

Werk

Titel: Mathematische Zeitschrift

Ort: Berlin
Jahr: 1942

Kollektion: Mathematica

Werk Id: PPN266833020_0048

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN266833020_0048 | LOG_0015

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen Georg-August-Universität Göttingen Platz der Göttinger Sieben 1 37073 Göttingen Germany Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Zur Stetigkeit der Wurzeln einer algebraischen Gleichung.

Herrn Konrad Knopp zum 60. Geburtstag am 22. Juli 1942 gewidmet.

Von

Hellmuth Kneser in Tübingen.

Der Satz von der Stetigkeit der Wurzeln einer algebraischen Gleichung besagt in seiner bescheidensten Gestalt das Folgende:

Ist c eine Nullstelle des Polynoms

$$f^*(x) = x^n + \sum_{\nu=0}^{n-1} a^*_{\nu} x^{\nu},$$

so hat das Polynom

$$f(x) = x^n + \sum_{\nu=0}^{n-1} a_{\nu} x^{\nu}$$

beliebig nahe bei c eine Nullstelle, sobald sich die Beiwerte a_{ν} hinreichend wenig von den entsprechenden Beiwerten a_{ν}^* unterscheiden.

Den kürzesten Beweis hierfür findet man in VAN DER WAERDENS Einführung in die algebraische Geometrie (1939) auf S. 48. Im Sonderfalle c=0 lautet er folgendermaßen. Ist c=0 eine Nullstelle von $f^*(x)$, so ist $a_0^*=0$. Sind nun a_1, \ldots, a_n die Nullstellen von f(x) und ist a_1 die — oder eine — vom kleinsten Betrage, so ist

$$|\alpha_1|^n \leq |\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n| = |a_0|,$$

 $|\alpha_1| \leq \sqrt[n]{|a_0|},$

also so klein wie man will, wenn nur $|a_0| = |a_0 - a_0^*|$ hinreichend klein ist. Außer durch seine Kürze zeichnet sich dieser Beweis dadurch aus, daß er mehr liefert als behauptet war: sein Ergebnis ist ganz unabhängig von den Werten a_1, \ldots, a_{n-1} ; der auf diese bezügliche Teil der Voraussetzung ist also überflüssig. Das ist auch deshalb bemerkenswert, weil umgekehrt aus

der Kleinheit von $|\alpha_1|$ die von $|a_0|$ erst dann folgt, wenn man z. B. für die Beträge von $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ eine obere Schranke kennt.

Zwar nicht ganz die schlagende Kürze, wohl aber die Mehrleistung des VAN DER WAERDENschen Beweises läßt sich nun auch auf den vollen Stetigkeitssatz übertragen. Dieser lautet:

102 H. Kneser.

A. Ist $1 \leq m \leq n$ und ist c eine m-fache Nullstelle des Polynoms

$$f^*(x) = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i^* x^i,$$

so hat das Polynom

$$f(x) = x^n + \sum_{\nu=0}^{n-1} a_{\nu} x^{\nu}$$

beliebig nahe bei c mindestens m Nullstellen; sobald sich die Beiwerte a_r hinreichend wenig von den entsprechenden Beiwerten a_r^* unterscheiden.

Auch hier wird sich im Sonderfalle c=0, d. h. $a_0^*=\cdots=a_{m-1}^*=0$ zeigen, daß es nur auf die Beiwerte a_0,\ldots,a_{m-1} ankommt. Bedenken wir, daß die Beiwerte a_r bis aufs Vorzeichen gleich den symmetrischen Grundpolynomen in α_1,\ldots,α_n sind, so können wir den Satz als eine Aussage über die Beträge irgendwelcher komplexer Zahlen α_1,\ldots,α_n und ihrer symmetrischen Grundpolynome aussprechen. Bezeichnen wir mit s_r immer das symmetrische Grundpolynom r-ten Grades in den dahinter angegebenen Argumenten, so lautet unser Satz:

B(m). Ist $1 \leq m \leq n$ und sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ komplexe Zahlen, geordnet nach nicht abnehmenden Beträgen:

$$|\alpha_1| \leq |\alpha_2| \leq \cdots \leq |\alpha_n|,$$

so gibt es für den Betrag von α_m eine obere Schranke φ_m , die nur abhängt von den Beträgen der m letzten symmetrischen Grundpolynome in $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, und die mit diesen Beträgen gegen Null strebt:

$$(2) |\alpha_m| \leq \varphi_m(t_1,\ldots,t_m), \quad t_v = |s_{n-k+1}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)|,$$

(3)
$$\varphi_m \to 0$$
, wenn $t_1 \to 0, \ldots, t_m \to 0$.

Sei $0 \le k < n$ und B(m) bewiesen für $m \le k$ — im Falle k = 0 ist damit nichts vorausgesetzt; wir wollen B(k+1) beweisen. So wie man van der Waerdens Beweis auffassen kann als das Aufstellen einer durch α_1 allein bestimmten unteren Schranke für t_1 , so wollen wir eine untere Schranke für t_{k+1} aufsuchen. Das würde sofort zum Ziele führen, wenn s_{n-k} allein aus dem Gliede $\alpha_{k+1} \ldots \alpha_n$ bestünde. Die störenden anderen Glieder nach oben abzuschätzen geht nicht ohne weiteres an, da sie Faktoren $\alpha_{k+2}, \ldots, \alpha_n$ enthalten können, über deren Größe wir nichts wissen. Wir kommen zum Ziele, indem wir aus allen Gliedern das Hauptglied $\alpha_{k+1} \ldots \alpha_n$ als Faktor herausziehen.

Ist $\alpha_{k+1} = 0$, so gilt (2) mit m = k + 1 und mit jedem nicht negativen Wert von φ_{k+1} , also auch mit dem, den wir nachher einführen werden. Andernfalls sind wegen (1) auch $\alpha_{k+2}, \ldots, \alpha_n$ von Null verschieden, und es gilt

(4)
$$s_{n-k}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \alpha_{k+1} \ldots \alpha_n \left[1 + \sum_{\nu=1}^{r} s_{\nu}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \, s_{\nu}(\alpha_{k+1}^{-1}, \ldots, \alpha_n^{-1}) \right],$$
 worin

$$r = \min(k, n - k)$$

gesetzt ist. In der Tat: jedes Glied in $s_{n-k}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ außer dem Hauptgliede $\alpha_{k+1} \ldots \alpha_n$ enthält eine Anzahl $v \geq 1$ von Faktoren des Hauptgliedes nicht und statt dessen die gleiche Anzahl voneinander verschiedener Faktoren aus der Reihe $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. Es muß daher $v \leq k$ und $v \leq n-k$, d. h. $v \leq r$ sein, und jedes Glied der beschriebenen Art kommt in s_{n-k} mit dem Beiwert 1 vor. Gerade das ist aber in (4) ausgesagt. Nehmen wir zu (4) hinzu die aus (2) mit $m = v \leq k$ folgende Ungleichung

$$|s_{\nu}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)| \leq s_{\nu}(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$$

sowie die aus (1) sich ergebenden Ungleichungen

$$\begin{aligned} |\alpha_{k+1} \dots \alpha_n| &\geq |\alpha_{k+1}|^{n-k}, \\ |s_{\nu}(\alpha_{k+1}^{-1}, \dots, \alpha_n^{-1})| &\leq {n-k \choose \nu} |\alpha_{k+1}|^{-\nu}, \end{aligned}$$

so erhalten wir

$$t_{k+1} = |s_{n-k}(\alpha_1, \dots \alpha_n)|$$

$$\geq |\alpha_{k+1}|^{n-k} \left[1 - \sum_{\nu=1}^r \binom{n-k}{\nu} s_{\nu}(\varphi_1, \dots, \varphi_k) |\alpha_{k+1}|^{-\nu} \right],$$
(5)
$$\sum_{\nu=1}^r \binom{n-k}{\nu} s_{\nu}(\varphi_1, \dots, \varphi_k) |\alpha_{k+1}|^{-\nu} + t_{k+1} |\alpha_{k+1}|^{-(n-k)} \geq 1,$$

Die Beiwerte der Potenzen von $|\alpha_{k+1}|$ auf der linken Seite von (5) sind nicht negativ. Sind sie nicht alle gleich Null, so steht links in (5) eine Funktion $L(|\alpha_{k+1}|)$ von $|\alpha_{k+1}|$, die bei positiven Werten der Veränderlichen fallend alle positiven Werte durchläuft. Daher kann $|\alpha_{k+1}|$ nicht größer sein als die positive Wurzel ξ der Gleichung

(6)
$$L(\xi) = \sum_{\nu=1}^{r} {n-k \choose \nu} s_{\nu}(\varphi_1, ..., \varphi_k) \xi^{-\nu} + t_{k+1} \xi^{-(n-k)} = 1.$$

Wir setzen also φ_{k+1} gleich dieser Wurzel und haben damit die Behauptung (2) für m=k+1 bewiesen.

Sollten aber alle Beiwerte in $L(\xi)$ gleich Null sein, so kann (5) nicht bestehen. Dieser Fall kann also nur eintreten, wenn $\alpha_{k+1} = 0$ ist; in ihm setzen wir $\varphi_{k+1} = 0$, so daß auch hier (2) mit m = k + 1 gilt.

Nun werden die Beiwerte in $L(\xi)$ beliebig klein, wenn $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ und t_{k+1} gegen Null streben, d. h. wenn t_1, \ldots, t_{k+1} gegen Null streben. Ist also $\varepsilon > 0$ gegeben, so wählen wir t_1, \ldots, t_{k+1} so klein, daß $L(\varepsilon) < 1$ ist. Da die Funktion L dauernd abnimmt, kann dann (6) nur für $\xi < \varepsilon$ gelten, d. h. es ist $\varphi_{k+1} < \varepsilon$. Dies gilt auch im Sonderfall des vorigen Absatzes, da dort $\varphi_{k+1} = 0$ gesetzt wurde. Damit ist auch die Behauptung (3) mit m = k+1 bewiesen und so der Beweis des Satzes B vollendet.

Wir stellen noch den Zusammenhang mit dem üblichen Stetigkeitssatze A her. Sei ein Polynom

$$g(y) = y^n + \sum_{\nu=0}^{n-1} b_{\nu} y^{\nu}$$

gegeben und β_1, \ldots, β_n seine Nullstellen. Setzen wir in ihm

$$y = c + x,$$

$$g(y) = x^{n} + \sum_{v=0}^{n-1} \frac{g^{(v)}(c)}{v!} x^{v} = f(x),$$

so sind die symmetrischen Grundpolynome in den Wurzeln $\alpha_v = \beta_v - c$ der Gleichung f(x) = 0 bis aufs Vorzeichen gleich den Werten $g^{(v)}(c)/v!$. Nach Satz B(m) sind mindestens m unter den Wurzeln betragsmäßig so klein wie wir wollen, wenn nur die m letzten Beiwerte in f(x) betragsmäßig hinreichend klein sind, d. h. wenn die Ableitungswerte $g(c), g'(c), \ldots, g^{(m-1)}(c)$ hinreichend kleine Beträge haben. So ergibt sich der Satz:

C. Ein Polynom

$$g(y) = y^n + \sum_{\nu=0}^{n-1} b_{\nu} y^{\nu}$$

hat in beliebiger Nähe eines Wertes c mindestens m Nullstellen, wenn die Ableitungswerte g(c), g'(c), ..., $g^{(m-1)}(c)$ hinreichend kleine Beträge haben.

Da die Polynome

$$g^*(y) = y^n + \sum_{\nu=0}^{n-1} b^*_{\nu} y^{\nu}$$

mit m-facher Nullstelle bei c durch

$$g^*(c) = g^{*'}(c) = \cdots = g^{*(m-1)}(c) = 0$$

gekennzeichnet sind und die Ableitungswerte stetig von den Beiwerten des Polynoms g(y) abhängen, ist der Stetigkeitssatz A im Satze C enthalten.

(Eingegangen am 6. Januar 1942.)