Zur Stetigkeit der Wurzeln einer algebraischen Gleichung.

Herrn Konrad Knopp
zum 60. Geburtstag am 22. Juli 1942 gewidmet.

Von

Hellmuth Kneser in Tübingen.

Der Satz von der Stetigkeit der Wurzeln einer algebraischen Gleichung besagt in seiner bescheidensten Gestalt das Folgende:

Ist c eine Nullstelle des Polynoms

$$f^*(x) = x^n + \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu^* x^\nu,$$

so hat das Polynom

$$f(x) = x^n + \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu x^\nu$$

beliebig nahe bei c eine Nullstelle, sobald sich die Beiwerte a_ν hinreichend wenig von den entsprechenden Beiwerten a_ν^* unterscheiden.

Den kürzesten Beweis hierfür findet man in van der Waerdens Einführung in die algebraische Geometrie (1939) auf S. 48. Im Sonderfalle $c = 0$ lautet er folgendermaßen. Ist $c = 0$ eine Nullstelle von $f^*(x)$, so ist $a_0^* = 0$. Sind nun $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ die Nullstellen von $f(x)$ und ist α_1 die — oder eine — vom kleinsten Betrage, so ist

$$|\alpha_1|^n \leqq |\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n| = |a_0|,$$
$$|\alpha_1| \leqq \sqrt[n]{|a_0|},$$

also so klein wie man will, wenn nur $|a_0| = |a_0 - a_0^*|$ hinreichend klein ist.

Außer durch seine Kürze zeichnet sich dieser Beweis dadurch aus, daß er mehr liefert als behauptet war: sein Ergebnis ist ganz unabhängig von den Werten $a_1, \ldots, a_{n-1}$; der auf diese bezügliche Teil der Voraussetzung ist also überflüssig. Das ist auch deshalb bemerkenswert, weil umgekehrt aus der Kleinheit von $|\alpha_1|$ die von $|a_0|$ erst dann folgt, wenn man z. B. für die Beträge von $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ eine obere Schranke kennt.

Zwar nicht ganz die schlagende Kürze, wohl aber die Mehrleistung des van der Waerdenschen Beweises läßt sich nun auch auf den vollen Stetigkeitssatz übertragen. Dieser lautet:

A. *Ist* $1 \leqq m \leqq n$ *und ist* c *eine* m*-fache Nullstelle des Polynoms*

$$f^*(x) = x^n + \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu^* x^\nu,$$

so hat das Polynom

$$f(x) = x^n + \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu x^\nu$$

beliebig nahe bei c *mindestens* m *Nullstellen, sobald sich die Beiwerte* a_ν *hinreichend wenig von den entsprechenden Beiwerten* a_ν^* *unterscheiden.*

Auch hier wird sich im Sonderfalle $c = 0$, d. h. $a_0^* = \cdots = a_{m-1}^* = 0$ zeigen, daß es nur auf die Beiwerte $a_0, \ldots, a_{m-1}$ ankommt. Bedenken wir, daß die Beiwerte a_ν bis aufs Vorzeichen gleich den symmetrischen Grundpolynomen in $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sind, so können wir den Satz als eine Aussage über die Beträge irgendwelcher komplexer Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ und ihrer symmetrischen Grundpolynome aussprechen. Bezeichnen wir mit s_ν immer das symmetrische Grundpolynom ν-ten Grades in den dahinter angegebenen Argumenten, so lautet unser Satz:

B(m). *Ist* $1 \leqq m \leqq n$ *und sind* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *komplexe Zahlen, geordnet nach nicht abnehmenden Beträgen:*

$$|\alpha_1| \leqq |\alpha_2| \leqq \cdots \leqq |\alpha_n|, \tag{1}$$

so gibt es für den Betrag von α_m *eine obere Schranke* φ_m, *die nur abhängt von den Beträgen der* m *letzten symmetrischen Grundpolynome in* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, *und die mit diesen Beträgen gegen Null strebt:*

$$|\alpha_m| \leqq \varphi_m(t_1, \ldots, t_m), \quad t_\nu = |s_{n-\nu+1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)|, \tag{2}$$

$$\varphi_m \to 0, \quad \textit{wenn } t_1 \to 0, \ldots, t_m \to 0. \tag{3}$$

Sei $0 \leqq k < n$ und B(m) bewiesen für $m \leqq k$ — im Falle $k = 0$ ist damit nichts vorausgesetzt; wir wollen B$(k+1)$ beweisen. So wie man VAN DER WAERDENS Beweis auffassen kann als das Aufstellen einer durch α_1 allein bestimmten unteren Schranke für t_1, so wollen wir eine untere Schranke für t_{k+1} aufsuchen. Das würde sofort zum Ziele führen, wenn s_{n-k} allein aus dem Gliede $\alpha_{k+1} \ldots \alpha_n$ bestünde. Die störenden anderen Glieder nach oben abzuschätzen geht nicht ohne weiteres an, da sie Faktoren $\alpha_{k+2}, \ldots, \alpha_n$ enthalten können, über deren Größe wir nichts wissen. Wir kommen zum Ziele, indem wir aus allen Gliedern das Hauptglied $\alpha_{k+1} \ldots \alpha_n$ als Faktor herausziehen.

Ist $\alpha_{k+1} = 0$, so gilt (2) mit $m = k + 1$ und mit jedem nicht negativen Wert von φ_{k+1}, also auch mit dem, den wir nachher einführen werden. Andernfalls sind wegen (1) auch $\alpha_{k+2}, \ldots, \alpha_n$ von Null verschieden, und es gilt

$$(4) \quad s_{n-k}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \alpha_{k+1} \ldots \alpha_n \, [1 + \sum_{\nu=1}^{r} s_\nu(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)\, s_\nu(\alpha_{k+1}^{-1}, \ldots, \alpha_n^{-1})],$$

worin

$$r = \operatorname{Min}(k, n-k)$$

gesetzt ist. In der Tat: jedes Glied in $s_{n-k}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ außer dem Hauptgliede $\alpha_{k+1} \ldots \alpha_n$ enthält eine Anzahl $\nu \geqq 1$ von Faktoren des Hauptgliedes nicht und statt dessen die gleiche Anzahl voneinander verschiedener Faktoren aus der Reihe $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. Es muß daher $\nu \leqq k$ und $\nu \leqq n - k$, d. h. $\nu \leqq r$ sein, und jedes Glied der beschriebenen Art kommt in s_{n-k} mit dem Beiwert 1 vor. Gerade das ist aber in (4) ausgesagt. Nehmen wir zu (4) hinzu die aus (2) mit $m = \nu \leqq k$ folgende Ungleichung

$$|s_\nu(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)| \leqq s_\nu(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$$

sowie die aus (1) sich ergebenden Ungleichungen

$$|\alpha_{k+1} \ldots \alpha_n| \geqq |\alpha_{k+1}|^{n-k},$$

$$|s_\nu(\alpha_{k+1}^{-1}, \ldots, \alpha_n^{-1})| \leqq \binom{n-k}{\nu} |\alpha_{k+1}|^{-\nu},$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned} t_{k+1} &= |s_{n-k}(\alpha_1, \ldots \alpha_n)| \\ &\geqq |\alpha_{k+1}|^{n-k} \left[1 - \sum_{\nu=1}^{r} \binom{n-k}{\nu} s_\nu(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)\, |\alpha_{k+1}|^{-\nu}\right], \end{aligned}$$

$$(5) \quad \sum_{\nu=1}^{r} \binom{n-k}{\nu} s_\nu(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)\, |\alpha_{k+1}|^{-\nu} + t_{k+1} |\alpha_{k+1}|^{-(n-k)} \geqq 1,$$

Die Beiwerte der Potenzen von $|\alpha_{k+1}|$ auf der linken Seite von (5) sind nicht negativ. Sind sie nicht alle gleich Null, so steht links in (5) eine Funktion $L(|\alpha_{k+1}|)$ von $|\alpha_{k+1}|$, die bei positiven Werten der Veränderlichen fallend alle positiven Werte durchläuft. Daher kann $|\alpha_{k+1}|$ nicht größer sein als die positive Wurzel ξ der Gleichung

$$(6) \quad L(\xi) = \sum_{\nu=1}^{r} \binom{n-k}{\nu} s_\nu(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)\, \xi^{-\nu} + t_{k+1} \xi^{-(n-k)} = 1.$$

Wir setzen also φ_{k+1} gleich dieser Wurzel und haben damit die Behauptung (2) für $m = k + 1$ bewiesen.

Sollten aber alle Beiwerte in $L(\xi)$ gleich Null sein, so kann (5) nicht bestehen. Dieser Fall kann also nur eintreten, wenn $\alpha_{k+1} = 0$ ist; in ihm setzen wir $\varphi_{k+1} = 0$, so daß auch hier (2) mit $m = k + 1$ gilt.

Nun werden die Beiwerte in $L(\xi)$ beliebig klein, wenn $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ und t_{k+1} gegen Null streben, d. h. wenn $t_1, \ldots, t_{k+1}$ gegen Null streben. Ist also $\varepsilon > 0$ gegeben, so wählen wir $t_1, \ldots, t_{k+1}$ so klein, daß $L(\varepsilon) < 1$ ist. Da die Funktion L dauernd abnimmt, kann dann (6) nur für $\xi < \varepsilon$ gelten, d. h. es ist $\varphi_{k+1} < \varepsilon$. Dies gilt auch im Sonderfall des vorigen Absatzes, da dort $\varphi_{k+1} = 0$ gesetzt wurde. Damit ist auch die Behauptung (3) mit $m = k + 1$ bewiesen und so der Beweis des Satzes B vollendet.

Wir stellen noch den Zusammenhang mit dem üblichen Stetigkeitssatze A her. Sei ein Polynom

$$g(y) = y^n + \sum_{\nu=0}^{n-1} b_\nu y^\nu$$

gegeben und $\beta_1, \ldots, \beta_n$ seine Nullstellen. Setzen wir in ihm

$$y = c + x,$$

$$g(y) = x^n + \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{g^{(\nu)}(c)}{\nu!} x^\nu = f(x),$$

so sind die symmetrischen Grundpolynome in den Wurzeln $\alpha_\nu = \beta_\nu - c$ der Gleichung $f(x) = 0$ bis aufs Vorzeichen gleich den Werten $g^{(\nu)}(c)/\nu!$. Nach Satz B(m) sind mindestens m unter den Wurzeln betragsmäßig so klein wie wir wollen, wenn nur die m letzten Beiwerte in $f(x)$ betragsmäßig hinreichend klein sind, d. h. wenn die Ableitungswerte $g(c), g'(c), \ldots, g^{(m-1)}(c)$ hinreichend kleine Beträge haben. So ergibt sich der Satz:

C. *Ein Polynom*

$$g(y) = y^n + \sum_{\nu=0}^{n-1} b_\nu y^\nu$$

hat in beliebiger Nähe eines Wertes c mindestens m Nullstellen, wenn die Ableitungswerte $g(c), g'(c), \ldots, g^{(m-1)}(c)$ hinreichend kleine Beträge haben.

Da die Polynome

$$g^*(y) = y^n + \sum_{\nu=0}^{n-1} b_\nu^* y^\nu$$

mit m-facher Nullstelle bei c durch

$$g^*(c) = g^{*\prime}(c) = \cdots = g^{*(m-1)}(c) = 0$$

gekennzeichnet sind und die Ableitungswerte stetig von den Beiwerten des Polynoms $g(y)$ abhängen, ist der Stetigkeitssatz A im Satze C enthalten.

(Eingegangen am 6. Januar 1942.)