Werk

Titel: Mathematische Zeitschrift

Ort: Berlin

Jahr: 1942

Kollektion: Mathematica

Werk Id: PPN266833020_0048

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN266833020_0048|LOG_0016

Über die restringierte Limitierung von Doppelfolgen nach den Verfahren von Cesàro, Hölder und Euler-Knopp.

Herrn KONRAD KNOPP
zum 60. Geburtstag am 22. Juli 1942 gewidmet.

Von

Friedrich Lösch in Rostock.

Die vorliegende Note beschäftigt sich mit Transformationen von (reellen oder komplexen) Doppelfolgen, bei denen mit Hilfe zweier Dreiecksmatrizen

$$(A)\quad \begin{array}{llll} a_{00} & & & \\ a_{10} & a_{11} & & \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & & \\ a_{m0} & a_{m1} & \ldots & a_{mm} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array} \qquad (B)\quad \begin{array}{llll} b_{00} & & & \\ b_{10} & b_{11} & & \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & & \\ b_{m0} & b_{m1} & \ldots & b_{mm} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array},$$

welche den TOEPLITZschen Bedingungen

$$\begin{array}{llll} \text{(I)} & a_{m\mu} \to 0, & b_{m\mu} \to 0 & \text{für festes } \mu \text{ und } m \to \infty, \\ \text{(II)} & \sum\limits_{\mu=0}^{m} |a_{m\mu}| < K, & \sum\limits_{\mu=0}^{m} |b_{m\mu}| < K & \text{für } m = 0, 1, 2, \ldots, \\ \text{(III)} & \sum\limits_{\mu=0}^{m} a_{m\mu} \to 1, & \sum\limits_{\mu=0}^{m} b_{m\mu} \to 1 & \text{für } m \to \infty \end{array}$$

genügen, einer Doppelfolge

$$s_{\mu\nu} \qquad (\mu, \nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

eine neue Doppelfolge

$$S_{mn} = \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} a_{m\mu} b_{n\nu} s_{\mu\nu} \qquad (m, n = 0, 1, 2, \ldots),$$

die „*$\{A, B\}$-Transformation*" von $(s_{\mu\nu})$, zugeordnet wird. Die Klasse dieser Transformationen wird im folgenden kurz die Klasse der „*T-Transformationen*" genannt.

Eine Doppelfolge $(s_{\mu\nu})$ heißt „*restringiert konvergent*" gegen den Limes s, in Zeichen

$$\underset{\mu,\nu\to\infty}{[\lim]}\, s_{\mu\nu} = s,$$

wenn für jedes ϑ aus $0 < \vartheta < 1$ diejenigen $s_{\mu\nu}$, deren Indizes den Ungleichungen $\vartheta\nu < \mu < \frac{1}{\vartheta}\nu$ genügen, den einzigen Häufungswert s haben; sie heißt „*restringiert $\{A, B\}$-limitierbar*" zum Wert S, in Zeichen

$$\{A, B\} - \underset{\mu,\nu\to\infty}{[\lim]}\, s_{\mu\nu} = S,$$

wenn für ihre $\{A, B\}$-Transformation (S_{mn}) die Limesrelation

$$\underset{m,n\to\infty}{[\lim]} S_{mn} = S$$

besteht[1]). Ferner soll eine Doppelfolge $(s_{\mu\nu})$ *„restringiert beschränkt"* genannt werden, wenn der größte Häufungswert der Beträge derjenigen $s_{\mu\nu}$, deren Indizes μ, ν den Ungleichungen $\vartheta\nu < \mu < \frac{1}{\vartheta}\nu$ genügen, für $\vartheta \downarrow 0$ unter einer endlichen Schranke bleibt; entsprechend soll $(s_{\mu\nu})$ *„restringiert $\{A, B\}$-beschränkt"* genannt werden, wenn ihre $\{A, B\}$-Transformation (S_{mn}) restringiert beschränkt ist. Eine restringiert konvergente bzw. restringiert $\{A, B\}$-limitierbare Doppelfolge ist auch restringiert beschränkt bzw. restringiert $\{A, B\}$-beschränkt.

Über die restringierte Limitierung von Doppelfolgen liegen bisher erst wenige Untersuchungen vor, sie beziehen sich sämtlich auf die Frage nach der Gültigkeit des Permanenzsatzes[2]). Dabei zeigt sich bereits, daß die Verhältnisse bei Zugrundelegung restringierter Konvergenz und Limitierbarkeit erheblich komplizierter sind als bei Zugrundelegung gewöhnlicher Konvergenz und Limitierbarkeit. Im Falle gewöhnlicher Konvergenz und Limitierbarkeit gilt der Permanenzsatz, so lange man nach dem Vorgang von Bromwich und Hardy nur beschränkte Doppelfolgen in Betracht zieht („condition of finitude"), für alle T-Transformationen in vollem Umfange, d. h. aus $\lim\limits_{\mu,\nu\to\infty} s_{\mu\nu} = s$ folgt stets $\{A, B\}$- $\lim\limits_{\mu,\nu\to\infty} s_{\mu\nu} = s$; läßt man beliebige Doppelfolgen zu, so gilt der Permanenzsatz wenigstens noch in der abgeschwächten Form, daß aus der gleichzeitigen Existenz der beiden Limites $\lim\limits_{\mu,\nu\to\infty} s_{\mu\nu}$ und $\{A,B\}$- $\lim\limits_{\mu,\nu\to\infty} s_{\mu\nu}$ ihre Gleichheit folgt. Demgegenüber lassen sich die bisher für restringierte Konvergenz und Limitierbarkeit erzielten Ergebnisse folgendermaßen zusammenfassen:

1) Schon bei beschränkten Doppelfolgen gilt der Permanenzsatz nicht für alle T-Transformationen, auch nicht in der obengenannten abgeschwächten Form. Es gibt jedoch gewisse T-Transformationen, sie seien weiterhin *„T'-Transformationen"* genannt, für die der Permanenzsatz in vollem Umfange gilt, für die also bei beschränkten Doppelfolgen $(s_{\mu\nu})$ aus $\underset{\mu,\nu\to\infty}{[\lim]} s_{\mu\nu} = s$ stets $\{A, B\}$- $\underset{\mu,\nu\to\infty}{[\lim]} s_{\mu\nu} = s$ folgt. Die Klasse dieser T'-Transformationen läßt sich

[1]) Die Begriffe der restringierten Konvergenz bzw. Limitierbarkeit wurden von C. N. Moore im Zusammenhang mit seinen Untersuchungen über die Summierung Fourierscher Doppelreihen von Funktionen, die längs einer Kurve unstetig sind, eingeführt. Vgl. C. N. Moore, On the summability of the double Fourier's series of discontinuous functions. Math. Annalen 74 (1913), S. 555—572, insbesondere S. 567.

[2]) Für eine zusammenfassende Darstellung vgl. C. N. Moore, Summable series and convergence factors, New York 1938 (American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. XXII).

vollständig charakterisieren und man erkennt ohne Mühe, daß ihr die geläufigsten speziellen T-Transformationen, nämlich die *Cesàroschen, Hölderschen* und *Euler-Knoppschen Transformationen* ganzer positiver Ordnung angehören[3]).

2) Läßt man beliebige, nicht notwendig beschränkte Doppelfolgen zu, so zeigt sich, daß nun auch die Klasse der T'-Transformationen noch zu weit ist, als daß für sie hinsichtlich restringierter Konvergenz und Limitierbarkeit der Permanenzsatz, auch nur in der genannten abgeschwächten Form, gelten würde. Die dadurch nahegelegte Frage nach den T-Transformationen, für die der Permanenzsatz in der einen oder anderen Form noch gilt, ist bisher nicht vollständig beantwortet worden. Durch den folgenden, für die Betrachtungen dieser Note grundlegenden Satz kennt man jedoch eine Klasse von T-Transformationen, die „*T''-Transformationen*", für welche der Permanenzsatz wenigstens in der abgeschwächten Form gilt[4]):

Hauptsatz: *Eine T-Transformation werde als T''-Transformation bezeichnet, wenn es bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ möglich ist, die Elemente der Matrizen (A) und (B) für jedes feste positive η, das nur kleiner als eine von ε abhängige Zahl $\eta_0(\varepsilon)$ ist, durch Gleichungssysteme*

$$a_{m u} = \sum_{\eta m < \varrho \leqq m} \alpha_\varrho^{(m,\eta)} a_{\varrho \mu}, \quad b_{m u} = \sum_{\eta m < \varrho \leqq m} \beta_\varrho^{(m,\eta)} b_{\varrho \mu} \quad (\mu = 0, 1, \ldots, [\eta m])$$

zu verknüpfen, deren Koeffizienten $\alpha_\varrho^{(m,\eta)}$, $\beta_\varrho^{(m,\eta)}$ den Ungleichungen

$$\text{(IV)} \qquad \sum_{\eta m < \varrho \leqq m} \left|\alpha_\varrho^{(m,\eta)}\right| < \varepsilon, \qquad \sum_{\eta m < \varrho \leqq m} \left|\beta_\varrho^{(m,\eta)}\right| < \varepsilon$$

genügen, sobald m größer als eine von η abhängige Zahl $M(\eta)$ ist.

Definieren die beiden Matrizen (A), (B) eine T''-Transformation, so ist eine restringiert konvergente Doppelfolge $(s_{\mu\nu})$ dann und nur dann auch restringiert $\{A, B\}$-limitierbar, wenn sie restringiert $\{A, B\}$-beschränkt ist. Ist die Doppelfolge $(s_{\mu\nu})$ zugleich restringiert konvergent und restringiert $\{A, B\}$-limitierbar, so gilt

$$\{A, B\}\text{-}\underset{\mu,\nu \to \infty}{[\lim]}\, s_{\mu\nu} = \underset{\mu,\nu \to \infty}{[\lim]}\, s_{\mu\nu}.$$

Die Entscheidung, ob eine vorgelegte T-Transformation zur Klasse der T''-Transformationen gehört, so daß sie gewiß den Permanenzsatz in der abgeschwächten Form des vorstehenden Satzes zuläßt, ist in der Regel ziemlich mühsam und erfordert jeweils ein näheres Eingehen auf die spezielle Struktur der betreffenden Matrizen. Es ist das erste Ziel der vorliegenden Untersuchungen, den Nachweis dafür zu erbringen, daß die geläufigsten T-Trans-

---

[3]) F. Lösch, Über restringierte Limitierung von Doppelfolgen. Math. Annalen **110** (1934), S. 33–53, II.

[4]) F. Lösch, a. a. O.[3]), IV. Man erkennt mühelos, daß die dort gegebene Definition der T''-Transformation mit der oben gewählten, etwas einfacheren Definition äquivalent ist.

formationen auch T''-Transformationen sind. Für die *Cesàroschen Transformationen* ganzer positiver Ordnung wurde dies schon früher bewiesen[5]; der Beweis ist in § 1 in einer für das Weitere geeigneten Form wiedergegeben. Anschließend werden in § 2 die *Hölderschen Transformationen* und in § 3 die *Euler-Knoppschen Transformationen* ganzer positiver Ordnung behandelt.

Die weiteren Betrachtungen beziehen sich auf die Frage nach der *Äquivalenz der Cesàroschen und Hölderschen Verfahren* bei restringierter Limitierung von Doppelfolgen. Für einfache Folgen besagt der bekannte *Knopp-Schneesche Satz,* daß die C- und H-Verfahren gleicher Ordnung jeweils äquivalent sind. Für die gewöhnliche Limitierung von Doppelfolgen gilt dies nicht mehr in vollem Umfange. Es folgt jedoch aus der (C, r, s)-Limitierbarkeit (r, s ganz, $\geqq 0$) einer Doppelfolge ihre (H, r, s)-Limitierbarkeit, falls sie schließlich (H, r, s)-beschränkt ist [d. h. falls ihre (H, r, s)-Transformation nach Weglassen einer geeigneten endlichen Anzahl von Anfangszeilen und -spalten beschränkt ist], ebenso umgekehrt; ist die Doppelfolge gleichzeitig (C, r, s)- und (H, r, s)-limitierbar, so stimmen beide Limites überein[6]. In § 4 soll gezeigt werden, daß der entsprechende Satz auch noch für die restringierte C- und H-Limitierung der Doppelfolgen gilt.

§ 1.

Die Cesàroschen Verfahren.

In der üblichen Weise werde als „(C, r, s)-*Transformation*" für ganze $r, s \geqq 0$ die Transformation bezeichnet, die durch die Matrizen (C_r) und (C_s) festgelegt ist. Dabei verstehen wir unter (C_p) das Schema der C_p-Transformation einfacher Folgen:

$$(C_p):\quad \begin{array}{ll}
\dfrac{1}{\binom{p}{p}} & \left\{\binom{p-1}{p-1}\right\} \\[2ex]
\dfrac{1}{\binom{1+p}{p}} & \left\{\binom{p}{p-1},\quad \binom{p-1}{p-1}\right\} \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
\dfrac{1}{\binom{m+p}{p}} & \left\{\binom{m+p-1}{p-1},\ \binom{m+p-2}{p-1},\ \ldots,\ \binom{p-1}{p-1}\right\} \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}\qquad (p = 0, 1, 2, \ldots).$$

---

[5]) F. Lösch, a. a. O.[3]), V. Für den speziellen Fall des Verfahrens der arithmetischen Mittel hat den Permanenzsatz schon früher S. Bochner, Limitierung mehrfacher Folgen nach dem Verfahren der arithmetischen Mittel. Math. Zeitschr. **35** (1932), S. 122—126 direkt bewiesen.

[6]) C. R. Adams, On summability of double series. Trans. Amer. math. Soc. **34** (1932), S. 215—230 und R. P. Agnew, Amer. J. Math. **54** (1932), S. 648—656.

Wir wollen zeigen, daß für die so definierten (C, r, s)-Transformationen der Permanenzsatz für restringierte Limitierung in der folgenden Form gilt:

Permanenzsatz der C-Verfahren. *Eine restringiert konvergente Doppelfolge* $(s_{\mu\nu})$ *ist dann und nur dann auch restringiert* (C, r, s)*-limitierbar* (r, s ganz, $\geqq 0$), *wenn sie restringiert* (C, r, s)*-beschränkt ist. Ist die Doppelfolge* $(s_{\mu\nu})$ *zugleich restringiert konvergent und restringiert* (C, r, s)*-limitierbar, so gilt*

$$(C, r, s)\text{-} \underset{\mu,\nu\to\infty}{[\lim]} s_{\mu\nu} = \underset{\mu,\nu\to\infty}{[\lim]} s_{\mu\nu}.$$

Beweis. Es ist bekannt, daß die Matrizen (C_p) den Toeplitzschen Bedingungen genügen, so daß die (C, r, s)-Transformationen gewiß zur Klasse der T-Transformationen gehören. Nach dem Hauptsatz genügt es also, zu zeigen, daß es sich genauer um T''-Transformationen handelt, d. h. daß sich die Elemente einer beliebigen Matrix (C_p), $(p = 0, 1, 2, \ldots)$, für kleine positive η und große m in passender Weise durch Gleichungssysteme

$$(1)\qquad \frac{\binom{m+p-1-\mu}{p-1}}{\binom{m+p}{p}} = \sum_{\eta m < \varrho \leqq m} \alpha_\varrho^{(m,\eta)} \frac{\binom{\varrho+p-1-\mu}{p-1}}{\binom{\varrho+p}{p}} \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, [\eta m])$$

verknüpfen lassen. Bei den zum Nachweis dieser Tatsache erforderlichen Rechnungen werde zur Abkürzung

$$(2)\qquad [\eta m] + 1 = m_\eta$$

gesetzt.

Wir behandeln zunächst die beiden besonders einfach liegenden Fälle $p = 0$ und $p = 1$ und wenden uns dann zu dem allgemeinen Fall $p > 1$:

$p = 0$. In diesem Fall hat man die *identische Transformation*. Wählt man η beliebig aus dem Intervall $0 < \eta < 1$ und dann m so groß, daß $m_\eta < m$ wird, so kann man in (1)

$$\text{alle } \alpha_\varrho^{(m,\eta)} = 0$$

setzen, da in jeder Zeile des Schemas (C_0) nur das letzte Glied $\neq 0$ ist. Die Matrix (C_0) erfüllt also gewiß die im Hauptsatz genannte Bedingung.

$p = 1$. Für $p = 1$ hat man das Schema der *arithmetischen Mittel*. Wir wählen zunächst wieder η beliebig aus $0 < \eta < 1$. Beachtet man, daß in der m_η-ten Zeile des Schemas (C_1) durchweg $\frac{1}{m_\eta+1}$, in der m-ten Zeile durchweg $\frac{1}{m+1}$ steht, so kann man in den Gleichungen (1)

$$\alpha_\varrho^{(m,\eta)} = \begin{cases} \dfrac{m_\eta+1}{m+1} & \text{für } \varrho = m_\eta, \\ 0 & \text{für } \eta m < \varrho \leqq m,\ \varrho \neq m_\eta \end{cases}$$

setzen. Mit dieser Lösung der Gleichungen (1) findet man

$$\sum_{\eta m < \varrho \leqq m} |\alpha_\varrho^{(m,\eta)}| = \frac{m_\eta + 1}{m+1} < \frac{\eta m + 2}{m+1} < \eta + \frac{2}{m}$$

und damit

$$\sum_{\eta m < \varrho \leqq m} |\alpha_\varrho^{(m,\eta)}| < \varepsilon,$$

falls $\eta < \frac{\varepsilon}{3}$ und $m > \frac{1}{\eta}$ gewählt wird. Auch die Matrix (C_1) erfüllt somit die Bedingung (IV) des Hauptsatzes.

$p > 1$. Wir wählen zunächst η beliebig aus $0 < \eta < 1$ und m so groß, daß die Koeffizientenmatrix des Systems (1) mindestens p Zeilen und Spalten aufweist. Die Matrix hat dann den Rang p. Irgendeine ihrer Spalten hat nämlich, horizontal angeordnet, die Form

$$(3) \qquad \frac{\binom{\varrho+p-1}{p-1}}{\binom{\varrho+p}{p}}, \quad \frac{\binom{\varrho+p-2}{p-1}}{\binom{\varrho+p}{p}}, \quad \ldots, \quad \frac{\binom{\varrho+p-1-[\eta m]}{p-1}}{\binom{\varrho+p}{p}}.$$

Subtrahiert man, bei der letzten Zeile beginnend, von jeder Zeile die vorhergehende und wiederholt man diesen Prozeß p-mal, wobei man das erste Mal bis zur 1. Zeile, das zweite Mal bis zur 2. Zeile geht usw., so geht (3) über in

$$(4) \qquad \frac{\binom{\varrho+p-1}{p-1}}{\binom{\varrho+p}{p}}, \quad -\frac{\binom{\varrho+p-2}{p-2}}{\binom{\varrho+p}{p}}, \quad \ldots, \quad (-1)^{p-1}\frac{\binom{\varrho}{0}}{\binom{\varrho+p}{p}}, \quad 0, \ldots, 0.$$

Dies zeigt, daß sowohl die Koeffizienten- als auch die Gleichungsmatrix von (1) höchstens den Rang p hat; die weiteren Betrachtungen ergeben, daß der Rang genau p ist.

Wir fixieren nun eine Lösung der Gleichungen (1), von denen wir nur noch die p ersten, $(\mu = 0, 1, \ldots, p-1)$, in Betracht zu ziehen brauchen, in der Weise, daß wir zunächst willkürlich p Indizes $\varrho_1 < \varrho_2 < \cdots < \varrho_p$ aus $\eta m < \varrho \leqq m$ wählen und

$$(5) \qquad \alpha_\varrho^{(m,\eta)} = 0 \quad \text{für } \eta m < \varrho \leqq m, \ \varrho \neq \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_p$$

setzen. Die restlichen Größen $\alpha_{\varrho_1}^{(m,\eta)}, \alpha_{\varrho_2}^{(m,\eta)}, \ldots, \alpha_{\varrho_p}^{(m,\eta)}$ müssen dann den Gleichungen

$$(6) \qquad \frac{\binom{m+p-1-\mu}{p-1}}{\binom{m+p}{p}} = \alpha_{\varrho_1}^{(m,\eta)} \frac{\binom{\varrho_1+p-1-\mu}{p-1}}{\binom{\varrho_1+p}{p}} + \cdots + \alpha_{\varrho_p}^{(m,\eta)} \frac{\binom{\varrho_p+p-1-\mu}{p-1}}{\binom{\varrho_p+p}{p}}$$

$$(\mu = 0, 1, \ldots, p-1)$$

genügen. Die Determinante dieses Gleichungssystems lautet, wenn man gleich die dem Übergang von (3) zu (4) entsprechende Umformung vornimmt:

$$D_p = \frac{(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}}}{\binom{\varrho_1+p}{p}\binom{\varrho_2+p}{p}\cdots\binom{\varrho_p+p}{p}} \begin{vmatrix} \binom{\varrho_1+p-1}{p-1} & \binom{\varrho_2+p-1}{p-1} & \cdots & \binom{\varrho_p+p-1}{p-1} \\ \binom{\varrho_1+p-2}{p-2} & \binom{\varrho_2+p-2}{p-2} & \cdots & \binom{\varrho_p+p-2}{p-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \binom{\varrho_1}{0} & \binom{\varrho_2}{0} & \cdots & \binom{\varrho_p}{0} \end{vmatrix}.$$

Indem man noch, mit der letzten Zeile beginnend, geeignete Vielfache jeder Zeile von den vorhergehenden Zeilen abzieht, läßt sie sich auf die Form

$$(7) \qquad D_p = \frac{(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}}}{1!\,2!\ldots(p-1)!} \cdot \frac{V_p(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_p)}{\binom{\varrho_1+p}{p}\binom{\varrho_2+p}{p}\cdots\binom{\varrho_p+p}{p}}$$

bringen, wo $V_p(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_p)$ die für die Größen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_p$ gebildete VANDERMONDEsche Determinante bedeutet. Für die zu berechnenden Größen $\alpha_{\varrho_\lambda}^{(m,\eta)}$ ergibt sich damit sofort

$$(8) \qquad \alpha_{\varrho_\lambda}^{(m,\eta)} = \frac{\binom{\varrho_\lambda+p}{p}}{\binom{m+p}{p}} \cdot \frac{V_p(\varrho_1, \ldots, \varrho_{\lambda-1}, m, \varrho_{\lambda+1}, \ldots, \varrho_p)}{V_p(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_p)} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, p).$$

Um nun der Bedingung (IV) des Hauptsatzes zu genügen, wählen wir jedenfalls $\eta < \frac{1}{p}$ und m so groß, daß $p m_\eta < m$ ausfällt. Wir setzen dann

$$(9) \qquad \varrho_1 = m_\eta, \quad \varrho_2 = 2m_\eta, \quad \ldots, \quad \varrho_p = p\,m_\eta$$

und finden nach (8)

$$(10) \qquad \alpha_{\varrho_\lambda}^{(m,\eta)} = \frac{(-1)^{p-\lambda}}{(\lambda-1)!\,(p-\lambda)!} \cdot \frac{(m-m_\eta)(m-2m_\eta)\ldots(m-p\,m_\eta)}{(m-\lambda m_\eta)\, m_\eta^{p-1}} \cdot \frac{\binom{\lambda m_\eta+p}{p}}{\binom{m+p}{p}}$$
$$(\lambda = 1, 2, \ldots, p).$$

Für $m \to \infty$ strebt $\alpha_{\varrho_\lambda}^{(m,\eta)}$ gegen einen Grenzwert, dessen Betrag für alle $\lambda = 1, 2, \ldots, p$ kleiner als ηp^p ist. Dieser Wert ist $< \frac{\varepsilon}{2p}$, wenn η auf ein hinreichend kleines Intervall $0 < \eta < \eta_0(\varepsilon)$ beschränkt wird. Bei jeder solchen Wahl von η wird danach für die durch (5) und (10) bestimmten Größen $\alpha_\varrho^{(m,\eta)}$

$$\sum_{\eta m < \varrho \leqq m} |\alpha_\varrho^{(m,\eta)}| < \varepsilon \quad \text{für } m > M(\eta).$$

Die Matrix (C_p) erfüllt somit für beliebiges ganzes $p > 1$ die Bedingung (IV) des Hauptsatzes.

§ 2.

Die Hölderschen Verfahren.

Als „(H, r, s)-*Transformation*" werde wie üblich für ganze $r, s \geqq 0$ die Transformation bezeichnet, die durch die Matrizen (H_r) und $(H\ )$ festgelegt ist. Dabei verstehen wir unter (H_p) das bekannte Schema der H_p-Transformation einfacher Folgen. Schreiben wir dasselbe

$$(H_p): \quad \begin{array}{llll} u_{00}^{(p)} & & & \\ u_{10}^{(p)} & u_{11}^{(p)} & & \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \\ u_{m0}^{(p)} & u_{m1}^{(p)} & \ldots & u_{mm}^{(p)} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \end{array} \qquad (p = 0, 1, 2 \ldots),$$

so bestimmen sich die Elemente $u_{m\mu}^{(p)}$ rekursiv durch die Formeln

$$(1)\quad u_{m\mu}^{(0)} = \begin{cases} 1 & \text{für } \mu = m \\ 0 & \text{für } \mu \neq m \end{cases} \quad \text{und weiter} \quad u_{m\mu}^{(p)} = \frac{1}{m+1} \sum_{\nu=\mu}^{m} u_{\nu\mu}^{(p-1)} \quad (p = 1, 2, \ldots).$$

Explizit ergibt sich hieraus bei $p > 1$ für $u_{m\mu}^{(p)}$ der Ausdruck

$$(2)\qquad u_{m\mu}^{(p)} = \frac{1}{m+1} \sum_{\nu_{p-1}=\mu+1}^{m+1} \frac{1}{\nu_{p-1}} \sum_{\nu_{p-2}=\mu+1}^{\nu_{p-1}} \frac{1}{\nu_{p-2}} \cdots \sum_{\nu_1=\mu+1}^{\nu_2} \frac{1}{\nu_1}.$$

Wir wollen zeigen, daß für die so definierten (H, r, s)-Transformationen der Permanenzsatz für restringierte Limitierung in derselben Form wie für die (C, r, s)-Transformationen gilt:

Permanenzsatz der H-Verfahren. *Eine restringiert konvergente Doppelfolge $(s_{\mu\nu})$ ist dann und nur dann auch restringiert (H, r, s)-limitierbar (r, s ganz, $\geqq 0$), wenn sie restringiert (H, r, s)-beschränkt ist. Ist die Doppel-*

folge $(s_{\mu\nu})$ *zugleich restringiert konvergent und restringiert* (H, r, s)*-limitierbar, so gilt*

$$(H, r, s)\text{-}\underset{\mu,\nu\to\infty}{[\lim]}\, s_{\mu\nu} = \underset{\mu,\nu\to\infty}{[\lim]}\, s_{\mu\nu}.$$

Beweis. Da bekannt ist, daß die Matrizen (H_p) den Toeplitzschen Bedingungen genügen, daß also die (H, r, s)-Transformationen gewiß zur Klasse der T-Transformationen gehören, so hat man wie bei den C-Verfahren nur noch zu zeigen, daß es sich genauer um T''-Transformationen handelt, d. h. daß sich die Elemente einer beliebigen Matrix (H_p), $(p = 0, 1, 2, \ldots)$, für kleine positive η und große m in passender Weise durch Gleichungssysteme

$$u_{m\mu}^{(p)} = \sum_{\eta m < \varrho \leqq m} \alpha_{\varrho}^{(m,\eta)}\, u_{\varrho\mu}^{(p)} \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, [\eta m]) \tag{3}$$

verknüpfen lassen.

Wir dürfen $p > 1$ voraussetzen, da die Fälle $p = 0$ und $p = 1$ mit den entsprechenden Fällen der C-Verfahren übereinstimmen. Wählen wir η beliebig aus $0 < \eta < 1$ und dann m so groß, daß die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems (3) mindestens p Zeilen und Spalten aufweist, so hat diese Matrix den Rang p. Irgendeine ihrer Spalten hat nämlich, horizontal angeordnet, die Form

$$u_{\varrho 0}^{(p)},\quad u_{\varrho 1}^{(p)},\quad \ldots,\quad u_{\varrho,[\eta m]}^{(p)}. \tag{4}$$

Subtrahiert man, bei der letzten Zeile beginnend, von jeder Zeile ein geeignetes Vielfaches der vorangehenden Zeile unter Beachtung der für $p \geqq 1$ geltenden Beziehungen

$$u_{\varrho\lambda}^{(p)} = u_{\varrho,\lambda-1}^{(p)} - \frac{1}{\lambda}\, u_{\varrho,\lambda-1}^{(p-1)} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, \varrho) \tag{5}$$

[die sich mühelos aus (2) ergeben], so erhält die Spalte (4) nach p-maliger Wiederholung dieses Prozesses, wobei das erste Mal bis zur 1. Zeile, das zweite Mal bis zur 2. Zeile usw. zu gehen ist, die Form

$$u_{\varrho 0}^{(p)},\quad -\frac{1}{1!}\, u_{\varrho 0}^{(p-1)},\quad \frac{1}{2!}\, u_{\varrho 0}^{(p-2)},\quad \ldots,\quad (-1)^{(p-1)} \frac{1}{(p-1)!}\, u_{\varrho 0}^{(1)},\quad 0, \ldots, 0. \tag{6}$$

Dies zeigt, daß sowohl die Koeffizienten- als auch die Gleichungsmatrix von (3) höchstens den Rang p hat, die weiteren Rechnungen werden ergeben, daß der Rang genau p ist.

Wir suchen nunmehr die Gleichungen (3), von denen wir weiterhin nur die p ersten, ($\mu = 0, 1, \ldots, p-1$), in Betracht zu ziehen brauchen, in der Weise zu lösen, daß wir zunächst willkürlich p Indizes $\varrho_1 < \varrho_2 < \cdots < \varrho_p$ aus $\eta m < \varrho \leqq m$ wählen und

$$(7) \qquad \alpha_\varrho^{(m,\eta)} = 0 \quad \text{für } \eta m < \varrho \leqq m, \quad \varrho \neq \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_p$$

setzen, so daß die restlichen Größen $\alpha_{\varrho_1}^{(m,\eta)}, \alpha_{\varrho_2}^{(m,\eta)}, \ldots, \alpha_{\varrho_p}^{(m,\eta)}$ den Gleichungen

$$(8) \quad u_{m\mu}^{(p)} = \alpha_{\varrho_1}^{(m,\eta)} u_{\varrho_1 \mu}^{(p)} + \alpha_{\varrho_2}^{(m,\eta)} u_{\varrho_2 \mu}^{(p)} + \cdots + \alpha_{\varrho_p}^{(m,\eta)} u_{\varrho_p \mu}^{(p)} \quad (\mu = 0, 1, \ldots, p-1)$$

genügen müssen. Die Determinante dieses Gleichungssystems lautet, wenn gleich die dem Übergang von (4) zu (6) entsprechende Umformung vorgenommen wird,

$$(9) \qquad D_p = \frac{(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}}}{1!\,2!\cdots(p-1)!} \begin{vmatrix} u_{\varrho_1 0}^{(p)} & u_{\varrho_2 0}^{(p)} & \cdots & u_{\varrho_p 0}^{(p)} \\ u_{\varrho_1 0}^{(p-1)} & u_{\varrho_2 0}^{(p-1)} & \cdots & u_{\varrho_p 0}^{(p-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{\varrho_1 0}^{(1)} & u_{\varrho_2 0}^{(1)} & \cdots & u_{\varrho_p 0}^{(1)} \end{vmatrix}.$$

Setzt man für die Elemente $u_{m\mu}^{(q)}$ die Ausdrücke (2) ein, zieht aus jeder Spalte den vor dem Summenzeichen stehenden gemeinsamen Faktor heraus und subtrahiert sodann die erste Spalte von allen übrigen, so geht D_p durch Entwickeln nach der letzten Zeile in die folgende ($p-1$)-reihige Determinante über

$$D_p = \frac{(-1)^{\frac{(p-1)(p-2)}{2}}}{1!\,2!\ldots(p-1)!} \cdot \frac{\Delta_p}{(\varrho_1+1)(\varrho_2+1)\cdots(\varrho_p+1)}$$

mit

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} \cdots & \displaystyle\sum_{\nu_{p-1}=\varrho_1+2}^{\varrho_\lambda+1} \frac{1}{\nu_{p-1}} \sum_{\nu_{p-2}=1}^{\nu_{p-1}} \frac{1}{\nu_{p-2}} \cdots \sum_{\nu_1=1}^{\nu_2} \frac{1}{\nu_1} & \cdots \\ \cdots & \displaystyle\sum_{\nu_{p-2}=\varrho_1+2}^{\varrho_\lambda+1} \frac{1}{\nu_{p-2}} \cdots \sum_{\nu_1=1}^{\nu_2} \frac{1}{\nu_1} & \cdot\;\cdot \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \cdots & \displaystyle\sum_{\nu_1=\varrho_1+2}^{\varrho_\lambda+1} \frac{1}{\nu_1} & \cdots \end{vmatrix} \qquad (\lambda = 2, \ldots, p).$$

Die in einer beliebigen Spalte stehenden Elemente können wir nun, von unten nach oben fortschreitend, durch die folgenden Formeln umschreiben:

$$\sum_{\nu_1=\varrho_1+2}^{\varrho_\lambda+1}\frac{1}{\nu_1} = \sum_{\nu_1=\varrho_1+2}^{\varrho_\lambda+1}\frac{1}{\nu_1},$$

$$\sum_{\nu_2=\varrho_1+2}^{\varrho_\lambda+1}\frac{1}{\nu_2}\sum_{\nu_1=1}^{\nu_2}\frac{1}{\nu_1} = \sum_{\nu_2=\varrho_1+2}^{\varrho_\lambda+1}\frac{1}{\nu_2}\cdot\sum_{\nu_1=1}^{\varrho_1+1}\frac{1}{\nu_1} + \sum_{\nu_2=\varrho_1+2}^{\varrho_\lambda+1}\frac{1}{\nu_2}\sum_{\nu_1=\varrho_1+2}^{\nu_2}\frac{1}{\nu_1},$$

$$\sum_{\nu_3=\varrho_1+2}^{\varrho_\lambda-1}\frac{1}{\nu_3}\sum_{\nu_2=1}^{\nu_3}\frac{1}{\nu_2}\sum_{\nu_1=1}^{\nu_2}\frac{1}{\nu_1} = \sum_{\nu_3=\varrho_1+2}^{\varrho_\lambda+1}\frac{1}{\nu_3}\cdot\sum_{\nu_2=1}^{\varrho_1+1}\frac{1}{\nu_2}\sum_{\nu_1=1}^{\nu_2}\frac{1}{\nu_1} + \sum_{\nu_3=\varrho_1+2}^{\varrho_\lambda+1}\frac{1}{\nu_3}\sum_{\nu_2=\varrho_1+2}^{\nu_3}\frac{1}{\nu_2}$$

$$\cdot\sum_{\nu_1=1}^{\varrho_1+1}\frac{1}{\nu_1} + \sum_{\nu_3=\varrho_1+2}^{\varrho_\lambda+1}\frac{1}{\nu_3}\sum_{\nu_2=\varrho_1+2}^{\nu_3}\frac{1}{\nu_2}\sum_{\nu_1=\varrho_1+2}^{\nu_2}\frac{1}{\nu_1},$$

. . . .

Damit läßt sich die Determinante Δ_p durch wiederholte Zeilensubtraktion schließlich in die Form setzen

$$\Delta_p = \left|\begin{array}{ccccc} \cdots & \sum\limits_{\nu_{p-1}=\varrho_1+2}^{\varrho_\lambda+1}\frac{1}{\nu_{p-1}} & \sum\limits_{\nu_{p-2}=\varrho_1+2}^{\nu_{p-1}}\frac{1}{\nu_{p-2}} \cdots & \sum\limits_{\nu_1=\varrho_1+2}^{\nu_2}\frac{1}{\nu_1} & \cdots \\ \cdots & & \sum\limits_{\nu_{p-2}=\varrho_1+2}^{\varrho_\lambda+1}\frac{1}{\nu_{p-2}} \cdots & \sum\limits_{\nu_1=\varrho_1+2}^{\nu_2}\frac{1}{\nu_1} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & & & \sum\limits_{\nu_1=\varrho_1+2}^{\varrho_\lambda+1}\frac{1}{\nu_1} & \cdots \end{array}\right| \quad (\lambda = 2, 3, \ldots, p).$$

Die nunmehr auftretenden Ausdrücke lassen sich in bequemer Weise für große $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_p$ asymptotisch abschätzen. Man hat nämlich, wieder von unten nach oben fortschreitend, für beliebiges $\varrho > \varrho_1$ mit $\varrho = O(\varrho_1)$ nacheinander

$$\sum_{\nu_1=\varrho_1+2}^{\varrho+1}\frac{1}{\nu_1} = \int\limits_{\varrho_1+2}^{\varrho+1}\frac{dx}{x} + O\left(\frac{1}{\varrho_1}\right) = \frac{1}{1!}[\ln\varrho - \ln\varrho_1] + O\left(\frac{1}{\varrho_1}\right),$$

$$\sum_{\nu_2=\varrho_1+2}^{\varrho+1}\frac{1}{\nu_2}\sum_{\nu_1=\varrho_1+2}^{\nu_2}\frac{1}{\nu_1} = \int\limits_{\varrho_1+2}^{\varrho+1}[\ln x - \ln\varrho_1]\frac{dx}{x} + O\left(\frac{\ln\varrho}{\varrho_1}\right)$$

$$= \frac{1}{2!}[\ln\varrho - \ln\varrho_1]^2 + O\left(\frac{\ln\varrho_1}{\varrho_1}\right)$$

usw.

Damit sind wir in der Lage, die Auflösung des Gleichungssystems (8) vollends in übersichtlicher Weise durchzuführen. Wir setzen $\eta = \vartheta^p$ und verfügen über die bisher willkürlich angenommenen Indizes $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_p$ in der Weise, daß wir

$$\varrho_1 = [\vartheta^p m] + 1, \quad \varrho_2 = [\vartheta^{p-1} m] + 1, \quad \ldots, \quad \varrho_p = [\vartheta m] + 1$$

wählen, wobei m so groß sei, daß diese Werte voneinander verschieden sind. Die Determinante Δ_p erhält dann den Wert

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} \cdots & \frac{1}{(p-1)!}\{\ln \vartheta^{p-\lambda} m - \ln \vartheta^p m\}^{p-1} + O\left(\frac{\ln^{p-2} m}{m}\right) & \cdots \\ \cdots & \frac{1}{(p-2)!}\{\ln \vartheta^{p-\lambda} m - \ln \vartheta^p m\}^{p-2} + O\left(\frac{\ln^{p-3} m}{m}\right) & \cdots \\ \cdot & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdot \\ \cdots & \frac{1}{1!}\{\ln \vartheta^{p-\lambda} m - \ln \vartheta^p m\} + O\left(\frac{1}{m}\right) & \cdots \end{vmatrix} \quad \begin{matrix}(\lambda = 1, 2, \ldots, \\ p-1)\end{matrix}$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{(p-1)(p-2)}{2}}}{1!\,2!\ldots(p-1)!}\{\ln \vartheta\}^{\frac{p(p-1)}{2}} V_p(0, 1, 2, \ldots, p-1) + O\left(\frac{\ln^{p-2} m}{m}\right),$$

wo $V_p(0, 1, \ldots, p-1)$ die für $0, 1, \ldots, p-1$ gebildete Vandermondesche Determinante bedeutet. Um nun die gesuchten Größen $\alpha_{\varrho_\lambda}^{(m,\eta)}$ zu erhalten, hat man nur zu beachten, daß die Zählerdeterminante jeweils aus D_p entsteht, indem man $\varrho_\lambda = m$ an Stelle von $\varrho_\lambda = [\vartheta^{p+1-\lambda} m] + 1$ einführt. Damit ergibt sich

$$\alpha_{\varrho_\lambda}^{(m,\eta)} = \frac{[\vartheta^{p+1-\lambda} m] + 2}{m+1}\left\{\frac{V_p(0, \ldots, \lambda-2, p, \lambda, \ldots, p-1)}{V_p(0, 1, \ldots, p-1)} + O\left(\frac{\ln^{p-2} m}{m}\right)\right\}.$$

Man erkennt, daß dieser Wert für $m \to \infty$ gegen

$$\frac{V_p(0, \ldots, \lambda-2, p, \lambda, \ldots, p-1)}{V_p(0, 1, \ldots, p-1)}\,\vartheta^{p+1-\lambda} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, p)$$

strebt, einen Wert, der bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ unter $\frac{\varepsilon}{2p}$ sinkt, falls nur ϑ, d. h. η hinreichend klein gewählt ist. Hieraus folgt, daß für $\eta < \eta_0(\varepsilon)$

$$\sum_{\eta m < \varrho \leqq m} |\alpha_\varrho^{(m,\eta)}| < \varepsilon \quad \text{für } m > M(\eta)$$

gilt. Die Matrix (H_p) erfüllt somit für beliebiges ganzes $p > 1$ die Bedingung (IV) des Hauptsatzes.

§ 3.

Die Euler-Knoppschen Verfahren.

Wir bezeichnen als „(E, r, s)-*Transformation*" für ganze $r, s \geqq 0$ die Transformation, die durch die Matrizen (E_r) und (E_s) festgelegt ist. Dabei verstehen wir unter (E_p) das bekannte Schema der E_p-Transformation einfacher Folgen, das die Form hat:

$$(E_p): \quad \begin{array}{l} \frac{1}{(q+1)^0}\left\{\binom{0}{0}\right\} \\ \frac{1}{(q+1)^1}\left\{\binom{1}{0}q, \binom{1}{1}\right\} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{1}{(q+1)^m}\left\{\binom{m}{0}q^m, \binom{m}{1}q^{m-1}, \ldots, \binom{m}{m}\right\} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array} \qquad \begin{pmatrix} q = 2^p - 1 \\ p = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}.$$

Wir wollen zeigen, daß auch für die so definierten E-Transformationen der Permanenzsatz in derselben Form wie für die C- und H-Verfahren gilt:

Permanenzsatz der E-Verfahren. *Eine restringiert konvergente Doppelfolge $(s_{\mu\nu})$ ist dann und nur dann auch restringiert (E, r, s)-limitierbar $(r, s$ ganz, $\geqq 0)$, wenn sie restringiert (E, r, s)-beschränkt ist. Ist die Doppelfolge $(s_{\mu\nu})$ zugleich restringiert konvergent und restringiert (E, r, s)-limitierbar, so gilt*

$$(E, r, s)\text{-}\underset{\mu,\nu\to\infty}{[\lim]} s_{\mu\nu} = \underset{\mu,\nu\to\infty}{[\lim]} s_{\mu\nu}.$$

Beweis. Da bekannt ist, daß die Matrizen (E_p) den Toeplitzschen Bedingungen genügen, daß also die (E, r, s)-Transformationen zur Klasse der T-Transformationen gehören, so ist auch hier wieder nur noch zu zeigen, daß es sich genauer um T''-Transformationen handelt, d. h. daß sich die Elemente einer beliebigen Matrix (E_p), $(p = 0, 1, 2, \ldots)$, für kleine positive η und große m in passender Weise durch Gleichungssysteme

$$(1) \qquad \frac{q^{m-\mu}}{(q+1)^m}\binom{m}{\mu} = \sum_{\eta m < \varrho \leqq m} \alpha_\varrho^{(m,\eta)} \frac{q^{\varrho-\mu}}{(q+1)^\varrho}\binom{\varrho}{\mu} \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, [\eta m])$$

verknüpfen lassen. Da (E_0) wieder die identische Transformation liefert, können wir $p > 0$, also auch $q > 0$, voraussetzen. Bei der Durchführung des Beweises empfiehlt es sich, die Abkürzung

$$(2) \qquad [\eta m] + 1 = m_\eta$$

zu verwenden.

Wir wählen zunächst $\eta < \frac{1}{2}$ und m so groß, daß $2\,m_\eta < m$ ausfällt. Für ein solches η und m genügen wir den Gleichungen (1), indem wir

$$\alpha_\varrho^{(m,\,\eta)} = 0 \quad \text{für } \eta m < \varrho \leqq m,\ \varrho \neq m_\eta, m_\eta + 1, \ldots, 2\,m_\eta \tag{3}$$

wählen, während die übrigen $\alpha_\varrho^{(m,\,\eta)}$ die Gleichungen

$$\frac{q^{m-u}}{(q+1)^m}\binom{m}{\mu} = \sum_{\varrho = m_\eta}^{2\,m_\eta} \alpha_\varrho^{(m,\,\eta)} \frac{q^{\varrho-u}}{(q+1)^\varrho}\binom{\varrho}{\mu} \quad (\mu = 0, 1, \ldots, m_\eta) \tag{4}$$

erfüllen sollen. Das Gleichungssystem (4) läßt sich durch Einführung der Abkürzung

$$v = \frac{q}{q+1}$$

umschreiben in

$$v^{m-m_\eta}\binom{m}{\mu} = \alpha_{m_\eta}^{(m,\,\eta)}\binom{m_\eta}{\mu} + \alpha_{m_\eta+1}^{(m,\,\eta)}\binom{m_\eta+1}{\mu} v + \cdots + \alpha_{2\,m_\eta}^{(m,\,\eta)}\binom{2\,m_\eta}{\mu} v^{m_\eta} \tag{5}$$
$$(\mu = 0, 1, \ldots, m_\eta).$$

Die Determinante dieses Gleichungssystems lautet

$$D = v^{\frac{m_\eta(m_\eta+1)}{2}} \begin{vmatrix} \binom{m_\eta}{0} & \binom{m_\eta+1}{0} & \cdots & \binom{2\,m_\eta}{0} \\ \binom{m_\eta}{1} & \binom{m_\eta+1}{1} & \cdots & \binom{2\,m_\eta}{1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \binom{m_\eta}{m_\eta} & \binom{m_\eta+1}{m_\eta} & \cdots & \binom{2\,m_\eta}{m_\eta} \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante vereinfacht sich, wenn mit der 1. Zeile beginnend jede Zeile von der nachfolgenden subtrahiert wird. Führt man diesen Prozeß wiederholt durch, so erhält man nach m_η Schritten eine Determinante, deren sämtliche unterhalb der Hauptdiagonale stehenden Elemente verschwinden, während die in der Hauptdiagonale stehenden Elemente den Wert 1 haben; es ist also

$$D = v^{\frac{m_\eta(m_\eta+1)}{2}} \neq 0.$$

Die bei der Auflösung des Gleichungssystems (5) auftretenden Zählerdeterminanten lassen sich in derselben Weise reduzieren und man erhält so die Werte:

$$\alpha_{m_\eta+\lambda}^{(m,\,\eta)} = (-1)^{m_\eta+\lambda}\binom{m-m_\eta}{\lambda}\binom{m-m_\eta-1-\lambda}{m_\eta-\lambda} v^{m-m_\eta-\lambda} \tag{6}$$
$$(\lambda = 0, 1, \ldots, m_\eta).$$

Für die durch (3) und (6) bestimmte Lösung der Gleichungen (1) wird

$$\sum_{\eta m < \varrho \leqq m} |\alpha_\varrho^{(m,\eta)}| = \sum_{\lambda=0}^{m_\eta} \binom{m-m_\eta}{\lambda} \binom{m-m_\eta-1-\lambda}{m_\eta-\lambda} v^{m-m_\eta-\lambda}$$

$$= (m-2m_\eta) \binom{m-m_\eta}{m_\eta} \sum_{\lambda=0}^{m_\eta} \frac{\binom{m_\eta}{\lambda}}{m-m_\eta-\lambda} v^{m-m_\eta-\lambda}$$

$$= (m-2m_\eta) \binom{m-m_\eta}{m_\eta} \int_0^v v^{m-2m_\eta-1} (1+v)^{m_\eta}\, dv,$$

also

$$(7) \qquad \sum_{\eta m < \varrho \leqq m} |\alpha_\varrho^{(m,\eta)}| \leqq (m-2m_\eta) \binom{m-m_\eta}{m_\eta} v^{m-2m_\eta} (1+v)^{m_\eta}.$$

Durch Anwendung der STIRLINGschen Formel folgt hieraus weiter

$$(8) \qquad \sum_{\eta m < \varrho \leqq m} |\alpha_\varrho^{(m,\eta)}| \leqq \text{Konst.}\, m\sqrt{m} \left(\frac{v^{1-2\eta-\frac{2}{m}} (1+v)^{\eta-\frac{1}{m}}}{\eta^{\eta+\frac{1}{m}} \left(1-2\eta-\frac{2}{m}\right)^{1-2\eta}} \right)^m.$$

Bei festem η strebt der Ausdruck in der Klammer für $m \to \infty$ gegen

$$\frac{v^{1-2\eta}(1+v)^\eta}{\eta^\eta (1-2\eta)^{1-2\eta}}.$$

Dieser Limes ist kleiner als Eins, wenn η auf ein genügend kleines Intervall $0 < \eta < \eta_0$ beschränkt wird. Hieraus folgt, daß für ein solches, fest gewähltes η der Ausdruck in der Klammer von (8) selbst kleiner als eine Zahl $v_0 < 1$ ist, falls nur m genügend groß angenommen wird. Für ein festes η aus $0 < \eta < \eta_0$ gilt also bei hinreichend großem m

$$\sum_{\eta m < \varrho \leqq m} |\alpha_\varrho^{(m,\eta)}| \leqq \text{Konst.}\, m\sqrt{m}\, v_0^m.$$

Hieraus schließt man endlich, daß es bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ zu jedem η aus $0 < \eta < \eta_0$ eine Zahl $M(\eta)$ gibt derart, daß

$$\sum_{\eta m < \varrho \leqq m} |\alpha_\varrho^{(m,\eta)}| < \varepsilon \quad \text{für } m > M(\eta)$$

ausfällt. Die Matrix (E_p) erfüllt somit für beliebiges ganzes $p > 0$ die Bedingung (IV) des Hauptsatzes.

§ 4.

Die Äquivalenz der Cesàroschen und Hölderschen Verfahren.

Wir wenden uns nun noch zur Untersuchung der Frage, wie weit sich der KNOPP-SCHNEEsche Satz von der Äquivalenz der C- und H-Verfahren auf die restringierte Limitierung von Doppelfolgen überträgt. Wie einfache Beispiele zeigen, kann der Satz jedenfalls nicht in der allgemeinen Form gelten, daß für ganzes $r, s \geqq 0$ aus der restringierten (C, r, s)-Limitierbarkeit einer Doppelfolge stets ihre restringierte (H, r, s)-Limitierbarkeit zu demselben Limes folgt und umgekehrt:

1) Die Doppelfolge $(s_{\mu\nu})$ mit

$$s_{0\nu} = 2\{(\nu+1)^2 - \nu^2\}, \quad s_{1\nu} = -4\{(\nu+1)^2 - \nu^2\}, \quad s_{2\nu} = 2\{(\nu+1)^2 - \nu^2\},$$
$$s_{\mu\nu} = 0 \quad \text{für} \quad \mu \geqq 3$$

besitzt den Limes 0. Ihre arithmetischen Mittel $(m_{\mu\nu})$ sind

$$m_{0\nu} = 2(\nu+1), \quad m_{1\nu} = -(\nu+1), \quad m_{\mu\nu} = 0 \text{ für } \mu \geqq 2,$$

sie haben also ebenfalls den Limes 0. Dasselbe gilt schließlich von ihrer $(C, 2, 2)$-Transformation $(c_{\mu\nu}^{(2,2)})$, denn man sieht ohne Mühe, daß

$$c_{\mu\nu}^{(2,2)} = 0 \quad \text{für} \quad \mu \geqq 1$$

gilt. Trotzdem danach die Doppelfolge $(s_{\mu\nu})$ im gewöhnlichen Sinne konvergent, $(C, 1, 1) = (H, 1, 1)$-limitierbar und $(C, 2, 2)$-limitierbar zu demselben Wert 0 ist, ist sie nicht einmal restringiert $(H, 2, 2)$-limitierbar. Für ihre $(H, 2, 2)$-Transformation $(h_{\mu\nu}^{(2,2)})$ gilt nämlich speziell

$$h_{\mu\mu}^{(2,2)} = \frac{1}{2}\,\frac{\mu+2}{\mu+1} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots),$$

sie kann also nicht den Limes 0 im restringierten Sinne besitzen und ein anderer Limes kommt nach dem Permanenzsatz des § 2 nicht in Frage.

2) Die Doppelfolge $(s_{\mu\nu})$ mit

$$s_{0\nu} = (\nu+1)^3 - \nu^3, \quad s_{1\nu} = -3\{(\nu+1)^3 - \nu^3\}, \quad s_{2\nu} = 2\{(\nu+1)^3 - \nu^3\},$$
$$s_{\mu\nu} = 0 \quad \text{für} \quad \mu \geqq 3,$$

besitzt den Limes 0. Dasselbe gilt für ihre arithmetischen Mittel $(m_{\mu\nu})$, die die Werte

$$m_{0\nu} = (\nu+1)^2, \quad m_{1\nu} = -(\nu+1)^2, \quad m_{\mu\nu} = 0 \text{ für } \mu \geqq 2$$

besitzen, sowie für ihre $(H, 2, 2)$-Transformation $(h_{\mu\nu}^{(2,2)})$, denn wie man mühelos nachprüft, gilt

$$h_{\mu\nu}^{(2,2)} = 0 \quad \text{für} \quad \mu \geqq 1.$$

Trotzdem danach die Doppelfolge $(s_{\mu\nu})$ im gewöhnlichen Sinne konvergent, $(C, 1, 1) = (H, 1, 1)$-limitierbar und $(H, 2, 2)$-limitierbar zu demselben Wert 0 ist, ist sie nicht einmal restringiert $(C, 2, 2)$-limitierbar. Für ihre $(C, 2, 2)$-Transformation $(c_{\mu\nu}^{(2,2)})$ gilt nämlich speziell

$$c_{\mu\mu}^{(2,2)} = -\frac{1}{\binom{\mu+2}{2}^2}\,[1^3 + 2^3 + \cdots + (\mu+1)^3] \qquad (\mu = 1, 2, \ldots),$$

sie kann also nicht den Limes 0 im restringierten Sinne besitzen und ein anderer Limes kommt nach dem Permanenzsatz des § 1 nicht in Frage.

Wenn danach die C- und H-Verfahren für restringierte Limitierung von Doppelfolgen auch nicht in vollem Umfange äquivalent sein können, so besagt doch der nachfolgende Satz, daß die Äquivalenz wenigstens in demselben abgeschwächten Sinne wie bei gewöhnlicher Limitierung von Doppelfolgen besteht:

Äquivalenzsatz der C- und H-Verfahren. *Eine für ganzes $r, s \geqq 0$ restringiert (C, r, s)-limitierbare Doppelfolge $(s_{\mu\nu})$ ist dann und nur dann auch restringiert (H, r, s)-limitierbar, wenn sie restringiert (H, r, s)-beschränkt ist, entsprechend umgekehrt. Ist die Doppelfolge $(s_{\mu\nu})$ zugleich restringiert (C, r, s)- und (H, r, s)-limitierbar,* so gilt

$$(C, r, s)\text{-}\underset{\mu,\nu\to\infty}{[\lim]}\, s_{\mu\nu} = (H, r, s)\text{-}\underset{\mu,\nu\to\infty}{[\lim]}\, s_{\mu\nu}.$$

Beweis. Beim Beweis gehen wir davon aus, daß sich jeweils die (C, r, s)-Transformation $(c_{\mu\nu}^{(r,s)})$ und die (H, r, s)-Transformation $(h_{\mu\nu}^{(r,s)})$ einer Doppelfolge $(s_{\mu\nu})$ durch T-Transformationen ineinander überführen lassen[7]: Der Übergang von der Folge $(c_{\mu\nu}^{(r,s)})$ zu der Folge $(h_{\mu\nu}^{(r,s)})$ vollzieht sich durch zwei Dreiecksmatrizen $A = (C \to H)_r$ und $B = (C \to H)_s$, wobei allgemein für ganzes $p \geqq 1$ die Matrix $(C \to H)_p$, welche die C_p-Transformation einer einfachen Folge in ihre H_p-Transformation überführt, eine lineare Kombination der Matrizen $(H_0), (H_1), \ldots, (H_{p-1})$ darstellt:

$$(1) \qquad (C\to H)_p = \gamma_0^{(p)}(H_0) + \gamma_1^{(p)}(H_1) + \cdots + \gamma_{p-1}^{(p)}(H_{p-1}).$$

Die Koeffizienten γ bestimmen sich dabei aus der Rekursionsformel

$$(2) \qquad \gamma_0^{(p)} = \frac{1}{p!}, \qquad \gamma_\lambda^{(p)} = \frac{\gamma_\lambda^{(p-1)} + (p-1)\,\gamma_{\lambda-1}^{(p-1)}}{p} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, p-1)$$

(falls man sich jeweils $\gamma_p^{(p)} = 0$ gesetzt denkt); sie zeigt, daß alle Größen $\gamma_\lambda^{(p)}$, $(\lambda = 0, 1, \ldots, p-1)$, positiv sind. Umgekehrt vollzieht sich auch der Übergang von der Folge $(h_{\mu\nu}^{(r,s)})$ zu der Folge $(c_{\mu\nu}^{(r,s)})$ durch zwei Dreiecksmatrizen $(A) = (H \to C)_r$ und $(B) = (H \to C)_s$, wobei nun allgemein für ganzes $p \geqq 1$ die Matrix $(H \to C)_p$, welche die H_p-Transformation einer einfachen Folge

[7]) Vgl. V. Garten, Über den Vergleich der Cesàroschen und Hölderschen Mittelbildungen. Math. Zeitschr. 47 (1940), S. 111–124 sowie die dort zitierte Literatur.

in ihre C_p-Transformation überführt, eine lineare Kombination der Matrizen $(C_0), (C_1), \ldots, (C_p)$ darstellt:

$$(3) \qquad (H \to C)_p = \delta_0^{(p)}(C_0) + \delta_1^{(p)}(C_1) + \cdots + \delta_p^{(p)}(C_p).$$

Die Koeffizienten δ bestimmen sich dabei jeweils aus den Gleichungen

$$(4) \qquad \delta_0^{(p)} = p!, \qquad \frac{(-1)^{\varkappa+1}}{p!} \sum_{\lambda=\varkappa+1}^{p} \lambda \binom{\lambda-1}{\varkappa} \delta_\lambda^{(p)} = d_{p-1-\varkappa}^{(p)} \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots, p-1),$$

wo die Größen d durch die Formel

$$(5) \qquad d_\lambda^{(p)} = (-1)^\lambda \binom{p-1}{\lambda} \frac{(p-\lambda-1)^p}{(p-1)!} \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, p-1)$$

erklärt sind, so daß $d_{p-1}^{(p)} = 0$, dagegen $d_\lambda^{(p)} \neq 0$ für $\lambda = 0, 1, \ldots, p-2$ gilt. Sowohl die Matrix $(C \to H)_p$ als auch die Matrix $(H \to C)_p$ genügt den Toeplitzschen Bedingungen, da sie nach dem Knopp-Schneeschen Satz jede konvergente (einfache) Folge in eine zum gleichen Wert konvergente Folge überführen. Es lassen sich also in der Tat $(c_{u\,i}^{r,\,s})$ und $(h_{u\,i}^{r,\,s})$ durch T-Transformationen ineinander überführen.

Nach dem Hauptsatz ist für den Beweis des Äquivalenzsatzes somit noch zu zeigen, daß diese T-Transformationen genauer der Klasse der T''-Transformationen angehören, daß also die Matrizen $(C \to H)_p$ und $(H \to C)_p$ der dafür charakteristischen zusätzlichen Bedingung (IV) genügen. Diesen Nachweis erbringen wir nacheinander für die beiden Matrizen:

1) $(C \to H)_p$. Da die Matrix für $p = 0$ und $p = 1$ die identische Transformation darstellt, dürfen wir $p > 1$ voraussetzen. Bezeichnen wir dann die Elemente der Matrix mit

$$x_{m\,\mu}^{(p)} \quad (\mu = 0, 1 \ldots, m; \; m = 0, 1, 2, \ldots),$$

so genügt es zu zeigen, daß sich dieselben für kleine positive η und große m in passender Weise durch Gleichungssysteme

$$(6) \qquad x_{m\,\mu}^{(p)} = \sum_{\eta m < \varrho \leq m} \alpha_\varrho^{(m,\,\eta)} x_{\varrho\,u}^{(p)} \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, [\eta m])$$

verknüpfen lassen.

Wählen wir η beliebig aus $0 < \eta < 1$ und dann m so groß, daß die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems (6) mindestens $p-1$ Zeilen und Spalten aufweist, so hat diese Matrix den Rang $p-1$. Irgendeine ihrer Spalten hat nämlich, horizontal angeordnet, zufolge (1) die Form

$$(7) \quad x_{\varrho\,0}^{(p)} = \sum_{\lambda=0}^{p-1} \gamma_\lambda^{(p)} u_{\varrho\,0}^{(\lambda)}, \quad x_{\varrho\,1}^{(p)} = \sum_{\lambda=0}^{p-1} \gamma_\lambda^{(p)} u_{\varrho\,1}^{(\lambda)}, \ldots, x_{\varrho,\,[\eta m]}^{(p)} = \sum_{\lambda=0}^{p-1} \gamma_\lambda^{(p)} u_{\varrho,\,[\eta m]}^{(\lambda)},$$

wo die Größen $u_{m\,u}^{(q)}$ die betreffenden Elemente der Matrix (H_q) bedeuten (vgl. § 2). Beachtet man, daß

$$u_{m\,u}^{(0)} = 0 \quad \text{für } \mu < m$$

gilt, so läßt sich die Matrix mit Hilfe der Gleichungen (5) des § 2 in einfacher Weise umformen. Subtrahiert man nämlich, bei der letzten Zeile beginnend, von jeder Zeile die mit einem entsprechenden Faktor versehene vorangehende Zeile und wiederholt dieses Verfahren $(p-1)$-mal, wobei man das erste Mal bis zur 1. Zeile, das zweite Mal bis zur 2. Zeile und das $(p-1)$-te Mal bis zur $(p-1)$-ten Zeile geht, so erhält die Spalte (7), wieder horizontal angeordnet, die Form

$$(8)\qquad \sum_{\lambda=1}^{p-1} \gamma_\lambda^{(p)} u_{\varrho 0}^{(\lambda)}, \quad -\frac{1}{1!}\sum_{\lambda=2}^{p-1} \gamma_\lambda^{(p)} u_{\varrho 0}^{(\lambda-1)}, \quad \frac{1}{2!}\sum_{\lambda=3}^{p-1} \gamma_\lambda^{(p)} u_{\varrho 0}^{(\lambda-2)}, \ \ldots,$$
$$\frac{(-1)^{p-2}}{(p-2)!}\gamma_{p-1}^{(p)} u_{\varrho 0}^{(1)}, 0, \ldots, 0.$$

Dies zeigt, daß sowohl die Koeffizienten- als auch die Gleichungsmatrix von (6) höchstens den Rang $p-1$ haben; daß sie genau den Rang $p-1$ haben, geht aus den weiteren Rechnungen hervor.

Wir lösen nun die Gleichungen (6), von denen wir weiterhin nur die $p-1$ ersten, $(\mu = 0, 1, \ldots, p-2)$, in Betracht zu ziehen brauchen, in der Weise, daß wir zunächst willkürlich $p-1$ Indizes $\varrho_1 < \varrho_2 < \cdots < \varrho_{p-1}$ aus $\eta m < \varrho \leqq m$ wählen und

$$(9)\qquad \alpha_\varrho^{(m,\eta)} = 0 \quad \text{für } \eta m < \varrho \leqq m, \quad \varrho \neq \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{p-1}$$

setzen, so daß die restlichen Größen $\alpha_{\varrho_1}^{(m,\eta)}, \alpha_{\varrho_2}^{(m,\eta)}, \ldots, \alpha_{\varrho_{p-1}}^{(m,\eta)}$ den Gleichungen

$$(10)\qquad x_{m\mu}^{(p)} = \alpha_{\varrho_1}^{(m,\eta)} x_{\varrho_1\mu}^{(p)} + \alpha_{\varrho_2}^{(m,\eta)} x_{\varrho_2\mu}^{(p)} + \cdots + \alpha_{\varrho_{p-1}}^{(m,\eta)} x_{\varrho_{p-1}\mu}^{(p)}$$
$$(\mu = 0, 1, \ldots, p-2)$$

genügen müssen. Die Determinante dieses Gleichungssystems lautet, wenn gleich die dem Übergang von (7) zu (8) entsprechende Umformung vorgenommen und dann noch, mit der letzten Zeile beginnend, ein geeignetes Vielfaches jeder Zeile von den vorhergehenden abgezogen wird, einfach

$$\frac{(-1)^{\frac{(p-1)(p-2)}{2}}}{1!\,2!\ldots(p-2)!}\{\gamma_{p-1}^{(p)}\}^{p-1}\begin{vmatrix} u_{\varrho_1 0}^{(p-1)} & u_{\varrho_2 0}^{(p-1)} & \cdots & u_{\varrho_{p-1} 0}^{(p-1)} \\ u_{\varrho_1 0}^{(p-2)} & u_{\varrho_2 0}^{(p-2)} & \cdots & u_{\varrho_{p-1} 0}^{(p-2)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ u_{\varrho_1 0}^{(1)} & u_{\varrho_2 0}^{(1)} & \cdots & u_{\varrho_{p-1} 0}^{(1)} \end{vmatrix};$$

sie stimmt also bis auf den Faktor $\{\gamma_{p-1}^{(p)}\}^{p-1}$ mit der Determinante D_{p-1} in § 2 überein [vgl. § 2, (9)]. Hieraus folgt, daß die Größen $\alpha_{\varrho_1}^{(m,\eta)}, \alpha_{\varrho_2}^{(m,\eta)}, \ldots, \alpha_{\varrho_{p-1}}^{(m,\eta)}$ genau dieselben Werte haben wie für die in § 2 behandelte Höldersche Matrix (H_{p-1}). Man entnimmt daher den dortigen Überlegungen, daß die Matrix $(C \to H)_p$ für beliebiges ganzes $p \geq 1$ der Bedingung (IV) des Hauptsatzes genügt.

2) $(H \to C)_p$. Da auch diese Matrix für $p = 0$ und $p = 1$ die identische Transformation darstellt, darf wieder $p > 1$ vorausgesetzt werden. Bezeichnen wir die Elemente der Matrix mit

$$y_{m\mu}^{(p)} \quad (\mu = 0, 1, \ldots, m;\ m = 0, 1, 2, \ldots),$$

so ist zu zeigen, daß sich dieselben für kleine positive η und große m geeignet durch Gleichungssysteme

$$y_{m\mu}^{(p)} = \sum_{\eta m < \varrho \leqq m} \alpha_\varrho^{(m,\eta)} y_{\varrho\mu}^{(p)} \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, [\eta m]) \tag{11}$$

verknüpfen lassen.

Wir wählen zunächst wieder η beliebig aus $0 < \eta < 1$ und dann m so groß, daß die Koeffizientenmatrix des Systems (11) mindestens $p-1$ Zeilen und Spalten aufweist. Die Matrix hat dann wie im vorhergehenden Falle den Rang $p-1$. Nach (3) hat irgendeine ihrer Spalten, horizontal angeordnet, die Form

$$\sum_{\lambda=1}^{p} \delta_\lambda^{(p)} \frac{\binom{\varrho+\lambda-1}{\lambda-1}}{\binom{\varrho+\lambda}{\lambda}}, \quad \sum_{\lambda=1}^{p} \delta_\lambda^{(p)} \frac{\binom{\varrho+\lambda-2}{\lambda-1}}{\binom{\varrho+\lambda}{\lambda}}, \quad \ldots, \quad \sum_{\lambda=1}^{p} \delta_\lambda^{(p)} \frac{\binom{\varrho+\lambda-1-[\eta m]}{\lambda-1}}{\binom{\varrho+\lambda}{\lambda}}. \tag{12}$$

Unter Heranziehung der Formeln (4) für die Größen δ:

$$(-1)^{\varkappa-1} \sum_{\lambda=\varkappa+1}^{p} \lambda \binom{\lambda-1}{\varkappa} \delta_\lambda^{(p)} = p!\, d_{p-1-\varkappa}^{(p)} \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots, p-1)$$

lassen sich die Elemente dieser Spalte erheblich vereinfachen. Dividiert man nämlich die vorstehenden Gleichungen für $\varkappa = 0, 1, \ldots, p-1$ nacheinander durch $\binom{\varrho+1}{1}, 2\binom{\varrho+2}{2}, \ldots, p\binom{\varrho+p}{p}$ und addiert, so erhält man

$$\sum_{\lambda=1}^{p} \lambda\, \delta_\lambda^{(p)} \sum_{\varkappa=0}^{\lambda-1} (-1)^{\varkappa-1} \frac{\binom{\lambda-1}{\varkappa}}{(\varkappa+1)\binom{\varrho+\varkappa+1}{\varkappa+1}} = p! \sum_{\varkappa=0}^{p-1} \frac{d_{p-1-\varkappa}^{(p)}}{(\varkappa+1)\binom{\varrho+\varkappa+1}{\varkappa+1}}.$$

Da aber[8])

$$\sum_{\varkappa=0}^{\lambda-1} (-1)^{\varkappa-1} \frac{\binom{\lambda-1}{\varkappa}}{(\varkappa+1)\binom{\varrho+\varkappa+1}{\varkappa+1}} = \sum_{\varkappa=0}^{\lambda-1} (-1)^{\varkappa-1} \frac{\binom{\varrho+\lambda}{\lambda-\varkappa-1}}{\lambda\binom{\varrho+\lambda}{\lambda}} = -\frac{\binom{\varrho+\lambda-1}{\lambda-1}}{\lambda\binom{\varrho+\lambda}{\lambda}}$$

[8]) Die hier und für die Umformung der weiteren Elemente der Spalte (12) benötigten Formeln

$$\sum_{\varkappa=0}^{\lambda-1} (-1)^\varkappa \binom{\varkappa+\sigma}{\sigma} \binom{\varrho+\lambda}{\lambda-\varkappa-1} = \binom{\varrho+\lambda-1-\sigma}{\lambda-1} \qquad (\sigma = 0, 1, 2, \ldots)$$

ergeben sich sogleich durch Vergleich der Potenzreihenentwicklungen beider Seiten von

$$(1+x)^{\varrho+\lambda}\,(1+x)^{-(1+\sigma)} = (1+x)^{\varrho+\lambda-1-\sigma}.$$

ist, so hat man (wenn man noch $d_{p-1}^{(p)} = 0$ beachtet) für das erste Element der Spalte (12) die Darstellung

$$\sum_{\lambda=1}^{p} \delta_\lambda^{(p)} \frac{\binom{\varrho+\lambda-1}{\lambda-1}}{\binom{\varrho+\lambda}{\lambda}} = -p! \sum_{\varkappa=1}^{p-1} \frac{d_{p-1-\varkappa}^{(p)}}{(\varkappa+1)\binom{\varrho+\varkappa+1}{\varkappa+1}}.$$

Entsprechend folgt für die weiteren Elemente

$$\sum_{\lambda=1}^{p} \delta_\lambda^{(p)} \frac{\binom{\varrho+\lambda-2}{\lambda-1}}{\binom{\varrho+\lambda}{\lambda}} = -p! \sum_{\varkappa=1}^{p-1} \binom{\varkappa+1}{1} \frac{d_{p-1-\varkappa}^{(p)}}{(\varkappa+1)\binom{\varrho+\varkappa+1}{\varkappa+1}},$$

$$\sum_{\lambda=1}^{p} \delta_\lambda^{(p)} \frac{\binom{\varrho+\lambda-3}{\lambda-1}}{\binom{\varrho+\lambda}{\lambda}} = -p! \sum_{\varkappa=1}^{p-1} \binom{\varkappa+2}{2} \frac{d_{p-1-\varkappa}^{(p)}}{(\varkappa+1)\binom{\varrho+\varkappa+1}{\varkappa+1}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{\lambda=1}^{p} \delta_\lambda^{(p)} \frac{\binom{\varrho+\lambda-1-[\eta m]}{\lambda-1}}{\binom{\varrho+\lambda}{\lambda}} = -p! \sum_{\varkappa=1}^{p-1} \binom{\varkappa+[\eta m]}{[\eta m]} \frac{d_{p-1-\varkappa}^{(p)}}{(\varkappa+1)\binom{\varrho+\varkappa+1}{\varkappa+1}},$$

und damit erhält die Spalte (12), wieder horizontal angeordnet, die Form

$$(13) \quad -p! \sum_{\varkappa=1}^{p-1} \frac{d_{p-1-\varkappa}^{(p)}}{(\varkappa+1)\binom{\varrho+\varkappa+1}{\varkappa+1}}, \quad -p! \sum_{\varkappa=1}^{p-1} \binom{\varkappa+1}{1} \frac{d_{p-1-\varkappa}^{(p)}}{(\varkappa+1)\binom{\varrho+\varkappa+1}{\varkappa+1}}, \ldots,$$
$$-p! \sum_{\varkappa=1}^{p-1} \binom{\varkappa+[\eta m]}{[\eta m]} \frac{d_{p-1-\varkappa}^{(p)}}{(\varkappa+1)\binom{\varrho+\varkappa+1}{\varkappa+1}}.$$

Subtrahiert man nun, bei der letzten Zeile beginnend, von jeder Zeile die vorhergehende und wiederholt diesen Prozeß noch weitere $(p-1)$-mal, wobei man das erste Mal bis zur 1. Zeile, das zweite Mal bis zur 2. Zeile geht usw., so geht (13) über in

$$(14) \qquad -p! \sum_{\varkappa=1}^{p-1} \binom{\varkappa-1}{0} \frac{d_{p-1-\varkappa}^{(p)}}{(\varkappa+1)\binom{\varrho+\varkappa+1}{\varkappa+1}},$$

$$-p! \sum_{\varkappa=2}^{p-1} \binom{\varkappa-1}{1} \frac{d_{p-1-\varkappa}^{(p)}}{(\varkappa+1)\binom{\varrho+\varkappa+1}{\varkappa+1}}, \ldots, \quad -p! \binom{p-2}{p-2} \frac{d_0^{(p)}}{p\binom{\varrho+p}{p}}, \; 0, \ldots, 0.$$

Dies zeigt, daß sowohl die Koeffizienten- als auch die Gleichungsmatrix von (11) höchstens den Rang $p-1$ hat; die folgenden Betrachtungen zeigen, daß der Rang genau $p-1$ ist.

Wir wenden uns nun vollends zur Auflösung der Gleichungen (11), von denen wir nur noch die $p-1$ ersten, $(\mu = 0, 1, \ldots, p-2)$, in Betracht zu ziehen brauchen. Dabei fixieren wir eine Lösung so, daß wir zunächst willkürlich $p-1$ Indizes $\varrho_1 < \varrho_2 < \cdots < \varrho_{p-1}$ aus $\eta m < \varrho \leqq m$ wählen und

$$\alpha_\varrho^{(m,\eta)} = 0 \quad \text{für} \quad \eta m < \varrho \leqq m, \; \varrho \neq \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{p-1}$$

setzen, so daß die restlichen Größen $\alpha_{\varrho_1}^{(m,\eta)}, \alpha_{\varrho_2}^{(m,\eta)}, \ldots, \alpha_{\varrho_{p-1}}^{(m,\eta)}$ den Gleichungen

$$\text{(15)} \qquad y_{m\mu}^{(p)} = \alpha_{\varrho_1}^{(m,\eta)} y_{\varrho_1 \mu}^{(p)} + \alpha_{\varrho_2}^{(m,\eta)} y_{\varrho_2 \mu}^{(p)} + \cdots + \alpha_{\varrho_{p-1}}^{(m,\eta)} y_{\varrho_{p-1} \mu}^{(p)}$$
$$(\mu = 0, 1, \ldots, p-2)$$

genügen müssen. Die Determinante dieses Gleichungssystems lautet, wenn gleich die dem Übergang von (12) zu (14) entsprechende Umformung vorgenommen und dann noch, mit der letzten Zeile beginnend, ein geeignetes Vielfaches jeder Zeile von den vorhergehenden abgezogen wird, einfach

$$D_p = (-1)^{p-1} (p!)^{p-2} d_{p-2}^{(p)} d_{p-3}^{(p)} \ldots d_0^{(p)} \begin{vmatrix} \frac{1}{\binom{\varrho_1+2}{2}} & \frac{1}{\binom{\varrho_2+2}{2}} & \cdots & \frac{1}{\binom{\varrho_{p-1}+2}{2}} \\ \frac{1}{\binom{\varrho_1+3}{3}} & \frac{1}{\binom{\varrho_2+3}{3}} & \cdots & \frac{1}{\binom{\varrho_{p-1}+3}{3}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{\binom{\varrho_1+p}{p}} & \frac{1}{\binom{\varrho_2+p}{p}} & \cdots & \frac{1}{\binom{\varrho_{p-1}+p}{p}} \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante läßt sich, indem die Elemente jeder Spalte auf einen gemeinsamen Nenner gebracht werden, noch umschreiben in

$$D_p = (-1)^{p-1} (p!)^{p-2} \frac{d_{p-2}^{(p)} d_{p-3}^{(p)} \cdots d_0^{(p)}}{\binom{p}{1}\binom{p}{2} \cdots \binom{p}{p-2}} \cdot \frac{\Delta_p}{\binom{\varrho_1+p}{p}\binom{\varrho_2+p}{p} \cdots \binom{\varrho_{p-1}+p}{p}}$$

mit

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} \binom{\varrho_1+p}{p-2} & \binom{\varrho_2+p}{p-2} & \cdots & \binom{\varrho_{p-1}+p}{p-2} \\ \binom{\varrho_1+p}{p-3} & \binom{\varrho_2+p}{p-3} & \cdots & \binom{\varrho_{p-1}+p}{p-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \binom{\varrho_1+p}{0} & \binom{\varrho_2+p}{0} & \cdots & \binom{\varrho_{p-1}+p}{0} \end{vmatrix}$$

und Δ_p, indem man, mit der letzten Zeile beginnend, ein geeignetes Vielfaches jeder Zeile von den vorangehenden abzieht, schließlich in

$$\Delta_p = \frac{1}{1!\,2!\ldots(p-2)!} V_{p-1}(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{p-1}),$$

wo $V_{p-1}(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{p-1})$ die für die Größen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{p-1}$ gebildete Vandermondesche Determinante bedeutet. Für die zu berechnenden Größen $\alpha_{\varrho_\lambda}^{(m,\eta)}$ ergibt sich damit sofort

$$\alpha_{\varrho_\lambda}^{(m,\eta)} = \frac{\binom{\varrho_\lambda + p}{p}}{\binom{m+p}{p}} \cdot \frac{V_{p-1}(\varrho_1, \ldots, \varrho_{\lambda-1}, m, \varrho_{\lambda+1}, \ldots, \varrho_{p-1})}{V_{p-1}(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{p-1})} \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, p-1).$$

Die Größen $\alpha_{\varrho_\lambda}^{(m,\eta)}$ stimmen bis auf den Faktor $\frac{\varrho_\lambda + p}{m+p}$ mit den entsprechenden Größen der Cesàroschen Matrix (C_{p-1}) überein [vgl. § 1, (8)]. Ihre Abschätzung läßt sich daher in derselben Weise wie in § 1 durchführen. Sie zeigt, daß auch die Matrix $(H \to C)_p$ die Bedingung (IV) des Hauptsatzes erfüllt.

(Eingegangen am 9. April 1942.)