (21) erhalten, wenn sie für die ursprüngliche Bilinearform gilt.

2.3. Gestalt der Bilinearform nach Eintragen der Nebenbedingungen.

In den Gleichungen (30) und (31) können $u_{k+1}, \dots, u_{k+M}$ willkürlich gewählt werden. Zunächst werden nur die Gleichungen (30) berücksichtigt, d. h. die aus (30) sich ergebenden Werte $u_1, \dots, u_k$ und ebenso $v_1, \dots, v_k$ aus den Gleichungen mit v statt u werden in (27) eingetragen. Weiter wird

$$(32) \quad u_\mu = U_\mu + \sum_{\nu=k+1}^{M+k} \gamma_{\mu,\nu} u_\nu \quad (\mu = M+k+1, \dots, 2M)$$

gesetzt²⁴⁾; entsprechende Gleichungen werden mit v statt u gebildet. Dann bedeutet

$$(33) \quad U_{M+k+1} = 0, \dots, U_{2M} = 0,$$

daß auch die Gleichungen (31) erfüllt sind. Vorerst brauchen diese letzten Gleichungen jedoch nicht erfüllt zu sein.

Trägt man die k Nebenbedingungen (30) für u und v und außerdem (32) in (27) ein, so entsteht²⁵⁾

$$\begin{aligned} \bar{A}(u, v) &= \sum_{p=1}^k \left(\sum_{q=1}^k + \sum_{q=k+1}^{M+k} + \sum_{q=M+k+1}^{2M} \right) + \sum_{p=k+1}^M \left(\sum_{q=1}^k + \sum_{q=k+1}^{M+k} + \sum_{q=M+k+1}^{2M} \right) \\ &= \sum_{p=1}^k \sum_{q=1}^k a_{p,q} \sum_{\mu=k+1}^M \sum_{\nu=k+1}^M \gamma_{q,u} \gamma_{p,v} u_\mu v_\nu \\ &+ \sum_{p=1}^k \sum_{q=k+1}^{M+k} a_{p,q} u_q \sum_{\nu=k+1}^M \gamma_{p,\nu} v_\nu \\ &+ \sum_{p=1}^k \sum_{q=M+k+1}^{2M} a_{p,q} \left(U_q \sum_{\nu=k+1}^M \gamma_{p,\nu} v_\nu + \sum_{\mu=k+1}^{M+k} \sum_{\nu=k+1}^M \gamma_{p,\nu} \gamma_{q,u} u_\mu v_\nu \right) \\ &+ \sum_{p=k+1}^M \sum_{q=1}^k a_{p,q} v_p \sum_{\mu=k+1}^M \gamma_{q,u} u_\mu + \sum_{p=k+1}^M \sum_{q=k+1}^{M+k} a_{p,q} v_p u_q \\ &+ \sum_{p=k+1}^M \sum_{q=M+k+1}^{2M} a_{p,q} \left(v_p U_q + v_p \sum_{\mu=k+1}^{M+k} \gamma_{q,u} u_\mu \right). \end{aligned}$$

Erfüllen die u und v auch noch die restlichen Nebenbedingungen (29), d. h. die Gleichungen (31), so gilt (33). Der dann aus $\bar{A}(u, v)$ entstehende Ausdruck sei mit $A_0(u, v)$ bezeichnet.

Die Bedingung (26) besagt nun, daß

$$(34) \quad A_0(u, v) = A_0(v, u)$$

²⁴⁾ Die hier auftretenden Größen U_μ haben natürlich eine andere Bedeutung als die U_μ in (2).

²⁵⁾ Leere Summen bedeuten 0.

für beliebige Zahlen

$$u_{k+1}, \dots, u_{M+k} \quad \text{und} \quad v_{k+1}, \dots, v_{M+k}$$

gilt. $A_0(u, v)$, d. h. das obige $\bar{A}(u, v)$ mit $U_q = 0$, enthält aber offensichtlich kein v_ν mit $\nu > M$, d. h. $A_0(v, u)$, enthält kein u_ν mit $\nu > M$, also enthält nach (34) auch $A_0(u, v)$ kein solches u_ν , d. h. es ist

$$\sum_{\mu=M+1}^{M+k} \sum_{\nu=k+1}^M u_\mu v_\nu \left(\sum_{p=1}^k a_{p,\mu} \gamma_{p,\nu} + \sum_{p=1}^k \sum_{q=M+k+1}^{2M} a_{p,q} \gamma_{p,\nu} \gamma_{q,\mu} \right. \\ \left. + a_{\nu,\mu} + \sum_{q=M+k+1}^{2M} a_{\nu,q} \gamma_{q,\mu} \right) = 0$$

für beliebige u_μ, v_ν , also

$$(35) \quad \sum_{p=1}^k \sum_{q=M+k+1}^{2M} a_{p,q} \gamma_{p,\nu} \gamma_{q,\mu} + \sum_{p=1}^k a_{p,\mu} \gamma_{p,\nu} + \sum_{q=M+k+1}^{2M} a_{\nu,q} \gamma_{q,\mu} + a_{\nu,\mu} = 0$$

für $M+1 \leq \mu \leq M+k, k+1 \leq \nu \leq M$.

In $\bar{A}(u, v)$ und $A_0(u, v)$ fallen somit alle Glieder fort, die ein u_q mit $M+1 \leq q \leq M+k$ enthalten. Damit wird

$$(36) \quad A_0(u, v) = \sum_{\mu=k+1}^M \sum_{\nu=k+1}^M u_\mu v_\nu \left\{ \sum_{p=1}^k \gamma_{p,\nu} \left(\sum_{q=1}^k a_{p,q} \gamma_{q,\mu} + \sum_{q=M+k+1}^{2M} a_{p,q} \gamma_{q,\mu} \right) \right. \\ \left. + \sum_{p=1}^k a_{p,\mu} \gamma_{p,\nu} + \sum_{q=1}^k a_{\nu,q} \gamma_{q,\mu} + \sum_{q=M+k+1}^{2M} a_{\nu,q} \gamma_{q,\mu} + a_{\nu,\mu} \right\}$$

eine Bilinearform von $2(M-k)$ unabhängigen Veränderlichen und

$$(37) \quad \bar{A}(u, v) = A_0(u, v) + \sum_{\nu=k+1}^M v_\nu \sum_{q=M+k+1}^{2M} U_q \left(\sum_{p=1}^k a_{p,q} \gamma_{p,\nu} + a_{\nu,q} \right).$$

Da bei dieser Umformung von der Ungleichung (21) kein Gebrauch gemacht ist, gilt eine entsprechende Umformung auch für die Bilinearform (22).

2.4. Bilinearformen mit der Eigenschaft (21). Gilt für die Bilinearform auch noch die Ungleichung (21) und ist

$$(38) \quad \bar{A}(u, v) - A_0(u, v) = 0$$

für beliebige Werte der freien Variablen $v_{k+1}, \dots, v_M$, so bestehen die Gleichungen (33), d. h. die u_ν erfüllen die Gleichungen (31).

Wird nämlich zur Abkürzung

$$(39) \quad A_{\nu,\mu} = \sum_{p=1}^k a_{p,\mu} \gamma_{p,\nu} + a_{\nu,\mu}$$

gesetzt, so folgt aus (38) und (37)

$$(40) \quad \sum_{q=M+k+1}^{2M} A_{\nu,q} U_q = 0 \quad (\nu = k+1, \dots, M).$$

Ferner wird aus (35)

$$(41) \sum_{q=M+k+1}^{2M} A_{v,q} \gamma_{q,\mu} + A_{v,\mu} = 0 \quad (M+1 \leq \mu \leq M+k, k+1 \leq v \leq M).$$

Wenn aus (40) nicht die Gleichungen (33) gefolgert werden können, so ist

$$\text{Det } |A_{v,q}| = 0 \quad (v = k+1, \dots, M; q = M+k+1, \dots, 2M).$$

Dann gibt es Zahlen $h_{k+1}, \dots, h_M$, die nicht alle 0 sind und für die

$$\sum_{v=k+1}^M h_v A_{v,q} = 0 \quad (q = M+k+1, \dots, 2M)$$

ist. Nach (41) ist dann auch für $\mu = M+1, \dots, M+k$

$$\sum_{v=k+1}^M h_v A_{v,\mu} = - \sum_{q=M+k+1}^{2M} \gamma_{q,\mu} \sum_{v=k+1}^M h_v A_{v,q} = 0,$$

d. h. es ist im Ganzen

$$\sum_{v=k+1}^M h_v A_{v,\mu} = 0 \quad \text{für } \mu = M+1, \dots, 2M.$$

Diese Gleichungen besagen nach (39) für $\mu = M+1, \dots, 2M$

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{v=k+1}^M h_v \left(\sum_{p=1}^k a_{p,\mu} \gamma_{p,v} + a_{v,\mu} \right) \\ &= \sum_{p=1}^k a_{p,\mu} \sum_{v=k+1}^M h_v \gamma_{p,v} + \sum_{v=k+1}^M h_v a_{v,\mu}, \end{aligned}$$

d. h. das Gleichungssystem

$$\sum_{p=1}^M a_{p,\mu} x_p = 0 \quad (\mu = M+1, \dots, 2M)$$

hat, da nicht alle h_v Null sind, eine eigentliche Lösung, also müßte

$$\text{Det } |a_{p,\mu}| = 0 \quad (p = 1, \dots, M; \mu = M+1, \dots, 2M)$$

sein, im Widerspruch zu (21). Daher folgt aus (40) und somit aus (38) tatsächlich (33).

2.5. Folgerungen für die Dirichletschen Restteile. Ich kehre nun zum Ausgangspunkt dieses Paragraphen zurück. Aus dem Vorangehenden (vgl. insbes. 2.3) ergibt sich, daß $[R(u, v)]_a^b$ für $(2m-1)$ -mal stetig differenzierbare Funktionen u , welche alle Randbedingungen (2) erfüllen, und $(m-1)$ -mal stetig differenzierbare Funktionen v , welche die wesentlichen Randbedingungen (6) erfüllen, nach Eintragen dieser Randbedingungen eine Bilinearform $F_0(u, v)$ von gewissen $2m-k$ der Größen $u^{(v)}(a)$, $u^{(v)}(b)$ und den entsprechenden Größen $v^{(v)}(a)$, $v^{(v)}(b)$ mit $v \leq m-1$, den freien Ableitungen (vgl. 1.3) wird. Diese Bilinearform, das vorherige $A_0(u, v)$ der Formel (37), wird im folgenden als selbstständige Bilinearform, ohne Rücksicht auf ihre Entstehung und die dabei über die u, v gemachten Voraus-

setzungen auftreten, und ist der *reduzierte DIRICHLETSche Restteil*. Er kann für alle zulässigen Funktionen u, v gebildet werden und ist nach (25) bzw. (34) eine symmetrische Funktion

$$(42) \quad F_0(u, v) = F_0(v, u).$$

Führt man dieselbe Umformung von $[S(u, v)]_a^b$ mit den gleichen freien Ableitungen durch, so kommt man auf eine Bilinearform $G_0(u, v)$ derselben freien Ableitungen, für die ebenfalls

$$(43) \quad G_0(u, v) = G_0(v, u)$$

gilt, und schließlich führt $[T(u, v)]_a^b$ auf

$$F_0(u, v) - \lambda G_0(u, v).$$

Eine weitere Folgerung war in 2.3 für Bilinearformen A gezogen, für welche die Ungleichung (21) gilt. Die Bilinearform $C(u, v)$ erfüllt nach (24) die entsprechende Ungleichung. Daher gilt das Ergebnis auch für C und kann so formuliert werden:

Sind u, v zulässige Funktionen und ist u in den Randpunkten a, b sogar $(2m-1)$ -mal differenzierbar, so werden aus $[R(u, v)]_a^b$ und $[S(u, v)]_a^b$ nach Eintragen der wesentlichen Randbedingungen (6) Bilinearformen

$$\bar{F}(u, v) \quad \text{und} \quad \bar{G}(u, v)$$

der freien Ableitungen $u^{(n)}(a), u^{(n)}(b)$ und $v^{(n)}(a), v^{(n)}(b)$ sowie der höheren Ableitungen von u mit folgender Eigenschaft: ist für ein λ

$$\bar{F}(u, v) - \lambda \bar{G}(u, v) - [F_0(u, v) - \lambda G_0(u, v)] = 0$$

für alle freien Ableitungen $v^{(n)}(a), v^{(n)}(b)$, so erfüllt u auch die restlichen Randbedingungen (7) und somit alle Randbedingungen (2).

§ 3.

Beispiele.

3.1. Eigenwertaufgaben zweiter Ordnung. Für diese ist $m = 1$, also $n = 0$. Die Differentialgleichung (1) hat dann die Gestalt

$$(fy')' + hy + \lambda gy = 0,$$

wo $f = f(x)$ in $\langle a, b \rangle$ stetig differenzierbar, $h = h(x)$ und $g = g(x)$ stetig, $f \neq 0$ und $g \neq 0$ ist. Die Randbedingungen sind ²⁶⁾

$$\alpha_1 y_a + \alpha'_1 y'_a + \beta_1 y_b + \beta'_1 y'_b = 0,$$

$$\alpha_2 y_a + \alpha'_2 y'_a + \beta_2 y_b + \beta'_2 y'_b = 0.$$

²⁶⁾ Der Index a oder b bedeutet, daß $x = a$ oder $x = b$ einzutragen ist; also z. B. $y'_a = y'(a)$, $(fy'')'_a = f(a)y''(a) + f'(a)y'(a)$.

Die Matrix der Koeffizienten hat den Rang 2. Daß die Eigenwertaufgabe selbstadjungiert ist, ergibt die Bedingung

$$(\alpha_1 \alpha'_2 - \alpha'_1 \alpha_2) f_b = (\beta_1 \beta'_2 - \beta'_1 \beta_2) f_a.$$

Wird die Differentialgleichung in der Gestalt

$$-(fy')' - hy = \lambda gy$$

geschrieben, so lautet die Variationsaufgabe (10)

$$\frac{\int (fy'^2 - hy^2) dx + F_0(y, y)}{\int g y^2 dx} = \text{Min},$$

wobei $F_0(y, y)$ aus dem DIRICHLETSchen Restteil

$$[R(y, y)]_a^b = [-fy y']_a^b = f_a y_a y'_a - f_b y_b y'_b$$

durch Reduktion mittels der Randbedingungen zu bilden ist. Dabei ist vorauszusetzen, daß die Aufgabe definit ist. Nach (8) ist dafür

$$f > 0, \quad h \leq 0, \quad g \geq 0$$

vorauszusetzen. Es bleibt noch zu untersuchen, wann (9) erfüllt ist, d. h. wann $F_0(y, y) \geq 0$ gilt. Hierfür sind folgende Fälle zu unterscheiden, wobei die Randbedingungen schon in die Gestalt von wesentlichen und restlichen Randbedingungen gebracht sind:

- (a) $y_a = 0, y_b = 0; \quad F_0 = 0.$
- (b) $y_a = 0, y'_b = -\beta y_b; \quad F_0 = \beta f_b y_b^2.$
- (c) $y_b = 0, y'_a = \alpha y_a; \quad F_0 = \alpha f_a y_a^2.$
- (d) $y_a = y_b, f_a y'_a = f_b y'_b; \quad F_0 = 0.$
- (e) $y'_a = \alpha y_a + \gamma f_b y_b, \quad y'_b = -\gamma f_a y_a - \beta y_b;$
 $F_0 = \alpha f_a y_a^2 + \beta f_b y_b^2 + 2\gamma f_a f_b y_a y_b.$

Im Fall (a) sind beide Randbedingungen wesentlich, in den Fällen (b), (c), (d) ist die erste Randbedingung die wesentliche, die zweite die restliche, im Fall (e) gibt es keine wesentlichen Randbedingungen. Wie die für F_0 angegebenen Ausdrücke zeigen, ist die Aufgabe nur definit, wenn $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ und im Fall (e) außerdem $f_a f_b \gamma^2 < \alpha \beta$ ist. Die ersten vier Fälle finden sich bei HOLMGREN, während der fünfte Fall anscheinend in der Literatur nicht enthalten ist²⁷⁾.

²⁷⁾ Nach einer mündlichen Mitteilung von Herrn HAMEL hat dieser jedoch in seinen Vorlesungen auf den Fall (e) hingewiesen.

3.2. Eigenwertaufgaben vierter Ordnung mit Sturmschen Randbedingungen. Die Eigenwertaufgabe sei

$$(fy'')'' + (gy')' + hy = \lambda g_0 y$$

mit den Randbedingungen

$$\alpha_v y_a + \beta_v y'_a + \gamma_v f_a y''_a + \delta_v [(fy'')'_a + g_a y'_a] = 0 \quad (v = 1, 2),$$

$$\alpha_v y_b + \beta_v y'_b + \gamma_v f_b y''_b + \delta_v [(fy'')'_b + g_b y'_b] = 0 \quad (v = 3, 4).$$

Dabei ist $f = f(x)$ in $\langle a, b \rangle$ zweimal stetig differenzierbar, $g = g(x)$ einmal stetig differenzierbar, $h = h(x)$ und $g_0 = g_0(x)$ stetig, ferner $f \neq 0$, $g_0 \neq 0$. Die Aufgabe ist genau dann selbstadjungiert, wenn

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \delta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} \alpha_3 & \delta_3 \\ \alpha_4 & \delta_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta_3 & \gamma_3 \\ \beta_4 & \gamma_4 \end{vmatrix}$$

ist. Die Variationsaufgabe (10) lautet

$$\frac{\int (fy''^2 - gy'^2 + hy^2) dx + F_0(y, y)}{\int g_0 y^2 dx} = \text{Min},$$

wobei F_0 aus dem Dirichletschen Restteil

$$[R(y, y)]_a^b = R_b - R_a$$

mit

$$R(y, y) = [(fy')' + gy'] y - fy'y''$$

zu bilden ist. Dabei ist vorauszusetzen, daß die Aufgabe definit ist. Nach (8) ist dafür

$$f > 0, \quad g \leq 0, \quad h \geq 0, \quad g_0 \geq 0$$

vorauszusetzen. Weiter ist noch zu untersuchen, wann (9), d. h. $F_0(y, y) \geq 0$ gilt. Hierfür genügt es, R_a mittels der auf den Randpunkt a bezüglichen Randbedingungen zu reduzieren, da man dann offenbar auch R_b und somit F_0 sofort hinschreiben kann. Dabei werden folgende Fälle unterschieden, wobei wiederum die Randbedingungen in die Gestalt von wesentlichen und restlichen Randbedingungen gebracht sind.

$$(a) \quad y_a = 0, \quad y'_a = 0; \quad F_{0,a} = 0.$$

$$(b) \quad y_a = 0, \quad y''_a = \alpha y'_a; \quad F_{0,a} = -\alpha f_a y_a'^2.$$

$$(c) \quad y'_a = \alpha y_a, \quad (fy'')'_a = \beta y_a + \alpha f_a y''_a; \quad F_{0,a} = (\beta + \alpha g_a) y_a'^2.$$

$$(d) \quad f_a y''_a = \alpha y_a + \beta y'_a, \quad (fy'')'_a = \gamma y_a - (\alpha + g_a) y'_a;$$

$$F_{0,a} = \gamma y_a'^2 - 2\alpha y_a y'_a - \beta y_a'^2.$$

Bei (a) sind beide Randbedingungen wesentlich, bei (b) und (c) die ersten, bei (d) gibt es keine wesentlichen Randbedingungen. Bei (b) und (c) ist $-F_{0,a} \geq 0$, wenn $\alpha \geq 0$ bzw. $\beta + \alpha g_a \leq 0$ ist; bei (d) ist $\beta \geq 0$, $\gamma \leq 0$ und $\alpha^2 \leq |\beta\gamma|$ erforderlich.

§ 4.

Beweis des Hauptsatzes.

4. 1. Abkürzungen und Hilfsformeln. Für zulässige Funktionen $u(x)$, $v(x)$ der Eigenwertaufgabe (1), (2) und die reduzierten Restteile F_0, G_0 (vgl. 2. 5) der DIRICHLETSchen Formel wird zur Abkürzung

$$(44) \quad \begin{cases} \Phi(u, v) = \int \sum_{r=0}^m (-1)^r f_r u^{(r)} v^{(r)} dx + F_0(u, v), \\ \Psi(u, v) = \int \sum_{r=0}^n (-1)^r g_r u^{(r)} v^{(r)} dx + G_0(u, v), \\ \Phi(u) = \Phi(u, u), \quad \Psi(u) = \Psi(u, u) \end{cases}$$

gesetzt. Wegen der Symmetrie von F_0, G_0 (vgl. 2. 5) ist dann

$$(45) \quad \Phi(u, v) = \Phi(v, u), \quad \Psi(u, v) = \Psi(v, u),$$

ferner wegen der Bilinearität für beliebige Zahlen r, s

$$(46) \quad \begin{cases} \Phi(ru + sv) = r^2 \Phi(u) + 2rs \Phi(u, v) + s^2 \Phi(v), \\ \Psi(ru + sv) = r^2 \Psi(u) + 2rs \Psi(u, v) + s^2 \Psi(v). \end{cases}$$

Da hierin wegen der Definitheit (vgl. 1. 3) die linken Seiten ≥ 0 sind, folgt

$$(47) \quad |\Phi(u, v)|^2 \leq \Phi(u) \Phi(v), \quad |\Psi(u, v)|^2 \leq \Psi(u) \Psi(v).$$

4. 2. Beginn des Beweises. Für den Bereich der zulässigen Funktionen $u(x)$, für die $\Psi(u) \neq 0$ ist²⁸⁾, sei

$$(48) \quad \lambda_1 = \frac{\inf_u \Phi(u)}{\Psi(u)}.$$

Da Zähler und Nenner ≥ 0 sind, ist $\lambda_1 \geq 0$. Es soll gezeigt werden:

(a) der rechts stehende Bruch hat in dem Bereich der zulässigen Funktionen sogar ein Minimum, d. h. es gibt eine zulässige Funktion $u(x)$, für die

$$(49) \quad \Phi(u) = \lambda_1 \Psi(u)$$

ist;

(b) jede Funktion dieser Art ist sogar 2 m -mal stetig differenzierbar und erfüllt die Differentialgleichung (1) sowie die restlichen Randbedingungen (7), also alle Randbedingungen (2) und ist somit, da zulässige Funktionen $\neq 0$ sind, eine zu λ_1 gehörige Eigenfunktion der Eigenwertaufgabe (1), (2); λ_1 ist der kleinste Eigenwert.

Damit ist dann der Satz 1 von 1. 4 bewiesen.

²⁸⁾ Es gibt solche Funktionen $u(x)$. Denn es ist $g_n \neq 0$. Wählt man eine m -mal stetig differenzierbare Funktion $u(x)$, die mit ihren ersten $m-1$ Ableitungen in den Punkten a und b verschwindet, deren n -te Ableitung aber $\neq 0$ ist in einem Intervall, in dem $g_n \neq 0$ ist, so ist dies eine zulässige Funktion, und nach (8) und (9) ist $\Psi(u) > 0$.

Jedenfalls gibt es eine Folge zulässiger Funktionen $u_1(x), u_2(x), \dots$, für die $\Psi(u_h) \neq 0$ und

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\Phi(u_h)}{\Psi(u_h)} = \lambda_1$$

ist²⁹⁾. Indem man jedes u_h mit einem passenden Zahlenfaktor multipliziert, kann man erreichen, daß

$$(50) \quad \Psi(u_h) = 1 \quad (h = 1, 2, \dots),$$

also

$$(51) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} \Phi(u_h) = \lambda_1$$

ist. Diese Folge zulässiger Funktionen bleibt zunächst fest. Dann gelten folgende Hilfssätze:

4.3. Es sei $v_1(x), v_2(x), \dots$ eine Folge zulässiger Funktionen, für die

$$(52) \quad \Phi(v_h), \quad \Psi(v_h) \text{ beschränkt}$$

und

$$(53) \quad \Psi(u_h, v_h) = 0$$

ist. Dann ist

$$(54) \quad \Phi(u_h, v_h) \rightarrow 0 \quad \text{für } h \rightarrow \infty.$$

Beweis. Für beliebige Zahlen r_h, s_h sind auch $w_h = r_h u_h + s_h v_h$ zulässige Funktionen. Nach (46) ist

$$\begin{aligned} \Phi(w_h) &= r_h^2 \Phi(u_h) + 2 r_h s_h \Phi(u_h, v_h) + s_h^2 \Phi(v_h), \\ \Psi(w_h) &= r_h^2 \Psi(u_h) + 2 r_h s_h \Psi(u_h, v_h) + s_h^2 \Psi(v_h). \end{aligned}$$

Nach (50) und (53) ist also

$$\Psi(w_h) = r_h^2 + s_h^2 \Psi(v_h) = 1,$$

wenn

$$(55) \quad r_h^2 = 1 - s_h^2 \Psi(v_h)$$

ist. Man wähle $s_h > 0$ so, daß die rechte Seite dieser Gleichung > 0 und $s_h \rightarrow 0$ ist. Wegen (52) ist dann $|r_h| \rightarrow 1$; über das noch freie Vorzeichen von r_h wird weiter unten verfügt werden. Nach (48) ist nun

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\leq \frac{\Phi(w_h)}{\Psi(w_h)} = \Phi(w_h) \\ &= r_h^2 \Phi(u_h) + 2 r_h s_h \Phi(u_h, v_h) + s_h^2 \Phi(v_h), \end{aligned}$$

also nach (55)

$$\lambda_1 \leq \Phi(u_h) + 2 r_h s_h \Phi(u_h, v_h) + s_h^2 [\Phi(v_h) - \Psi(v_h)].$$

²⁹⁾ Die u_h dürfen, was später benutzt wird, auch alle übereinstimmen.

Nach (48) und (50) ist $\Phi(u_h) \geq \lambda_1$, also, da $s_h > 0$ ist,

$$2 r_h \Phi(u_h, v_h) + s_h [\Phi(v_h) - \Psi(v_h)] \geq 0$$

und somit wegen $s_h \rightarrow 0$ und (52)

$$\lim_{h \rightarrow \infty} r_h \Phi(u_h, v_h) \geq 0.$$

Wird das noch freie Vorzeichen von r_h entgegengesetzt zu dem von $\Phi(u_h, v_h)$ gewählt, so folgt hieraus wegen $|r_h| \rightarrow 1$ die Relation (54).

4.4. Jede der Folgen

$$u_1^{(v)}, u_2^{(v)}, \dots \quad (v = 0, 1, \dots, m-1)$$

ist in $a \leq x \leq b$ gleichmäßig beschränkt.

Beweis. Zunächst wird bewiesen:

(a) Zu jedem $0 \leq v \leq m-1$ und jedem h gibt es im Intervall $\langle a, b \rangle$ einen Punkt $\xi_{h,v}$, so daß die Folge

$$u_h^{(v)}(\xi_{h,v}) \quad (h = 1, 2, \dots)$$

beschränkt ist.

Angenommen, diese Behauptung sei falsch. Dann ist für ein $0 \leq v \leq m-1$

$$(56) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} \min_{a \leq x \leq b} |u_h^{(v)}(x)| = \infty,$$

und es gibt ein kleinstes v dieser Art. Ist dieses ≥ 1 , so ist

$$(57) \quad |u_h^{(v-1)}(\xi_{h,v-1})| \text{ beschränkt, etwa } \leq A_{v-1}$$

für eine geeignet gewählte Folge von Punkten

$$\xi_{h,v-1} \quad (h = 1, 2, \dots)$$

des Intervalls $\langle a, b \rangle$. Weiter werden nur diejenigen h betrachtet, für die

$$\min_{a \leq x \leq b} |u_h^{(v)}| > 0$$

ist. Nach (56) gibt es unendlich viele solcher h , und für sie hat jedes $u_h^{(v)}(x)$ als stetige Funktion ein festes Vorzeichen. Daher ist für diese h

$$|u_h^{(v-1)}(x) - u_h^{(v-1)}(\xi_{h,v-1})| = \left| \int_{\xi_{h,v-1}}^x |u_h^{(v)}(x)| dx \right|,$$

also wegen (57)

$$|u_h^{(v-1)}(x)| \geq \left| \int_{\xi_{h,v-1}}^x |u_h^{(v)}(x)| dx \right| - A_{v-1}.$$

Es sei nun $\langle x_1, x_2 \rangle$ ein festes Teilintervall von $\langle a, b \rangle$. Dann gibt es in $\langle x_1, x_2 \rangle$ für jedes h ein Teilintervall $i_{h,v-1}$ der Länge $\frac{x_2 - x_1}{4}$, so daß zwischen dem

Intervall $i_{h, v-1}$ und dem Punkt $\xi_{h, v-1}$ ein Teilintervall $i_{h, v-1}^*$ der Länge $\frac{x_2 - x_1}{4}$ liegt. Für diese Intervalle folgt aus der obigen Ungleichung

$$\begin{aligned} \min_{x \text{ in } i_{h, v-1}} |u_h^{(v-1)}(x)| &\geq \int_{i_{h, v-1}^*} |u_h^{(v-1)}(x)| dx - A_{v-1} \\ &\geq \frac{x_2 - x_1}{4} \min_{a \leq x \leq b} |u_h^{(v-1)}(x)| - A_{v-1}, \end{aligned}$$

also nach (56)

$$(58) \quad \overline{\lim}_{h \rightarrow \infty} \min_{x \text{ in } i_{h, v-1}} |u_h^{(v-1)}(x)| = \infty.$$

Weiter ist, falls sogar $v \geq 2$ ist, nach der Minimaleigenschaft von v auch

$$(59) \quad |u_h^{(v-2)}(\xi_{h, v-2})| \text{ beschränkt, etwa } \leq A_{v-2}$$

für eine geeignet gewählte Zahlenfolge

$$\xi_{h, v-2} \quad (h = 1, 2, \dots).$$

Aus (58) folgt, daß $u_h^{(v-1)}(x)$ in $i_{h, v-1}$ für unendlich viele h ein festes Vorzeichen hat. Für diese h ergibt sich mit (59) wie vorhin

$$|u_h^{(v-2)}(x)| \geq \left| \int_{\xi_{h, v-2}}^x |u_h^{(v-1)}(x)| dx \right| - A_{v-2}.$$

In jedem Intervall $i_{h, v-1}$ gibt es ein Teilintervall $i_{h, v-2}$ der Länge $\frac{x_2 - x_1}{4^2}$, so daß zwischen dem Teilintervall $i_{h, v-2}$ und dem Punkt $\xi_{h, v-2}$ noch ein Teilintervall $i_{h, v-2}^*$ von $i_{h, v-1}$ mit der Länge $\frac{x_2 - x_1}{4^2}$ liegt. Für diese Intervalle folgt aus der obigen Ungleichung

$$\begin{aligned} \min_{x \text{ in } i_{h, v-2}} |u_h^{(v-2)}(x)| &\geq \int_{i_{h, v-2}^*} |u_h^{(v-1)}(x)| dx - A_{v-2} \\ &\geq \frac{x_2 - x_1}{4^2} \min_{x \text{ in } i_{h, v-1}} |u_h^{(v-1)}(x)| - A_{v-2}, \end{aligned}$$

also wegen (58)

$$\overline{\lim}_{h \rightarrow \infty} \min_{x \text{ in } i_{h, v-2}} |u_h^{(v-2)}(x)| = \infty.$$

In dieser Weise kann man fortfahren. Man erhält schließlich

$$\overline{\lim}_{h \rightarrow \infty} \min_{x \text{ in } i_{h, 0}} |u_h(x)| = \infty$$

für eine Folge von Teilintervallen $i_{h, 0}$ der Länge $\frac{x_2 - x_1}{4^v}$ in dem Intervall $\langle x_1, x_2 \rangle$.

Das führt aber zu einem Widerspruch, wenn für $\langle x_1, x_2 \rangle$ ein Intervall gewählt wird, in dem $f_0(x) + g_0(x) \geq \frac{1}{A} > 0$ ist. Dann ergibt sich nämlich

mit der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung für jedes $i_{h,0}$, wenn dieses die Endpunkte ξ_h , η_h hat,

$$\begin{aligned} \left(\int_{\xi_h}^{\eta_h} 1 \cdot |u_h(x)| dx \right)^2 &\leq (\eta_h - \xi_h) \int_{\xi_h}^{\eta_h} u_h^2 dx \\ &\leq \frac{x_2 - x_1}{4^\nu} A \int_{\xi_h}^{\eta_h} (f_0 u_h^2 + g_0 u_h^2) dx \\ &\leq \frac{x_2 - x_1}{4^\nu} A [\Phi(u_h) + \Psi(u_h)] \leq B^2, \end{aligned}$$

wo B nach (50) und (51) von h unabhängig ist. Hieraus folgt

$$\text{Min}_{x \text{ in } i_{h,0}} |u_h(x)| \leq \frac{1}{\eta_h - \xi_h} \int_{\xi_h}^{\eta_h} |u_h(x)| dx \leq \frac{4^\nu B}{x_2 - x_1}.$$

Damit ist der gewünschte Widerspruch erreicht und somit die Behauptung (a) bewiesen.

(b) Mit (a) ergibt sich nun die ursprüngliche Behauptung so: Aus (51) folgt, daß die Folge der $\Phi(u_h)$ beschränkt ist. Nach (44) ist dann wegen der Definitheit der Aufgabe [vgl. (44) und (8)] erst recht die Folge

$$\int_a^b (-1)^m f_m u_h^{(m)^2} dx \quad (h = 1, 2, \dots)$$

beschränkt, also, da $(-1)^m f_m > 0$ und stetig ist, auch

$$\int_a^b u_h^{(m)^2} dx \quad (h = 1, 2, \dots)$$

beschränkt, also nach der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung

$$\int_a^b 1 \cdot |u_h^{(m)}| dx \leq \left\{ (b-a) \int_a^b u_h^{(m)^2} dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

beschränkt. Aus

$$u_h^{(m-1)}(x) = u_h^{(m-1)}(\xi_{h,m-1}) + \int_{\xi_{h,m-1}}^x u_h^{(m)} dx$$

folgt weiter, daß die $u_h^{(m-1)}$ in $\langle a, b \rangle$ gleichmäßig beschränkt sind, und hieraus mit

$$u_h^{(m-2)}(x) = u_h^{(m-2)}(\xi_{h,m-2}) + \int_{\xi_{h,m-2}}^x u_h^{(m-1)} dx$$

die gleichmäßige Beschränktheit der $u_h^{(m-2)}(x)$; usw. Damit ist die Behauptung bewiesen.

4.5. Jede der Folgen

$$u_1^{(v)}, u_2^{(v)}, \dots \quad (v = 0, 1, \dots, m-1)$$

ist in $\langle a, b \rangle$ gleichgradig stetig.

Beweis. Für $0 \leq v \leq m-2$ ist nach 4.4 bei passend gewähltem A

$$|u_h^{(v)}(x_2) - u_h^{(v)}(x_1)| = \left| \int_{x_1}^{x_2} u_h^{(v+1)}(x) dx \right| \leq |x_2 - x_1| A,$$

d. h. für $v \leq m-2$ ist die Behauptung richtig. Für $v = m-1$ ist nach der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung, da $(-1)^m f_m \geq B > 0$ bei passend gewähltem B ist,

$$\begin{aligned} (u_h^{(m-1)}(x_2) - u_h^{(m-1)}(x_1))^2 &= \left(\int_{x_1}^{x_2} 1 \cdot u_h^{(m)}(x) dx \right)^2 \\ &\leq |x_2 - x_1| \left| \int_{x_1}^{x_2} u_h^{(m)^2} dx \right| \\ &\leq |x_2 - x_1| \frac{1}{B} \int_a^b (-1)^m f_m u_h^{(m)^2} dx \\ &\leq |x_2 - x_1| \frac{\Phi(u_h)}{B}, \end{aligned}$$

und hieraus folgt die Behauptung auch für $v = m-1$, da die $\Phi(u_h)$ wegen (51) beschränkt sind.

4.6. Für jede zulässige Funktion $w(x)$ ist

$$\Phi(u_h, w) - \lambda_1 \Psi(u_h, w) \rightarrow 0 \quad \text{für } h \rightarrow \infty.$$

Beweis. Auch

$$v_h = w - u_h \Psi(u_h, w)$$

ist eine zulässige Funktion. Für diese ist nach (46)

$$\Phi(v_h) = \Phi(w) - 2\Psi(u_h, w)\Phi(u_h, w) + \Psi^2(u_h, w)\Phi(u_h).$$

Nach (50) und (51) sind die $\Phi(u_h)$, $\Psi(u_h)$ beschränkt, also nach (47) auch die $\Phi(u_h, w)$, $\Psi(u_h, w)$, also auch die $\Phi(v_h)$. Weiter ist nach (46) und (50)

$$\begin{aligned} \Psi(v_h) &= \Psi(w) - 2\Psi^2(u_h, w) + \Psi^2(u_h, w)\Psi(u_h) \\ &= \Psi(w) - \Psi^2(u_h, w), \end{aligned}$$

also sind die $\Psi(v_h)$ ebenfalls beschränkt. Schließlich ist

$$\begin{aligned} \Psi(u_h, v_h) &= \Psi(u_h, w) - \Psi(u_h, w)\Psi(u_h) \\ &= \Psi(u_h, w) - \Psi(u_h, w) = 0. \end{aligned}$$

Daher ist nach 4.3

$$\Phi(u_h, v_h) \rightarrow 0 \quad \text{für } h \rightarrow \infty,$$

d. h.

$$\Phi(u_h, w) - \Phi(u_h) \Psi(u_h, w) \rightarrow 0$$

oder

$$\Phi(u_h, w) - \lambda_1 \Psi(u_h, w) - [\Phi(u_h) - \lambda_1] \Psi(u_h, w) \rightarrow 0.$$

Da die $\Psi(u_h, w)$, wie vorher gezeigt, beschränkt sind, folgt hieraus die Behauptung nach (51).

4.7. Beginn des Beweises der Behauptung (a): Für eine passend gewählte Teilfolge der Indizes h konvergieren die $u_h(x)$, nebst den $m-1$ ersten Ableitungen gegen eine zulässige Funktion $u(x)$ und deren $m-1$ ersten Ableitungen gleichmäßig im Intervall $\langle a, b \rangle$.

Beweis. Nach 4.4 und 4.5 ist die Folge

$$u_h^{(m-1)}(x) \quad (h = 1, 2, \dots)$$

in $\langle a, b \rangle$ gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig. Nach dem Satz von ARZELÀ gibt es daher eine Teilfolge, die in $\langle a, b \rangle$ gleichmäßig konvergiert und die wieder mit $u_h^{(m-1)}(x)$ bezeichnet sei. Die Funktion

$$(60) \quad u_{m-1}(x) = \lim_{h \rightarrow \infty} u_h^{(m-1)}(x)$$

ist dann in $\langle a, b \rangle$ stetig. Wegen 4.4 kann die Teilfolge überdies so gewählt werden, daß auch jede der Folgen

$$(61) \quad u_1^{(v)}(a), u_2^{(v)}(a), \dots \quad (v = 0, 1, \dots, m-2)$$

konvergiert. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz von (60) und der Konvergenz von (61) für $v = m-2$ ist dann³⁰⁾ auch die Folge

$$u_h^{(m-2)}(x) \quad (h = 1, 2, \dots)$$

gleichmäßig konvergent, und, wenn ihr Grenzwert $u_{m-2}(x)$ ist, gilt $u'_{m-2} = u_{m-1}$. Ebenso ergibt sich, daß die Folge

$$u_h^{(m-3)}(x) \quad (h = 1, 2, \dots)$$

gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $u_{m-3}(x)$ konvergiert, für die $u'_{m-3} = u_{m-2}$ gilt, und allgemein, daß

$$u_h^{(v)}(x) \quad (h = 1, 2, \dots)$$

für jedes $0 \leq v \leq m-1$ gegen eine Grenzfunktion $u_v(x)$ konvergiert, für die

$$u'_v(x) = u_{v+1}(x) \quad (0 \leq v \leq m-2)$$

³⁰⁾ Vgl. z. B. K. KNOPP, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, 3. Aufl., S. 353. Berlin 1931; dort für unendliche Reihen statt Folgen formuliert.

gilt. Wird $u(x) = u_0(x)$ gesetzt, so ist also

$$\lim_{h \rightarrow \infty} u_h^{(v)}(x) = u^{(v)}(x) \quad \text{für } 0 \leq v \leq m-1,$$

und zwar gleichmäßig in $\langle a, b \rangle$. Da in $\Psi(u_h)$ nur Ableitungen der Ordnung $\leq n \leq m-1$ vorkommen, ist $\Psi(u) = \lim \Psi(u_h) = 1$, also sicher $u \neq 0$, und da die u_h die wesentlichen Randbedingungen (6) erfüllen und in diesen nur Ableitungen der Ordnung $\leq m-1$ vorkommen, erfüllt auch u diese Randbedingungen und ist somit eine zulässige Funktion.

4.8. Abschluß des Beweises der Behauptung (a): Die Funktion $u(x)$ von 4.7 ist sogar $2m$ -mal stetig differenzierbar und erfüllt die Differentialgleichung (1) mit $\lambda = \lambda_1$ sowie die Gleichung (49).

Beweis. Es sei $w(x)$ eine beliebige $(m+1)$ -mal stetig differenzierbare Funktion, welche die Randbedingungen

$$(62) \quad w^{(v)}(a) = w^{(v)}(b) = 0 \quad \text{für } v = 0, 1, \dots, m$$

erfüllt. Für diese Funktion ist

$$F_0(u_h, w) = G_0(u_h, w) = 0,$$

da in diesen bilinearen Ausdrücken jedes Glied eine Ableitung $w^{(v)}(a)$ oder $w^{(v)}(b)$ mit $v \leq m-1$ enthält. Daher ist nach (44)

$$(63) \quad \Phi(u_h, w) - \lambda_1 \Psi(u_h, w) = \int \sum_{v=0}^m (-1)^v f_v u_h^{(v)} w^{(v)} dx - \lambda_1 \int \sum_{v=0}^n (-1)^v g_v u_h^{(v)} w^{(v)} dx.$$

Die rechte Seite wird durch partielle Integration so umgeformt, daß jedes Glied den Faktor $w^{(m+1)}$ enthält. Zu dem Zweck wird

$$(64) \quad \begin{cases} f_v u_h^{(v)} = F_v^{[0]}(u_h), & g_v u_h^{(v)} = G_v^{[0]}(u_h), \\ \int_a^x F_v^{[x-1]}(u_h) dx = F_v^{[x]}(u_h), & \int_a^x G_v^{[x-1]}(u_h) dx = G_v^{[x]}(u_h) \end{cases}$$

gesetzt. Dann ist wegen (62)

$$\begin{aligned} \int f_v u_h^{(v)} w^{(v)} dx &= - \int F_v^{[1]}(u_h) w^{(v+1)} dx \\ &= (-1)^2 \int F_v^{[2]}(u_h) w^{(v+2)} dx \\ &= (-1)^r \int F_v^{[r]}(u_h) w^{(v+r)} dx \quad \text{für } v+r \leq m+1 \end{aligned}$$

und

$$\int g_r u_h^{(r)} w^{(v)} dx = (-1)^r \int G_v^{[r]}(u_h) w^{(v+r)} dx.$$

Für $r = m - v + 1$ erhält man hieraus

$$\begin{aligned} \int f_v u_h^{(v)} w^{(v)} dx &= (-1)^{m-v+1} \int F_v^{[m-v+1]}(u_h) w^{(m+1)} dx, \\ \int g_v u_h^{(v)} w^{(v)} dx &= (-1)^{m-v+1} \int G_v^{[m-v+1]}(u_h) w^{(m+1)} dx. \end{aligned}$$

Dies wird in die rechte Seite von (63) eingetragen. Da die linke Seite nach 4. 6 gegen 0 strebt, ist

$$(65) \quad \int \left\{ \sum_{v=0}^m F_v^{[m-v+1]}(u_h) - \lambda_1 \sum_{v=0}^n G_v^{[m-v+1]}(u_h) \right\} w^{(m+1)} dx \rightarrow 0 \text{ für } h \rightarrow \infty.$$

In der ersten Summe wird das Glied mit $v = m$ noch umgeformt in

$$(66) \quad F_m^{[1]}(u_h) = \int_a^x f_m u_h^{(m)} dx = [f_m u_h^{(m-1)}]_a^x - \int_a^x f'_m u_h^{(m-1)} dx.$$

Dann treten in allen Gliedern von (65) nur Ableitungen $u_h^{(v)}$ mit $v \leq m-1$ auf, und man kann nach 4. 7 für eine wieder mit u_h bezeichnete Teilfolge den Grenzübergang gliedweise und unter dem Integralzeichen ausführen. Man erhält dann für $h \rightarrow \infty$

$$\int \left\{ \sum_{v=0}^m F_v^{[m-v+1]}(u) - \lambda_1 \sum_{v=0}^n G_v^{[m-v+1]}(u) \right\} w^{(m+1)} dx = 0,$$

und zwar für jede Funktion $w(x)$ mit den am Anfang des Beweises genannten Eigenschaften. Nach einem Satz von ZERMELO³¹⁾ ist daher

$$(67) \quad \sum_{v=0}^m F_v^{[m-v+1]}(u) - \lambda_1 \sum_{v=0}^n G_v^{[m-v+1]}(u) = P_m(x),$$

wo P_m ein Polynom des Grades $\leq m$ ist. Die rechte Seite und somit auch die linke Seite ist also sicher m -mal stetig differenzierbar.

Jedes der Glieder mit $v \leq m-1$ in (67) ist nach (64) für sich differenzierbar, also auch das höchste Glied der ersten Summe ($v = m$). Dieses ist durch die rechte Seite von (66) mit u statt u_h gegeben. Darin ist das letzte Integral differenzierbar. Daher ist auch das erste Glied $[f_m u_h^{(m-1)}]_a^x$ differenzierbar. Da f_m differenzierbar ist, ist also $u^{(m-1)}$ nochmals differenzierbar, und es gilt somit die vollständige Gleichung (66) mit u statt u_h .

Durch einmalige Differentiation von (67) folgt nun bei Berücksichtigung von (64)

$$f_m u^{(m)} + \sum_{v=0}^{m-1} F_v^{[m-v]}(u) - \lambda_1 \sum_{v=0}^n G_v^{[m-v]}(u) = P_{m-1}.$$

Da $n < m$ ist, sind hierin nach (64) alle Glieder der ersten und zweiten Summe einzeln differenzierbar, also auch $u^{(n)}$, da f_m differenzierbar ist. Die Ausführung der Differentiation ergibt

$$(f_m u^{(m)})' + f_{m-1} u^{(m-1)} + \sum_{v=0}^{m-2} F_v^{[m-v-1]}(u) - \lambda_1 \sum_{v=0}^n G_v^{[m-v-1]}(u) = P_{m-2},$$

wobei jedoch von der letzten Summe das Glied mit $v = n$ in der Gestalt $g_{m-1} u^{(m-1)}$ abzutrennen ist, falls $n = m-1$ ist. Jetzt sind links sicher

³¹⁾ Math. Annalen 58 (1904), S. 558–564.

wieder alle Glieder bis auf das erste differenzierbar, also auch das erste, also ist $u^{(m)}$ zweimal differenzierbar. Führt man die Differentiationen bei Beachtung von (64) aus und fährt man in dieser Weise fort, so ergibt sich schließlich, daß u $2m$ -mal stetig differenzierbar ist und die Gleichung

$$\sum_{v=0}^m (f_v u^{(v)})^{(v)} = \lambda_1 \sum_{v=0}^n (g_v u^{(v)})^{(v)},$$

d. h. die Gleichung (1) mit $\lambda = \lambda_1$ erfüllt.

Es bleibt noch zu beweisen, daß u die Gleichung (49) erfüllt. Da u , wie bewiesen, eine zulässige Funktion ist, die sogar $2m$ -mal stetig differenzierbar ist, kann in 4.6 $w = u$ gewählt werden. D. h. es ist

$$\Phi(u_h, u) - \lambda_1 \Psi(u_h, u) \rightarrow 0 \quad \text{für } h \rightarrow \infty.$$

Nach 4.7 kann hierin bei allen Gliedern, die nur Ableitungen $u_h^{(v)}$ mit $v \leq m - 1$ enthalten, der Grenzübergang ausgeführt werden, indem $u_h = u$ gesetzt wird. Das einzige Glied, das eine höhere Ableitung enthält, ist, abgesehen vom Vorzeichen, nach (44)

$$\int f_m u_h^{(m)} u^{(m)} dx = [u_h^{(m-1)} f_m u^{(m)}]_a - \int u_h^{(m-1)} (f_m u^{(m)})' dx.$$

Jetzt kann auch hierin der Grenzübergang ausgeführt werden, indem man rechts $u_h = u$ setzt. Aus der rechten Seite erhält man aber wieder die linke Seite mit $u_h = u$. Aus der obigen Limesgleichung erhält man also in der Tat

$$\Phi(u) - \lambda_1 \Psi(u) = 0,$$

wie behauptet war.

4.9. Beweis der Behauptung (b). Die Schlüsse der vorangehenden Nummern gelten auch, wenn alle $u_h = u$ übereinstimmen. Wenn für eine zulässige Funktion $u(x)$

$$(68) \quad \frac{\Phi(u)}{\Psi(u)} = \lambda_1 \quad \text{und} \quad \Psi(u) \neq 0$$

ist, wo λ_1 durch (48) bestimmt ist, so ist daher $u(x)$ sogar $2m$ -mal stetig differenzierbar und eine eigentliche Lösung von

$$(69) \quad F(u) - \lambda_1 G(u) = 0.$$

Es sei nun $w(x)$ eine beliebige zulässige Funktion. Da $u(x)$ $2m$ -mal stetig differenzierbar ist, kann die Formel (17) angewendet werden. Werden in $[T(u, v)]_a$ für u und w die wesentlichen Randbedingungen eingetragen, so ergibt sich (vgl. den letzten Absatz von 2.5)

$$\begin{aligned} \int [F(u) - \lambda_1 G(u)] w dx = & \int \left\{ \sum_{v=0}^m (-1)^v f_v u^{(v)} w^{(v)} - \lambda_1 \sum_{v=0}^n (-1)^v g_v u^{(v)} w^{(v)} \right\} dx \\ & + \bar{F}(u, w) - \lambda_1 \bar{G}(u, w). \end{aligned}$$

Nach (69) ist hierin die linke Seite = 0. Nach (68) ist, wenn die Ausdrücke (44) eingetragen werden,

$$0 = \int \left\{ \sum_{r=0}^m (-1)^r f_r u^{(r)} w^{(r)} - \lambda_1 \sum_{r=0}^n (-1)^r g_r u^{(r)} w^{(r)} \right\} dx + F_0(u, w) - \lambda_1 G_0(u, w).$$

Aus den beiden Gleichungen folgt

$$\bar{F}(u, w) - \lambda_1 \bar{G}(u, w) - \{F_0(u, w) - \lambda_1 G_0(u, w)\} = 0$$

für beliebige zulässige Funktionen w , insbesondere also für beliebige freie Ableitungen von w . Nach 2. 5 erfüllt dann u auch die restlichen Randbedingungen (7), also alle Randbedingungen, und ist somit eine zu λ_1 gehörige Eigenfunktion.

Endlich ist λ_1 der kleinste Eigenwert. Denn ist λ_0 irgendein Eigenwert und $y(x)$ eine zu diesem gehörige Eigenfunktion, so ist nach (17), 2. 5 und (44), wenn alle Randbedingungen eingetragen werden,

$$0 = \int [F(y) - \lambda_0 G(y)] y dx = \Phi(y) - \lambda_0 \Psi(y).$$

Hierin ist

$$\int y G(y) dx = \Psi(y) \neq 0,$$

da sonst nach der obigen Gleichung auch

$$\int y F(y) dx = \Phi(y) = 0$$

wäre, und das nach S. 71, Fußnote 20 ausgeschlossen ist. Es ist also

$$\lambda_0 = \frac{\Phi(y)}{\Psi(y)},$$

und dieser Bruch ist $\geq \lambda_1$ nach der Definition (48) von λ_1 .

§ 5.

Zusätzliche Bemerkungen.

5. 1. Die höheren Eigenwerte. Die Festlegung des kleinsten Eigenwertes nach Satz 1 läßt sich in der bekannten Weise auch auf die höheren Eigenwerte ausdehnen.

Satz 2. Sind $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_r$ die ersten r Eigenwerte und ist $\psi_1(x), \dots, \psi_r(x)$ ein zu diesem gehöriges Orthogonalsystem von Eigenfunktionen, d. h. ist

$$\Psi(\psi_p, \psi_q) = 0 \quad (p \neq q; p, q \leq r),$$

so gibt es stets einen nächstgrößeren Eigenwert λ_{r+1} , und es ist

$$(70) \quad \lambda_{r+1} = \min_u \frac{\Phi(u)}{\Psi(u)},$$

wobei jetzt nur solche zulässigen Funktionen $u(x)$ zu betrachten sind, für die

$$\Psi(u) \neq 0 \quad \text{und} \quad \Psi(u, \psi_p) = 0 \quad (p = 1, \dots, r)$$

ist.

Es gibt also unendlich viele Eigenwerte, und man erhält durch dieses Verfahren jeden Eigenwert in seiner Vielfachheit.

Für den Beweis dieses Satzes ist nur folgende zusätzliche Überlegung nötig: Sind $\psi_1, \dots, \psi_r$ zulässige Funktionen, für die

$$(71) \quad \Psi(\psi_p) \neq 0^{32}), \quad \Psi(\psi_p, \psi_q) = 0 \quad (p \neq q; p, q \leq r)$$

gilt, so gibt es zulässige Funktionen $u(x)$ mit

$$(72) \quad \Psi(u) \neq 0, \quad \Psi(u, \psi_p) = 0 \quad (p = 1, \dots, r).$$

Man wähle nämlich im Innern von $\langle a, b \rangle$ ein Intervall $\langle \alpha, \beta \rangle$, in dem $g_n(x) \neq 0$ ist. Das Intervall soll außerdem so klein gewählt werden, daß

$$(73) \quad \sum_{q=1}^r \frac{1}{\Psi(\psi_q)} \int_{\alpha}^{\beta} \sum_{v=0}^n (-1)^v g_v \psi_q^{(v)2} dx < 1$$

ist. Man wähle weiter eine m -mal stetig differenzierbare Funktion $u_0(x)$, die $\neq 0$ in $\alpha < x < \beta$ und sonst $= 0$ ist; dann ist offenbar $F_0(u_0, \psi_p) = 0$, also

$$(74) \quad \Psi(u_0, \psi_p) = \int_{\alpha}^{\beta} \sum_{v=0}^n (-1)^v g_v u_0^{(v)} \psi_p^{(v)} dx \quad (p = 1, \dots, r).$$

Die Funktion u_0 läßt sich außerdem so wählen, daß $u_0^{(n)} \neq 0$, also

$$(75) \quad \Psi(u_0) = \int_{\alpha}^{\beta} \sum_{v=0}^n (-1)^v g_v u_0^{(v)2} dx > 0$$

ist. Für beliebige Zahlen ϱ_q ist auch

$$u(x) = u_0 + \sum_{q=1}^r \varrho_q \psi_q$$

eine zulässige Funktion, und wegen (71) ist

$$(76) \quad \Psi(u, \psi_p) = \Psi(u_0, \psi_p) + \varrho_p \Psi(\psi_p) \quad (p = 1, \dots, r)$$

und

$$\Psi(u) = \Psi(u_0) + 2 \sum_{q=1}^r \varrho_q \Psi(u_0, \psi_q) + \sum_{q=1}^r \varrho_q^2 \Psi(\psi_q).$$

³²⁾ Für Eigenfunktionen ψ_p ist diese Ungleichung von selbst erfüllt.

Nach (76) können die ϱ_p so gewählt werden, daß die letzten r der Gleichungen (72) erfüllt sind. Dann ist

$$\begin{aligned}\Psi(u) &= \Psi(u_0) - \sum_{q=1}^r \varrho_q^2 \Psi(\varphi_q) \\ &= \Psi(u_0) - \sum_{q=1}^r \frac{\Psi^2(u_0, \varphi_q)}{\Psi(\varphi_q)}.\end{aligned}$$

Hierin ist nach (74), der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung³³⁾ und (75)

$$\begin{aligned}\Psi^2(u_0, \varphi_q) &= \left(\int_{\alpha}^{\beta} \sum_{v=0}^n \sqrt{(-1)^v g_v} u_0^{(v)} \cdot \sqrt{(-1)^v g_v} \varphi_q^{(v)} dx \right)^2 \\ &\leq \int_{\alpha}^{\beta} \sum_{v=0}^n (-1)^v g_v u_0^{(v)2} dx \cdot \int_{\alpha}^{\beta} \sum_{v=0}^n (-1)^v g_v \varphi_q^{(v)2} dx \\ &= \Psi(u_0) \int_{\alpha}^{\beta} \sum_{v=0}^n (-1)^v g_v \varphi_q^{(v)2} dx.\end{aligned}$$

Daher ist

$$\Psi(u) \geq \Psi(u_0) \left(1 - \sum_{q=1}^r \frac{1}{\Psi(\varphi_q)} \int_{\alpha}^{\beta} \sum_{v=0}^n (-1)^v g_v \varphi_q^{(v)2} dx \right) > 0,$$

wegen (73) und (75).

Mit Benutzung dieser Hilfsbetrachtung ergibt sich der Satz 2 durch Schluß von r auf $r+1$. Ist der Satz schon für $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ bewiesen, so gibt es eine zulässige Funktion $u(x)$, welche die Relationen (72) erfüllt. Man macht nun den Ansatz (70) und folgt dem Beweis zu Satz 1. Es ergibt sich dann, daß λ_{r+1} der erste Eigenwert $\geq \lambda_r$ ist und daß man eine zu λ_{r+1} gehörige Eigenfunktion erhält, die zu $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ orthogonal ist.

5.2. Besselsche Ungleichung und Parsevalsche Formel. Es sei jetzt $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$ ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem von Eigenfunktionen der Eigenwertaufgabe (1), (2), also

$$(77) \quad \Psi(\varphi_p, \varphi_q) = e_{p,q};$$

$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ seien die zugehörigen Eigenwerte. In K III, S. 269 waren als Fourier-Koeffizienten einer stetigen Funktion $\varphi(x)$ in bezug auf diese Eigenwertaufgabe die Zahlen

$$(78) \quad a_p = \int \varphi(x) G(\varphi_p) dx$$

bezeichnet. Für zulässige Funktionen $\varphi(x)$ in dem dortigen Sinne, d. h. für Funktionen $\varphi(x)$, die $2m$ -mal stetig differenzierbar sind und alle $2m$ Randbedingungen erfüllen, waren dann BESSELSche Ungleichung und PARSEVALSche Formel abgeleitet.

³³⁾ Für die hier benutzte Form der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung siehe K III, S. 268, Fußnote 16.

Wird für zulässige Funktionen $\varphi(x)$ in dem jetzigen Sinne der Begriff der *Fourier-Koeffizienten* dahin abgeändert, daß diese

$$(79) \quad a_p = \Psi(\varphi, \psi_p)$$

sind³⁴⁾, so besteht der

Satz 3. Für die Fourier-Koeffizienten einer zulässigen Funktion $\varphi(x)$ gilt

$$(80) \quad \sum_p \lambda_p a_p^2 \leq \Phi(\varphi) \quad (\text{BESSELSche Ungleichung}),$$

$$(81) \quad \sum_p a_p^2 = \Psi(\varphi) \quad (\text{PARSEVALSche Formel}).$$

Ist auch $\psi(x)$ eine zulässige Funktion und sind die b_p ihre Fourier-Koeffizienten, so ist

$$(82) \quad \sum_p a_p b_p = \Psi(\varphi, \psi).$$

Beweis. Aus (17) erhält man für $\lambda = \lambda_p$, $u = \psi_p$, $v = \varphi$, da dann der Integrand der linken Seite Null ist,

$$\int \left\{ \sum_{v=0}^m (-1)^v f_v \psi_p^{(v)} \varphi^{(v)} - \lambda_p \sum_{v=0}^n g_v \psi_p^{(v)} \varphi^{(v)} \right\} dx + [R(\psi_p, \varphi)]_a^b - \lambda_p [S(\psi_p, \varphi)]_a^b = 0.$$

Trägt man nun in die Restteile $[R(\psi_p, \varphi)]_a^b$, $[S(\psi_p, \varphi)]_a^b$ alle $2m$ Randbedingungen für die ψ_p und die wesentlichen Randbedingungen für φ ein, so gehen diese Ausdrücke nach 2. 5 in $F_0(\psi_p, \varphi)$, $G_0(\psi_p, \varphi)$ über. Bei Berücksichtigung von (44) wird daher aus der obigen Gleichung

$$\Phi(\varphi, \psi_p) = \lambda_p \Psi(\varphi, \psi_p).$$

Hiermit und mit (77), (79) erhält man für beliebige h nach (46)

$$\begin{aligned} \Phi\left(\varphi - \sum_{p=1}^h a_p \psi_p\right) &= \Phi(\varphi) - 2 \sum_p a_p \Phi(\varphi, \psi_p) + \sum_{p,q} a_p a_q \Phi(\psi_p, \psi_q) \\ &= \Phi(\varphi) - 2 \sum_p \lambda_p a_p \Psi(\varphi, \psi_p) + \sum_{p,q} a_p a_q \lambda_q \Psi(\psi_p, \psi_q) \\ (83) \quad &= \Phi(\varphi) - 2 \sum_p \lambda_p a_p^2 + \sum_p \lambda_p a_p^2 \\ &= \Phi(\varphi) - \sum_p \lambda_p a_p^2. \end{aligned}$$

Da die Eigenwertaufgabe definit ist, ist die linke Seite dieser Gleichung ≥ 0 . Damit ist (80) bereits bewiesen.

Für

$$\chi_h(x) = \varphi - \sum_{p=1}^h a_p \psi_p$$

und $1 \leq q \leq h$ ist nach (79) und (77)

$$\Psi(\chi_h, \psi_q) = \Psi(\varphi, \psi_q) - \sum_p a_p \Psi(\psi_p, \psi_q) = a_q - a_q = 0,$$

³⁴⁾ Für zulässige Funktionen φ in dem früheren Sinne stimmen die rechten Seiten von (78) und (79) nach 2. 5 überein.

d. h. χ_h orthogonal zu $\psi_1, \dots, \psi_h$. Ist $\mathcal{P}(\chi_h) > 0$, so ist daher nach Satz 2

$$\lambda_{h+1} \leq \frac{\Phi(\chi_h)}{\mathcal{P}(\chi_h)},$$

also, wenn h so groß gewählt wird, daß $\lambda_{h+1} > 0$ ist,

$$\mathcal{P}(\chi_h) \leq \frac{\Phi(\chi_h)}{\lambda_{h+1}},$$

und das gilt auch, wenn $\mathcal{P}(\chi_h) = 0$ ist. Nach (83) ist $\Phi(\chi_h) \leq \Phi(\varphi)$. Für $h \rightarrow \infty$ ist daher $\mathcal{P}(\chi_h) \rightarrow 0$. Es ist aber

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\chi_h) &= \mathcal{P}(\varphi) - 2 \sum_p a_p \mathcal{P}(\varphi, \psi_p) + \sum_{p,q} a_p a_q \mathcal{P}(\psi_p, \psi_q) \\ &= \mathcal{P}(\varphi) - 2 \sum a_p^2 + \sum a_p^2 \\ &= \mathcal{P}(\varphi) - \sum_{p=1}^h a_p^2, \end{aligned}$$

also

$$\sum_{p=1}^h a_p^2 \rightarrow \mathcal{P}(\varphi),$$

womit (81) bewiesen ist.

Aus (81) mit $\varphi + \psi$ statt φ ergibt sich

$$\sum (a_p + b_p)^2 = \mathcal{P}(\varphi + \psi),$$

also

$$\sum a_p^2 + \sum b_p^2 + 2 \sum a_p b_p = \mathcal{P}(\varphi) + \mathcal{P}(\psi) + 2 \mathcal{P}(\varphi, \psi).$$

Hieraus folgt, wenn man (81) und dieselbe Gleichung für ψ statt φ subtrahiert, die Gleichung (82).

5. 3. Festlegung der Eigenwerte durch das Maximum-Minimum-Prinzip.

Satz 4. Für integrierbare³⁵⁾ Funktionen $w_\nu(x)$ sei

$$m(w_1, \dots, w_{p-1}) = \min_y \frac{\Phi(y)}{\mathcal{P}(y)},$$

wo die y beliebige zulässige Funktionen sein dürfen, für die $\mathcal{P}(y) > 0$ und

$$(84) \quad \int w_\nu y \, dx = 0 \quad (\nu = 1, \dots, p-1)$$

ist. Dann ist $m \leq \lambda_p$ und

$$\lambda_p = \max_w m(w_1, \dots, w_{p-1}).$$

Beweis. Für den Beweis des ersten Teiles genügt es, eine zulässige Funktion y anzugeben, welche die oben angegebenen Eigenschaften besitzt und für die $\Phi(y) \leq \lambda_p \mathcal{P}(y)$ ist. Zu dem Zweck wird

$$y = \sum_{q=1}^p a_q \psi_q$$

³⁵⁾ Der Satz ist auch richtig, wenn man „integrierbar“ durch „stetig“ ersetzt.
Mathematische Zeitschrift. 48.

gesetzt. Dann ist

$$\Psi(y) = \sum_{q,r} a_q a_r \Psi(\psi_q, \psi_r) = \sum_q a_q^2 > 0,$$

falls nicht alle a_q Null sind. Die Gleichungen (84) sind erfüllt, wenn

$$\sum_{q=1}^p a_q \int w_v \psi_q dx = 0 \quad (v = 1, \dots, p-1)$$

ist. Das sind $p-1$ Gleichungen für p unbekannte a_q . Es gibt also eine nicht aus lauter Nullen bestehende Lösung. Für diese ist dann

$$\begin{aligned} \Phi(y) &= \sum_{q,r} a_q a_r \Phi(\psi_q, \psi_r) = \sum_{q,r} a_q a_r \lambda_r \Psi(\psi_q, \psi_r) \\ &= \sum_q \lambda_q a_q^2 \leq \lambda_p \sum_q a_q^2 = \lambda_p \Psi(y). \end{aligned}$$

Da für $w_v = \psi_v^2$ nach Satz 2 $m = \lambda_p$ ist, ist der Satz vollständig bewiesen.

5.4. Das Verfahren von Ritz und Kryloffs Satz³⁶⁾.

Satz 5. Sind $u_1(x), \dots, u_h(x)$ ein System zulässiger Funktionen, für das die Orthogonalitätsrelationen

$$(85) \quad \Psi(u_p, u_q) = 0 \quad (p \neq q)$$

und außerdem die Ungleichungen

$$(86) \quad \Psi(u_p) > 0$$

bestehen, so sind die Nullstellen der Determinante

$$(87) \quad D(\lambda) = \text{Det} |\Phi(u_p, u_q) - \lambda e_{p,q} \Psi(u_p, u_q)| \quad (p, q = 1, \dots, h)$$

sämtlich reell. Sind sie, der Größe nach geordnet,

$$(88) \quad \bar{\lambda}_1 \leq \dots \leq \bar{\lambda}_h,$$

so ist

$$(89) \quad \bar{\lambda}_p \geq \lambda_p \quad (p = 1, \dots, h).$$

Beweis. Auf die Determinante (87) kommt man, wenn man in dem Satz 1 statt der Menge aller zulässiger Funktionen $y(x)$ nur die Funktionen

$$(90) \quad \bar{y}(x) = \sum_{v=1}^h a_v u_v$$

betrachtet. Für diese Funktionen ist nach (45), (46) und (85)

$$(91) \quad \begin{cases} \Phi(\bar{y}) = \sum_{p,q=1}^h a_p a_q \Phi(u_p, u_q), \\ \Psi(\bar{y}) = \sum_{p,q=1}^h a_p a_q \Psi(u_p, u_q) = \sum_{p=1}^h a_p^2 \Psi(u_p). \end{cases}$$

³⁶⁾ Vgl. hierzu die in K I, § 5 behandelte, von GALERKIN herrührende Variante des Verfahrens von RITZ, außerdem zur Literatur: E. KAMKE, Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen, S. 220. Leipzig 1942.

Aus der Variationsaufgabe (10) oder, was auf dasselbe hinausläuft, der Aufgabe $\Phi(y) = \text{Min}$ unter der Nebenbedingung $\Psi(y) = 1$, wird dann die Aufgabe: Die a_p sollen so bestimmt werden, daß

$$(92) \quad \Phi(\bar{y}) = \text{Min}$$

bei der Nebenbedingung $\Psi(\bar{y}) = 1$ wird. Da die Eigenwertaufgabe definit ist, ist $\Phi(\bar{y}) \geq 0$ und somit die obige Minimumsaufgabe lösbar. Die Regeln der Differentialrechnung ergeben für die a_p und einen ebenfalls noch zu bestimmenden Parameter λ die Gleichungen

$$(93) \quad \sum_{q=1}^h a_q \Phi(u_p, u_q) = \lambda a_p \Psi(u_p) \quad (p = 1, \dots, h).$$

Dieses homogene Gleichungssystem hat genau dann eine eigentliche Lösung, wenn $D(\lambda) = 0$ ist.

Wegen der Symmetrie von (87) in den Indizes p, q hat $D(\lambda)$ nur reelle Nullstellen.

Für jede Nullstelle λ hat (93) eine eigentliche Lösung, und diese kann so normiert werden, daß $\Psi(\bar{y}) = 1$ ist. Multipliziert man dann (93) mit a_p und addiert man die Gleichungen, so erhält man wegen (91)

$$\Phi(\bar{y}) = \lambda \Psi(\bar{y}) = \lambda.$$

Da $\Phi(\bar{y}) \geq 0$ ist, sind alle Nullstellen $\lambda \geq 0$, und die kleinste Nullstelle $\bar{\lambda}_1$ ist der gesuchte Minimalwert von $\Phi(\bar{y})$. Da hier gegenüber Satz 1 der Bereich der zulässigen Funktionen weiter eingeschränkt ist, ist $\bar{\lambda}_1 \geq \lambda_1$.

Für den allgemeinen Beweis von (89) wird der Satz 4 benutzt und außerdem der entsprechende Satz über die Eigenwerte $\kappa_1 \leq \dots \leq \kappa_h$ der quadratischen Form

$$K(x, x) = \sum_{p, q=1}^h k_{p, q} x_p x_q,$$

d. h. der Nullstellen der Determinante

$$\Delta(\lambda) = \text{Det} |k_{p, q} - \lambda e_{p, q}|.$$

Es ist³⁷⁾

$$(94) \quad \kappa_r \geq \bar{m}_r(\alpha),$$

wo

$$\bar{m}_r(\alpha) = \underline{\lim}_{x_p} K(x, x)$$

ist und hierin zur Konkurrenz alle solche Zahlen x_p zugelassen sind, welche die Norm

$$(95) \quad \sum_{p=1}^h x_p^2 = 1$$

³⁷⁾ R. COURANT-D. HILBERT, Methoden der mathematischen Physik I, 2. Aufl., S. 27, 29. Berlin 1931.

haben und $r - 1$ beliebig gegebene Gleichungen

$$(96) \quad \sum_{q=1}^h \alpha_{v,q} x_q = 0 \quad (v = 1, \dots, r-1)$$

erfüllen.

Für

$$k_{p,q} = \frac{\Phi(u_p, u_q)}{\sqrt{\Psi(u_p) \Psi(u_q)}}, \quad x_p = a_p \sqrt{\Psi(u_p)}$$

wird

$$K(x, x) = \sum_{p,q=1}^h \Phi(u_p, u_q) a_p a_q = \Phi(\bar{y})$$

und $\Delta(\lambda)$, abgesehen von einem Faktor $\neq 0$, gleich $D(\lambda)$, d. h. $\kappa_r = \bar{\lambda}_r$. Weiter wird aus (95)

$$(97) \quad 1 = \sum_{p=1}^h a_p^2 \Psi(u_p) = \Psi(\bar{y}).$$

Wird schließlich für die in Satz 4 vorkommenden Funktionen w ,

$$\alpha_{v,q} = \frac{1}{\sqrt{\Psi(u_q)}} \int w_v u_q dx$$

gewählt, so wird aus (96)

$$(98) \quad 0 = \sum_{q=1}^h a_q \int w_v u_q dx = \int w_v \bar{y} dx.$$

Aus (94) wird also

$$\bar{\lambda}_r \geq \underline{\text{fin}} \Phi(\bar{y}),$$

wo $\bar{y}$ durch (90) gegeben ist und zur Konkurrenz solche a_p , d. h. solche $\bar{y}$ zugelassen sind, für die (97) und (98) erfüllt ist. Diese $\bar{y}$ bilden eine Teilmenge der in Satz 4 zugelassenen y . Daher ist nach (94) und Satz 4

$$\bar{\lambda}_r \geq \bar{m}_r \geq m(w_1, \dots, w_{r-1}),$$

also auch

$$\bar{\lambda}_r \geq \underset{w}{\text{Max}} m = \lambda_r.$$

(Eingegangen am 5. Januar 1942.)