Werk

Titel: Mathematische Zeitschrift

Ort: Berlin

Jahr: 1942

Kollektion: Mathematica

Werk Id: PPN266833020_0048

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN266833020_0048|LOG_0017

Über die Existenz periodischer Lösungen bei gewissen Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung.

Herrn Konrad Knopp
zum 60. Geburtstag am 22. Juli 1942 gewidmet.

Von
Max Müller in Tübingen.

Die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ kann, muß aber nicht Integrale mit der Periode ω besitzen, wenn die Funktion $f(x, y)$ die Periodizitätsbedingung

$$f(x + \omega, y) = f(x, y)$$

erfüllt. Das zeigen schon die allereinfachsten Beispiele:

Bei der Gleichung $y' = \cos x$ haben sämtliche Integrale $y = C + \sin x$ die Periode 2π; bei der Gleichung $y' = y$ hat für beliebiges $\omega > 0$ nur das Integral $y \equiv 0$ die Periode ω, während alle übrigen Integrale $y = Ce^x$ $(C \neq 0)$ unperiodisch sind; die Differentialgleichung $y' = 1$ schließlich hat kein einziges periodisches Integral, obwohl ihre rechte Seite $f(x, y) \equiv 1$ die obige Periodizitätsbedingung für jedes $\omega > 0$ erfüllt.

Die Frage, wann eine Differentialgleichung $y' = f(x, y)$, deren rechte Seite die genannte Periodizitätsbedingung befriedigt, wenigstens ein Integral besitzt, das ebenfalls die Periode ω hat, scheint in der Literatur noch nicht behandelt zu sein. Mir ist lediglich eine Arbeit von N. W. Adamoff bekannt, in der gezeigt wird, daß ein gewisses Iterationsverfahren unter gewissen Voraussetzungen, deren Erfülltsein überdies im Einzelfall nur mühsam festgestellt werden kann, ein Integral mit der Periode ω liefert, falls es überhaupt solche Integrale gibt[1]).

In der vorliegenden Arbeit soll — sogleich für ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen — eine recht allgemeine Bedingung angegeben werden, die die Existenz mindestens eines periodischen Integrales sicherstellt. Dieses Integral wird mittels eines Verfahrens schrittweiser Näherungen gewonnen, das eine Verallgemeinerung des von Herrn Adamoff angegebenen Iterationsverfahrens ist.

---

[1]) N. W. Adamoff. Sur la recherche des solutions périodiques d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre par la méthode des approximations successives. Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS. **19** (1938), S. 17—22.

§ 1.

Der allgemeine Satz.

Wir werden folgenden Satz beweisen:

Die Funktionen $y_{10}(x), \ldots, y_{m0}(x)$ *sollen für* $-\infty < x < \infty$ *stetige Ableitungen erster Ordnung besitzen und die Periode* ω *haben. In dem Bereich*

$$\mathfrak{S}:\ -\infty < x < \infty,\ y_{\lambda 0}(x) - a \leqq y_\lambda \leqq y_{\lambda 0}(x) + a\ (\lambda = 1, \ldots, m;\ a > 0)$$

seien die Funktionen $f_1(x, y_1, \ldots, y_m), \ldots, f_m(x, y_1, \ldots, y_m)$ *stetig und den folgenden Bedingungen unterworfen:*

a) *Es sei*

(1) $$f_\mu(x+\omega, y_1, \ldots, y_m) = f_\mu(x, y_1, \ldots, y_m) \quad (\mu = 1, \ldots, m).$$

b) *Es sei für je zwei Stellen* $(x, y_1, \ldots, y_m)$ *und* $(x, z_1, \ldots, z_m)$ *aus* $\mathfrak{S}$ *und* $\mu = 1, \ldots, m$

(2) $$\begin{aligned} &|f_\mu(x, y_1, \ldots, y_m) - f_\mu(x, z_1, \ldots, z_m) + p_\mu(x)(y_\mu - z_\mu)| \\ &\qquad \leqq l_\mu(x) \underset{\lambda=1,\ldots,m}{\operatorname{Max}} |y_\lambda - z_\lambda|, \end{aligned}$$

wobei $p_\mu(x)$ *für alle* x *stetig,* $l_\mu(x)$ *für alle* x *nicht negativ und über das Intervall* $0 \leqq x \leqq \omega$ *(wenigstens uneigentlich) integrierbar,*

(3) $$p_\mu(x+\omega) = p_\mu(x), \quad l_\mu(x+\omega) = l_\mu(x),$$

(4) $$\int_0^\omega p_\mu(t)\,dt \neq 0$$

ist.

Es werde

(5) $$P_\mu(x) = \int_0^x p_\mu(t)\,dt,$$

(6) $$\alpha_\mu(x) = e^{-P_\mu(x)} \left\{ \int_0^x e^{P_\mu(t)} l_\mu(t)\,dt + \frac{1}{|e^{P_\mu(\omega)} - 1|} \int_0^\omega e^{P_\mu(t)} l_\mu(t)\,dt \right\},$$

(7) $$\begin{aligned} \varepsilon = \underset{\mu=1,\ldots,m}{\operatorname{Max}}\ \underset{0 \leqq x \leqq \omega}{\operatorname{Max}} \Bigg| e^{-P_\mu(x)} \Bigg\{ &\int_0^x e^{P_\mu(t)} \left[f_\mu(t, y_{10}(t), \ldots, y_{m0}(t)) - y'_{\mu 0}(t)\right] dt + \\ &+ \frac{1}{e^{P_\mu(\omega)} - 1} \int_0^\omega e^{P_\mu(t)} \left[f_\mu(t, y_{10}(t), \ldots, y_{m0}(t)) - y'_{\mu 0}(t)\right] dt \Bigg\} \Bigg| \end{aligned}$$ [2]

gesetzt.

Gibt es dann eine Konstante q *derart, daß*

(8) $$0 \leqq \alpha_\mu(x) \leqq q < 1 \quad \text{für } 0 \leqq x \leqq \omega,\ \mu = 1, 2, \ldots, m,$$

(9) $$\frac{\varepsilon}{1-q} \leqq a,$$

[2]) ε ist ein Maß dafür, wie gut bereits die Funktionen $y_{10}(x), \ldots, y_{m0}(x)$ das Differentialgleichungssystem (10) befriedigen.

so hat das System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$y'_\mu = f_\mu(x, y_1, \ldots, y_m) \qquad (\mu = 1, \ldots, m) \tag{10}$$

mindestens ein Integral

$$y_1 = y_1(x), \ldots, y_m = y_m(x)$$

mit der Periodizitätseigenschaft

$$y_\mu(x + \omega) = y_\mu(x) \qquad (\mu = 1, \ldots, m). \tag{11}$$

Dasselbe verläuft in $\mathfrak{S}$ *und wird aus den Funktionen* $y_{10}(x), \ldots, y_{m0}(x)$ *durch den Iterationsprozeß*

$$\begin{aligned} y_{\mu, n+1}(x) = y_{\mu n}(x) + e^{-P_\mu(x)} \Bigg\{ & \int_0^x e^{P_\mu(t)} \left[f_\mu(t, y_{1n}(t), \ldots, y_{mn}(t)) - y'_{\mu n}(t) \right] dt + \\ & + \frac{1}{e^{P_\mu(\omega)} - 1} \int_0^\omega e^{P_\mu(t)} \left[f_\mu(t, y_{1n}(t), \ldots, y_{mn}(t)) - y'_{\mu n}(t) \right] dt \Bigg\} \\ & (\mu = 1, \ldots, m;\ n = 0, 1, 2, \ldots) \end{aligned} \tag{12}$$

gewonnen[3]).

Beweis. Wir überzeugen uns zunächst, daß die Funktionensysteme

$$\mathfrak{y}_n(x) = \left(y_{1n}(x), \ldots, y_{mn}(x)\right) \tag{13}$$

für alle Nummern n berechnet werden können und die folgenden Eigenschaften haben: Jedes $y_{\mu n}(x)$ ist für alle x stetig differentiierbar, hat die Periode ω und genügt der Ungleichung

$$y_{\mu 0}(x) - a \leqq y_{\mu n}(x) \leqq y_{\mu 0}(x) + a. \tag{14}$$

Für $n = 0$ trifft dies auf Grund der Voraussetzungen über die Funktionen $y_{\mu 0}(x)$ zu. Haben aber alle Funktionen $y_{\mu \nu}(x)$, deren zweite Fußmarke $\nu \leqq n$ ist, diese Eigenschaften, so sind nach (14) und (5) die Integranden in (12) definiert und stetig; da nach (4) der Nenner $e^{P_\mu(\omega)} - 1 \neq 0$ ist, können also die Funktionen $y_{\mu, n+1}(x)$ nach der Vorschrift (12) berechnet werden; sie sind für alle x stetig und auch stetig differentiierbar, weil nach Voraussetzung $P_\mu(x)$ die stetige Ableitung $p_\mu(x)$ hat.

Sie haben auch die Periode ω; denn wird zur Abkürzung

$$h_{\mu n} = \int_0^\omega e^{P_\mu(t)} \left[f_\mu(t, \mathfrak{y}_n(t)) - y'_{\mu n}(t) \right] dt$$

gesetzt und die aus (5) und (3) folgende Beziehung

$$P_\mu(x + \omega) = \int_0^\omega p_\mu(t)\, dt + \int_\omega^{\omega + x} p_\mu(t)\, dt = P_\mu(\omega) + \int_0^x p_\mu(t)\, dt = P_\mu(\omega) + P_\mu(x)$$

---

[3]) Das ADAMOFFsche Iterationsverfahren ist für $n = 1$ der Sonderfall $p(x) = k$, wo k eine positive Konstante ist, also $P(x) = kx$.

beachtet, so folgt aus den Induktionsannahmen und aus (1), daß

$$y_{\mu, n+1}(x+\omega)$$

$$= y_{\mu n}(x) + e^{-P_\mu(x) - P_\mu(\omega)} \left\{ \int_0^{x+\omega} e^{P_\mu(t)} \left[f_\mu(t, \mathfrak{y}_n(t)) - y'_{\mu n}(t) \right] dt + \frac{h_{\mu n}}{e^{P_\mu(\omega)} - 1} \right\}$$

$$= y_{\mu n}(x) + e^{-P_\mu(x) - P_\mu(\omega)} \left\{ h_{\mu n} + \int_\omega^{\omega+x} e^{P_\mu(t)} \left[f_\mu(t, \mathfrak{y}_n(t)) - y'_{\mu n}(t) \right] dt + \frac{h_{\mu n}}{e^{P_\mu(\omega)} - 1} \right\}$$

$$= y_{\mu n}(x) + e^{-P_\mu(x) - P_\mu(\omega)} \left\{ \int_0^x e^{P_\mu(\tau+\omega)} \left[f_\mu(\tau + \omega, \mathfrak{y}_n(\tau+\omega)) - y'_{\mu n}(\tau+\omega) \right] d\tau + \right.$$

$$\left. + \frac{h_{\mu n} e^{P_\mu(\omega)}}{e^{P_\mu(\omega)} - 1} \right\}$$

$$= y_{\mu n}(x) + e^{-P_\mu(x)} \left\{ \int_0^x e^{P_\mu(\tau)} \left[f_\mu(\tau, \mathfrak{y}_n(\tau)) - y'_{\mu n}(\tau) \right] d\tau + \frac{h_{\mu n}}{e^{P_\mu(\omega)} - 1} \right\}$$

$$= y_{\mu, n+1}(x).$$

Ferner ist nach (12) und (5) für $\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, $\mu = 1, \ldots, m$

$$y'_{\mu, \nu+1}(x) = y'_{\mu\nu}(x) + f_\mu(x, \mathfrak{y}_\nu(x)) - y'_{\mu\nu}(x) -$$

$$- P'_\mu(x) e^{-P_\mu(x)} \left\{ \int_0^x e^{P_\mu(t)} \left[f_\mu(t, \mathfrak{y}_\nu(t)) - y'_{\mu\nu}(t) \right] dt + \frac{h_{\mu\nu}}{e^{P_\mu(\omega)} - 1} \right\}$$

$$= f_\mu(x, \mathfrak{y}_\nu(x)) - p_\mu(x) \left[y_{\mu, \nu+1}(x) - y_{\mu\nu}(x) \right].$$

Ersetzt man hierin ν durch $\nu - 1$, so ergibt sich, daß für $\nu = 1, 2, \ldots, n$, $\mu = 1, 2, \ldots, m$

$$y'_{\mu\nu}(x) = f_\mu(x, \mathfrak{y}_{\nu-1}(x)) - p_\mu(x) \left[y_{\mu\nu}(x) - y_{\mu, \nu-1}(x) \right]. \tag{15}$$

Trägt man dies in (12) ein, so bekommt man

$$y_{\mu, \nu+1}(x) - y_{\mu\nu}(x)$$

$$= e^{-P_\mu(x)} \left\{ \int_0^x e^{P_\mu(t)} \left[f_\mu(t, \mathfrak{y}_\nu(t)) - f_\mu(t, \mathfrak{y}_{\nu-1}(t)) + p_\mu(t) \left[y_{\mu\nu}(t) - y_{\mu, \nu-1}(t) \right] \right] dt + \right.$$

$$+ \frac{1}{e^{P_\mu(\omega)} - 1} \int_0^\omega e^{P_\mu(t)} \left[f_\mu(t, \mathfrak{y}_\nu(t)) - f_\mu(t, \mathfrak{y}_{\nu-1}(t)) + \right.$$

$$\left. \left. + p_\mu(t) \left[y_{\mu\nu}(t) - y_{\mu, \nu-1}(t) \right] \right] dt \right\}.$$

Mit Rücksicht auf (2) ist also für $0 \leqq x \leqq \omega$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$

$$|y_{\mu, \nu+1}(x) - y_{\mu\nu}(x)| \tag{16}$$

$$\leqq e^{-P_\mu(x)} \left\{ \int_0^x e^{P_\mu(t)} l_\mu(t) \operatorname*{Max}_{\lambda = 1, \ldots, m} |y_{\lambda\nu}(t) - y_{\lambda, \nu-1}(t)| \, dt + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{|e^{P_\mu(\omega)} - 1|} \int_0^\omega e^{P_\mu(t)} l_\mu(t) \operatorname*{Max}_{\lambda = 1, \ldots, m} |y_{\lambda\nu}(t) - y_{\lambda, \nu-1}(t)| \, dt \right\}.$$

Nun aber ist nach (12), angewandt für $n = 0$, und nach (7) für $0 \leqq x \leqq \omega$, $\lambda = 1, 2, \ldots, m$

$$(17) \qquad |y_{\lambda 1}(x) - y_{\lambda 0}(x)| \leqq \varepsilon,$$

also nach (16), (6) und (8) für $0 \leqq x \leqq \omega$, $\mu = 1, 2, \ldots, m$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$

$$(18) \qquad |y_{\mu, \nu+1}(x) - y_{\mu\nu}(x)| \leqq \varepsilon q^{\nu},$$

mithin, wenn man (9) beachtet,

$$|y_{\mu, n+1}(x) - y_{\mu 0}(x)|$$
$$\leqq |y_{\mu 1}(x) - y_{\mu 0}(x)| + |y_{\mu 2}(x) - y_{\mu 1}(x)| + \cdots + |y_{\mu, n+1}(x) - y_{\mu n}(x)|$$
$$\leqq \varepsilon (1 + q + \cdots + q^n) \leqq \frac{\varepsilon}{1-q} \leqq a,$$

d. h. auch

$$y_{\mu 0}(x) - a \leqq y_{\mu, n+1}(x) \leqq y_{\mu 0}(x) + a$$

für $0 \leqq x \leqq \omega$. Weil alle auftretenden Funktionen die Periode ω haben, gilt diese Ungleichung nachträglich für alle x.

Die Funktionen $y_{\mu, n+1}(x)$ haben also ebenfalls die Eigenschaften, die wir beim Induktionsschluß benutzten. Daher können alle Funktionensysteme (13) berechnet werden; alle Funktionen $y_{\mu n}(x)$ sind für $-\infty < x < \infty$ stetig differentiierbar, haben die Periode ω und erfüllen die Ungleichungen (14). Überdies gilt nach (17) und (18) für alle x die Ungleichung

$$(19) \qquad |y_{\mu n}(x) - y_{\mu, n-1}(x)| \leqq \varepsilon q^{n-1} \qquad (\mu = 1, \ldots, m;\ n = 1, 2, \ldots).$$

Aus (19) folgt jetzt weiter, weil $q < 1$ ist, daß jede der m Reihen

$$y_{\mu 0}(x) + [y_{\mu 1}(x) - y_{\mu 0}(x)] + [y_{\mu 2}(x) - y_{\mu 1}(x)] + \cdots$$

für alle x gleichmäßig konvergiert. Es existieren daher die Grenzfunktionen

$$(20) \qquad \lim_{n \to \infty} y_{\mu n}(x) = y_{\mu}(x) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m);$$

sie sind stetig, haben die Periode ω und erfüllen nach (14) die Ungleichungen

$$(21) \qquad y_{\mu 0}(x) - a \leqq y_{\mu}(x) \leqq y_{\mu 0}(x) + a \qquad (\mu = 1, \ldots, m).$$

Nach (15) ist

$$(22) \qquad y_{\mu n}(x) = y_{\mu n}(0) + \int_0^x f_{\mu}(t, y_{1, n-1}(t), \ldots, y_{m, n-1}(t))\, dt -$$
$$- \int_0^x p_{\mu}(t)\, [y_{\mu n}(t) - y_{\mu, n-1}(t)]\, dt.$$

Da $p_{\mu}(t)$ stetig und periodisch, also beschränkt ist, und (19) gilt, ferner nach (14) für jede Nummer n die Stelle $(t, y_{1, n-1}(t), \ldots, y_{m, n-1}(t))$ und nach (21) auch die Stelle $(t, y_1(t), \ldots, y_m(t))$ dem Gebiet $\mathfrak{S}$ angehört, in welchem infolge der Periodizitätsvoraussetzung (1) die Funktionen f_μ sogar gleichmäßig stetig sind, ergibt sich aus (22) beim Grenzübergang $n \to \infty$, daß

$$y_\mu(x) = y_\mu(0) + \int_0^x f_\mu(t, y_1(t), \ldots, y_m(t))\, dt \qquad (\mu = 1, \ldots, m).$$

Weil hier die Integranden stetig sind, sind die Funktionen $y_u(x)$ für alle x auch differentiierbar; es ist

$$y'_\mu(x) = f_u(x, y_1(x), \ldots, y_m(x)) \qquad (\mu = 1, \ldots, m);$$

die Funktionen $y_\mu(x)$ bilden also ein Integral des Differentialgleichungssystems (10) mit der Periodizitätseigenschaft (11).

Damit ist der Satz bewiesen.

§ 2.

Bemerkungen zu den Voraussetzungen und Sonderfälle.

Hat f_μ in $\mathfrak{S}$ stetige partielle Ableitungen erster Ordnung, so ist für eine geeignet gewählte Zwischenstelle $(x, \eta_1, \ldots, \eta_m)$

$$f_\mu(x, y_1, \ldots, y_m) - f_\mu(x, z_1, \ldots, z_m) = \sum_{\lambda=0}^{m} \frac{\partial f_\mu}{\partial y_\lambda}(x, \eta_1, \ldots, \eta_m)\,(y_\lambda - z_\lambda),$$

also für jede stetige Funktion $p_u(x)$, die die Bedingungen (3) und (4) erfüllt,

$$f_\mu(x, y_1, \ldots, y_m) - f_u(x, z_1, \ldots, z_m) + p_\mu(x)\,(y_\mu - z_u)$$
$$= \sum_{\lambda \neq \mu} \frac{\partial f_u}{\partial y_\lambda}(x, \eta_1, \ldots, \eta_m)\,(y_\lambda - z_\lambda) + \left[\frac{\partial f_u}{\partial y_u}(x, \eta_1, \ldots, \eta_m) + p_\mu(x)\right](y_\mu - z_u).$$

Da die Funktion f_μ die Periodizitätseigenschaft (1) hat, kann man auch jedes $\eta_\lambda = \eta_\lambda(x, y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_m)$ so wählen, daß es in bezug auf x die Periode ω hat. Daher gibt es eine Funktion $S_u(x)$, die stetig ist und die Periode ω hat, so daß

$$\left|\frac{\partial f_\mu}{\partial y_\lambda}(x, \eta_1, \ldots, \eta_m)\right| \leqq S_\mu(x) \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, m;\ \lambda \neq \mu).$$
$$\left|\frac{\partial f_u}{\partial y_\mu}(x, \eta_1, \ldots, \eta_m) + p_u(x)\right| \leqq S_\mu(x)$$

und daher

$$|f_\mu(x, y_1, \ldots, y_m) - f_\mu(x, z_1, \ldots, z_m) + p_\mu(x)\,(y_u - z_\mu)|$$
$$\leqq S_\mu(x) \sum_{\lambda=1}^{m} |y_\lambda - z_\lambda| \leqq m S_\mu(x) \operatorname*{Max}_{\lambda=1,\ldots,m} |y_\lambda - z_\lambda|.$$

Die Voraussetzung (2) ist also gewiß mit $l_\mu(x) = m S_\mu(x)$ erfüllt. Damit möglichst auch die Voraussetzung (8) erfüllt ist, wird man die Funktion $p_\mu(x)$

hierbei so zu wählen suchen, daß das nach (6) berechnete $\alpha_\mu(x)$ möglichst klein bleibt.

Ist $p_\mu(x) \geqq 0$ und gibt es eine nicht-negative Konstante L_μ derart, daß

$$|f_\mu(x, y_1, \ldots, y_m) - f_\mu(x, z_1, \ldots, z_m) + p_\mu(x)(y_\mu - z_\mu)| \leqq L_\mu p_\mu(x) \operatorname*{Max}_{\lambda=1,\ldots,m} |y_\lambda - z_\lambda|,$$

so kann $l_\mu(x) = L_\mu p_\mu(x)$ gesetzt werden; es wird $\alpha_\mu(x) = L_\mu$; die Bedingung (8) bedeutet dann, daß $L_\mu < 1$ sein soll.

Ist aber $p_\mu(x) \leqq 0$ und gibt es eine nicht-negative Konstante L_μ derart, daß

$$|f_\mu(x, y_1, \ldots, y_m) - f_\mu(x, z_1, \ldots, z_m) + p_\mu(x)(y_\mu - z_\mu)| \leqq - L_\mu p_\mu(x) \operatorname*{Max}_{\lambda=1,\ldots,m} |y_\lambda - z_\lambda|,$$

so kann $l_\mu(x) = - L_\mu p_\mu(x)$ gesetzt werden; es wird

$$\alpha_\mu(x) = L_\mu(2\, e^{-P_\mu(x)} - 1),$$

und die Bedingung (8) ist erfüllt, wenn zwischen $p_\mu(x)$ und L_μ die Beziehung

$$L_\mu(2\, e^{-P_\mu(\omega)} - 1) < 1$$

besteht.

Für $n = 1$ kann die Bedingung (2) unter Weglassung entbehrlicher Fußmarken geschrieben werden:

$$|f(x, y) - f(x, z) + p(x)(y - z)| \leqq l(x)\,|y - z|;$$

sie besagt also, daß für $y \neq z$

$$- p(x) - l(x) \leqq \frac{f(x, y) - f(x, z)}{y - z} \leqq - p(x) + l(x) \tag{23}$$

sein soll. Da $l(x)$ nicht beschränkt zu sein braucht, verlangt sie in gewisser Hinsicht weniger als die übliche Lipschitz-Bedingung, die Beschränktheit des Differenzenquotienten bedeutet. In anderer Hinsicht verlangt die Bedingung (2) mehr als die gewöhnliche Lipschitz-Bedingung: Nach (23) muß

$$\frac{f(x, y) - f(x, z)}{y - z} = - p(x) + \theta(x, y, z)\, l(x)$$

sein, wo $|\theta(x, y, z)| \leqq 1$. Dabei sind $p(x)$ und $l(x)$ an die Bedingungen (4) und

$$e^{-P(x)} \left\{ \int_0^x e^{P(t)} l(t)\, dt + \frac{1}{|e^{P(\omega)} - 1|} \int_0^\omega e^{P(t)} l(t)\, dt \right\} \leqq q < 1 \tag{24}$$

gebunden. Man kann also im Fall $n = 1$ die Bedingungen (2), (4) und (8) so deuten: Der Differenzenquotient von $f(x, y)$ in bezug auf y soll „im Durchschnitt" [siehe (24)] nicht zu sehr abweichen von einer Funktion $-p(x)$, deren Mittelwert im Periodenintervall von Null verschieden ist [siehe (4)].

Für $p(x) \geqq 0$, $l(x) = L p(x)$ geht (23) über in

$$-(1+L)\,p(x) \leqq \frac{f(x,y)-f(x,z)}{y-z} \leqq -(1-L)\,p(x). \tag{25}$$

Daraus folgt insbesondere: Ist $f(x, y)$ in der ganzen (x, y)-Ebene stetig, $f(x+\omega, y) = f(x, y)$, gibt es eine Konstante L mit $0 \leqq L < 1$ und eine stetige Funktion $p(x)$ mit der Periode ω, die (4) erfüllt, derart, daß (25) gilt, so hat die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ mindestens ein Integral mit der Periode ω. Die Bedingung (25) besagt aber im wesentlichen, daß $f(x, y)$ einen beschränkten Differenzenquotienten in bezug auf y haben, eine nicht steigende Funktion von y und „im Mittel für alle x eines Periodenintervalles" sogar eine abnehmende Funktion von y sein soll.

Daß die Bedingung (4) nicht entbehrt werden kann, lehrt das dritte der eingangs erwähnten Beispiele; denn bei dieser Differentialgleichung $y' = 1$ sind mit $p(x) = l(x) = 0$ die Bedingungen (23) und (24), aber nicht die Bedingung (4) erfüllt. Dieses Beispiel zeigt aber auch, daß zur Bedingung (4) noch eine Bedingung über $l(x)$, wie etwa die Bedingung (24), hinzutreten muß, damit der Satz richtig bleibt; mit $p(x) = l(x) = |\sin x|$ sind nämlich die Bedingungen (23) und (4) erfüllt, ohne daß periodische Integrale vorhanden sind.

(Eingegangen am 21. Januar 1942.)