Über eine für die Invariantentheorie wichtige Funktionalgleichung.

Herrn Konrad Knopp
zum 60. Geburtstag am 22. Juli 1942 gewidmet.

Von

Oskar Perron in München.

Bezeichnungen.

In dieser Arbeit sind n und ν zwei fest gegebene natürliche Zahlen. Mit großen lateinischen Buchstaben werden n-reihige quadratische Matrizes bezeichnet, mit den entsprechenden kleinen Buchstaben und zwei unteren Indizes ihre Elemente. Mit großen griechischen Buchstaben, die eventuell noch mit oberen Indizes versehen sind, werden ν-reihige quadratische Matrizes bezeichnet, mit den entsprechenden kleinen Buchstaben und zwei unteren Indizes ihre Elemente. Gelegentlich vorkommende Matrizes mit anderen Zeilen- und Spaltenzahlen, auch nichtquadratische, werden mit großen, und ihre Elemente mit den entsprechenden kleinen deutschen Buchstaben bezeichnet. Also z. B.:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}^{pq} = \begin{pmatrix} \alpha^{pq}_{11} & \dots & \alpha^{pq}_{1\nu} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha^{pq}_{\nu 1} & \dots & \alpha^{pq}_{\nu\nu} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \mathfrak{a}_{11} & \dots & \mathfrak{a}_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathfrak{a}_{s1} & \dots & \mathfrak{a}_{sr} \end{pmatrix}.$$

Die Elemente aller Matrizes sind komplexe Zahlen.

Die n- bzw. ν-reihige quadratische Einheitsmatrix wird mit E bzw. E, jede Nullmatrix, auch nichtquadratische, einfach durch das Zahlzeichen 0 bezeichnet, was zu keiner Verwechslung Anlaß geben wird. Entsprechend den Zeichen E und E sind unter e_{rs} und $\varepsilon_{\varrho\sigma}$ Kroneckersymbole zu verstehen:

$$e_{rs} = \begin{cases} 1 \text{ für } r = s \\ 0 \text{ für } r \neq s \end{cases} \qquad (r, s = 1, \dots, n),$$

$$\varepsilon_{\varrho\sigma} = \begin{cases} 1 \text{ für } \varrho = \sigma \\ 0 \text{ für } \varrho \neq \sigma \end{cases} \qquad (\varrho, \sigma = 1, \dots, \nu).$$

Die Determinante einer quadratischen Matrix wird durch zwei Striche bezeichnet: $|X|$, $|\mathsf{A}^{pq}|$.

Das Zeichen $\Phi(X)$ bedeutet, daß die Matrix Φ eine Funktion der Matrix X ist, d. h., daß die ν^2 Elemente $\varphi_{11}, \varphi_{12}, \dots, \varphi_{\nu\nu}$ Funktionen der n^2 komplexen

Variabeln $x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{nn}$ sind. Kleine Buchstaben ohne oder mit nur *einem* unteren Index werden gelegentlich als Zahl- oder Funktionszeichen gebraucht; z. B. bedeutet $\varphi(X)$ eine Funktion der Matrix X, d. h. der n^2 Variabeln $x_{11}, \ldots, x_{nn}$.

§ 1.

Einleitung.

Wenn man eine n-äre Form durch eine Matrix X linear transformiert, entsteht eine neue Form. Bezeichnet man als Invariante der alten Form ein Polynom ihrer Koeffizienten, das nach Ersetzung der alten Koeffizienten durch die neuen sich mit einem lediglich von der Transformationsmatrix X abhängigen Faktor $\varphi(X)$ multipliziert, so muß dieser Faktor bekanntlich eine Potenz der Determinante $|X|$ sein. Man sieht das sofort ein, wenn man zwei lineare Transformationen hintereinander ausführt. Dann ergibt sich nämlich für $\varphi(X)$ die Funktionalgleichung

$$\varphi(Y)\,\varphi(X) = \varphi(XY). \tag{1}$$

Hieraus folgt zunächst für $Y = E$, da $\varphi(X)$ nicht identisch verschwindet,

$$\varphi(E) = 1 \tag{2}$$

und sodann für $Y = X^{-1}$

$$\varphi(X^{-1})\,\varphi(X) = \varphi(E) = 1 \tag{3}$$

Nun ist $\varphi(X)$ ein Polynom von $x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{nn}$, daher $|X|^r\varphi(X^{-1})$, wenn r genügend groß ist, ebenfalls ein Polynom dieser Variabeln. Somit folgt aus (3) nach Multiplikation mit $|X|^r$, daß $\varphi(X)$ ein Teiler von $|X|^r$, also wegen der Irreduzibilität von $|X|$ selbst eine Potenz von $|X|$ ist, multipliziert mit einer Konstanten, die wegen (2) gleich 1 sein muß. W. z. b. w. Aber auch, wenn man für $\varphi(X)$ nicht nur Polynome, sondern beliebige in der Umgebung von $X = E$ analytische Funktionen zuläßt, hat die Funktionalgleichung (1), wie wir sehen werden, keine anderen Lösungen als $\varphi(X) = |X|^\alpha$, wobei dann aber α eine beliebige komplexe Zahl sein darf (Satz 12).

Bezeichnet man allgemeiner als „Invarianzverein" der alten Form ein System von ν Polynomen ihrer Koeffizienten, das nach Ersetzung der alten Koeffizienten durch die neuen sich linear transformiert, wobei die ν-reihige Transformationsmatrix lediglich von der Matrix X abhängt, also eine Funktion $\Phi(X)$ ist[1]), so ergibt sich analog zu (1) die Funktionalgleichung

$$\Phi(Y)\,\Phi(X) = \Phi(XY). \tag{4}$$

[1]) Auf die noch nicht entwickelte Theorie der Invarianzvereine soll hier nicht weiter eingegangen werden. Als Beispiel sei nur erwähnt, daß die Koeffizienten einer Kovariante stets einen Invarianzverein bilden.

Nicht wesentlich davon verschieden ist die Funktionalgleichung

$$\Phi(X)\,\Phi(Y) = \Phi(X\,Y). \tag{5}$$

Denn bezeichnet man die zu Φ bzw. X transponierte Matrix mit Φ' bzw. X' und setzt man $\Phi(X) = \Psi(X')$, so ist (4) gleichbedeutend mit

$$\Phi'(X)\,\Phi'(Y) = \Phi'(X\,Y)$$

und auch mit

$$\Psi(Y')\,\Psi(X') = \Psi(Y'X') \text{ oder also mit } \Psi(X')\,\Psi(Y') = \Psi(X'\,Y').$$

Daher geht jede Lösung von (4) in eine Lösung von (5) über und umgekehrt, wenn man Φ durch Φ', also $\varphi_{\varrho\sigma}$ durch $\varphi_{\sigma\varrho}$ ersetzt; ebenso, wenn man X durch X', also x_{rs} durch x_{sr} ersetzt.

Die Funktionalgleichung (5) ist es, die wir im folgenden behandeln wollen. Da Φ eine ν-reihige Matrix ist, so handelt es sich in Wahrheit um ein System von ν^2 Funktionalgleichungen für die ν^2 Funktionen $\varphi_{11}, \varphi_{12}, \ldots, \varphi_{\nu\nu}$. Für die Theorie der Invarianzvereine interessieren natürlich nur Lösungen, die Polynome von $x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{nn}$ sind, insbesondere homogene. Wir werden aber überhaupt Lösungen $\Phi(X)$ suchen, die in der Umgebung von $X = E$ analytisch sind, d. h., die sich nach Potenzen der n^2 Variabeln $x_{pq} - e_{pq}$ entwickeln lassen.

§ 2.

Triviale Lösungen. Reduzible und irreduzible Lösungen.

Satz 1. *Die Gleichung* (5) *hat unter anderen die konstanten Lösungen* $\Phi(X) = \mathsf{E}$ *und* $\Phi(X) = 0$.

Satz 2. *Ist* $\Phi(X)$ *eine Lösung der Gleichung* (5) *und* Γ *eine konstante Matrix mit* $|\Gamma| \neq 0$, *so ist* $\Gamma^{-1}\Phi(X)\Gamma$ *ebenfalls eine Lösung.*

Insbesondere ergibt sich, wenn man in einer Lösung $\Phi(X)$ die Zeilen und Spalten in gleicher Weise permutiert, wieder eine Lösung, weil ja jede solche Permutation durch hintere und vordere Multiplikation mit einer Matrix Γ und ihrer reziproken bewirkt werden kann.

Satz 3. *Ist* $\Phi(X)$ *eine Lösung der Gleichung* (5) *und* C *eine konstante Matrix mit* $|C| \neq 0$, *so ist* $\Phi(C^{-1}XC)$ *ebenfalls eine Lösung.*

Insbesondere ergibt sich, wenn man in einer Lösung $\Phi(X)$ die vorderen und hinteren Indizes der x_{pq} in gleicher Weise permutiert, wieder eine Lösung.

Satz 4. *Ist* $\Phi(X)$ *eine Lösung von* (5), *so ist* $|X|^\alpha\Phi(X) = e^{\alpha\log|X|}\,\Phi(X)$, *wo* α *irgendeine komplexe Zahl ist, ebenfalls eine Lösung. Nach Satz* 1 *ist also insbesondere* $\Phi(X) = |X|^\alpha\,\mathsf{E}$ *eine Lösung.*

Satz 5. *Die Gleichung* (5) *hat u. a. die Lösung*

$$\Phi(X) = |X|^{\mathsf{A}} = e^{\mathsf{A}\log|X|} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathsf{A}\log|X|)^k}{k!},$$

wobei A *irgendeine konstante Matrix ist. Speziell für* $\mathsf{A} = \alpha\,\mathsf{E}$ *ist das die schon in Satz 4 angegebene Lösung.*

Die Beweise dieser Sätze sind evident.

Zwei Lösungen $\Phi^1(X)$ und $\Phi^2(X)$, die in der Beziehung $\Phi^2(X) = \Gamma^{-1}\,\Phi^1(X)\,\Gamma$ stehen (Satz 2), heißen *äquivalent*. Dieser Äquivalenzbegriff ist reflexiv, symmetrisch und transitiv. Auch an Satz 3 läßt sich ein entsprechender Äquivalenzbegriff anschließen, den wir aber nicht gebrauchen werden.

Wir zerlegen jetzt ν irgendwie in zwei Summanden: $\nu = \varrho + \sigma$. Ist $\mathfrak{A}(X)$ eine ϱ-reihige, $\mathfrak{B}(X)$ eine σ-reihige quadratische Matrix und ist

$$\mathfrak{A}(X)\,\mathfrak{A}(Y) = \mathfrak{A}(XY), \qquad \mathfrak{B}(X)\,\mathfrak{B}(Y) = \mathfrak{B}(XY),$$

so stellt die ν-reihige Matrix

$$\Phi(X) = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}(X) & 0 \\ 0 & \mathfrak{B}(X) \end{pmatrix} \tag{6}$$

offenbar eine Lösung von (5) dar. Eine solche Lösung und jede damit äquivalente heißt *reduzibel*, jede andere heißt *irreduzibel*. Hiernach sind, wenn man für jede kleinere Reihenzahl als ν bereits alle Lösungen unserer Funktionalgleichung kennt, auch für ν Reihen bereits alle reduzibeln Lösungen bekannt, so daß nur noch die irreduzibeln interessieren.

Um die Gewinnung irreduzibler Lösungen vorzubereiten, setzen wir in (5) zuerst $Y = E$, sodann $X = E$; dadurch kommt

$$\Phi(X)\,\Phi(E) = \Phi(X), \qquad \Phi(E)\,\Phi(Y) = \Phi(Y), \tag{7}$$

also insbesondere auch

$$\Phi(E)\,\Phi(E) = \Phi(E). \tag{8}$$

Aus (7) folgt, wenn $\Phi(X)$ nicht identisch verschwindet, im Fall $\nu = 1$ die Gleichung (2) (mit Φ an Stelle von φ). Im Fall $\nu > 1$ braucht aber die analoge Gleichung $\Phi(E) = \mathsf{E}$ nicht zu gelten. Wenn man nämlich eine Lösung unserer Funktionalgleichung mit $\nu - 1$ an Stelle von ν betrachtet und wenn man diese $(\nu - 1)$-reihige Matrix durch Einschaltung einer in der Diagonale sich kreuzenden Zeile und Spalte mit lauter Nullen zu einer ν-reihigen Matrix $\Phi(X)$ ergänzt, so ist $\Phi(X)$ offenbar eine (reduzible) Lösung von (5), weil sie nach eventueller Permutation der Zeilen und Spalten die Form (6) mit $\mathfrak{B}(X) = 0$ annimmt. Dabei hat aber die Matrix $\Phi(E)$ in dem neu eingeschobenen Diagonalpunkt keinen Einser, sondern eine Null stehen, sie ist also nicht die Einheitsmatrix E. Wenn allgemeiner eine Lösung $\Phi(X)$ von (5) die Eigenschaft hat, daß eine damit äquivalente Lösung $\Gamma^{-1}\,\Phi(X)\,\Gamma$ in einer sich in der Diagonale kreuzenden Zeile und Spalte lauter Nullen hat, so ist $\Gamma^{-1}\,\Phi(E)\,\Gamma \neq \mathsf{E}$, also auch $\Phi(E) \neq \mathsf{E}$. Wir wollen jetzt zeigen, daß abgesehen von diesem Fall, in dem also die Reihenzahl ν auf $\nu - 1$ reduziert werden kann, stets $\Phi(E) = \mathsf{E}$ ist, daß also der folgende Satz gilt:

Satz 6. *Wenn es zu einer Lösung $\Phi(X)$ von (5) keine äquivalente Lösung $\Gamma^{-1}\Phi(X)\,\Gamma$ gibt, die in einer sich in der Diagonale kreuzenden Zeile und Spalte lauter Nullen hat, also insbesondere, wenn $\Phi(X)$ irreduzibel ist, so ist $\Phi(E) = \mathsf{E}$.*

Zum Beweis setzen wir $\Phi(E) = \mathsf{A}$. Bekanntlich gibt es eine Matrix Γ derart, daß die Matrix $\mathsf{B} = \Gamma^{-1}\mathsf{A}\Gamma$ „Diagonalform" oder wenigstens „Kästchenform" hat, wobei sich längs der Diagonale Kästchen der Gestalt

$$\begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \beta & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \beta \end{pmatrix}$$

reihen und außerhalb dieser Kästchen lauter Nullen stehen[2]). Dabei ist die Reihenzahl r eines Kästchens gleich dem Exponenten des Elementarteilers $(\lambda - \beta)^r$ der Matrix $\mathsf{A} - \lambda\,\mathsf{E}$. Nach (8) ist nun $\mathsf{A}\mathsf{A} = \mathsf{A}$, also auch $\mathsf{B}\mathsf{B} = \mathsf{B}$. Daraus ergibt sich leicht, daß alle Elementarteiler den Exponenten 1 haben. Denn bei einem höheren Exponenten hat B, da man das entsprechende Kästchen links oben hin bringen kann, die Gestalt

$$\mathsf{B} = \begin{pmatrix} \beta & 0 & \dots \\ 1 & \beta & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad \text{woraus folgt:} \quad \mathsf{B}\,\mathsf{B} = \begin{pmatrix} \beta^2 & 0 & \dots \\ 2\beta & \beta^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Wegen $\mathsf{B}\mathsf{B} = \mathsf{B}$ ist also $\beta^2 = \beta$, $2\,\beta = 1$, was sich widerspricht. Somit hat B reine Diagonalform:

$$\mathsf{B} = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \beta_\nu \end{pmatrix}.$$

Nach (7) ist $\Phi(X)\,\mathsf{A} = \mathsf{A}\,\Phi(X) = \Phi(X)$ und daher, wenn man die zu $\Phi(X)$ äquivalente Lösung $\Gamma^{-1}\,\Phi(X)\,\Gamma$ mit $\Psi(X)$ bezeichnet,

$$\Psi(X)\mathsf{B} = \mathsf{B}\Psi(X) = \Psi(X),$$

[2]) Man sehe etwa: M. Bôcher, Einführung in die höhere Algebra, 2. Aufl., 1925, § 100; oder L. E. Dickson-Bodewig, Höhere Algebra, 1929, § 53, 54; oder B. L. van der Waerden, Moderne Algebra, Bd. II (1931), § 109, 2. Auflage 1940, § 111.

oder ausführlicher

$$\begin{vmatrix} \beta_1\psi_{11}(X) & \dots & \beta_\nu\psi_{1\nu}(X) \\ \beta_1\psi_{21}(X) & \dots & \beta_\nu\psi_{2\nu}(X) \\ \dots & \dots & \dots \\ \beta_1\psi_{\nu 1}(X) & \dots & \beta_\nu\psi_{\nu\nu}(X) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta_1\psi_{11}(X) & \dots & \beta_1\psi_{1\nu}(X) \\ \beta_2\psi_{21}(X) & \dots & \beta_2\psi_{2\nu}(X) \\ \dots & \dots & \dots \\ \beta_\nu\psi_{\nu 1}(X) & \dots & \beta_\nu\psi_{\nu\nu}(X) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \psi_{11}(X) & \dots & \psi_{1\nu}(X) \\ \psi_{21}(X) & \dots & \psi_{2\nu}(X) \\ \dots & \dots & \dots \\ \psi_{\nu 1}(X) & \dots & \psi_{\nu\nu}(X) \end{vmatrix}.$$

Ist nun μ eine beliebige, aber zunächst festzuhaltende Zahl aus der Reihe $1, \dots, \nu$, so folgt hieraus

$$\beta_\mu\,\psi_{\lambda\mu}(X) = \psi_{\lambda\mu}(X) \quad \text{für } \lambda = 1, \dots, \nu,$$
$$\beta_\mu\,\psi_{\mu\lambda}(X) = \psi_{\mu\lambda}(X) \quad \text{für } \lambda = 1, \dots, \nu.$$

Da aber die hier auftretenden Funktionen $\psi_{\lambda\mu}(X)$ und $\psi_{\mu\lambda}(X)$ gerade die μ-te Spalte und Zeile füllen, so sind sie nach Voraussetzung nicht alle identisch gleich 0, und es ergibt sich $\beta_\mu = 1$. Da das für jede der Zahlen $\mu = 1, \dots, \nu$ gilt, so ist zunächst

$$\mathsf{B} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \mathsf{E}$$

und folglich auch $\mathsf{A} = \Gamma\mathsf{B}\Gamma^{-1} = \mathsf{E}$. W. z. b. w.

Nach Satz 6 bedeutet es keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn wir von jetzt an voraussetzen:

(9) $$\Phi(E) = \mathsf{E}.$$

§ 3.

Differentialgleichungen.

Wir suchen Lösungen $\Phi(X)$ von (5), welche in der Umgebung von $X = E$ analytisch sind. Unter der partiellen Ableitung $\dfrac{\partial\,\Phi(X)}{\partial x_{pq}}$ verstehen wir die Matrix

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi_{11}}{\partial x_{pq}} & \dots & \dfrac{\partial\varphi_{1\nu}}{\partial x_{pq}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial\varphi_{\nu 1}}{\partial x_{pq}} & \dots & \dfrac{\partial\varphi_{\nu\nu}}{\partial x_{pq}} \end{vmatrix}.$$

Setzen wir zur Abkürzung $XY = Z$, so daß

$$z_{rq} = \sum_{p=1}^{n} x_{rp}\, y_{pq} \qquad (r, q = 1, \ldots, n)$$

ist, so folgt aus (5) durch partielle Ableitung nach y_{pq}

$$\Phi(X)\frac{\partial \Phi(Y)}{\partial y_{pq}} = \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial \Phi(Z)}{\partial z_{rq}}\, x_{rp},$$

und wenn man hier speziell $Y = E$ setzt und die Abkürzung

$$\left\{\frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_{pq}}\right\}_{X=E} = \mathsf{A}^{pq} \tag{10}$$

einführt:

$$\Phi(X)\,\mathsf{A}^{pq} = \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_{rq}}\, x_{rp} \qquad (p, q = 1, \ldots, n). \tag{11}$$

Nun ist

$$\sum_{p=1}^{n} x_{rp}\frac{\partial |X|}{\partial x_{sp}} = e_{rs}|X|, \qquad \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial |X|}{\partial x_{sp}}\, x_{st} = e_{pt}|X|. \tag{12}$$

Unter Anwendung der ersten dieser Formeln folgt aus (11) durch Multiplikation mit $\frac{\partial |X|}{\partial x_{sp}}$ und Summation nach p, wenn man noch die rechte und linke Seite vertauscht,

$$|X|\frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_{sq}} = \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial |X|}{\partial x_{sp}}\, \Phi(X)\,\mathsf{A}^{pq} \qquad (s, q = 1, \ldots, n), \tag{13}$$

und umgekehrt folgt aus (13) auch wieder (11), wenn man mit x_{st} multipliziert und nach s summiert, wobei die zweite der Formeln (12) anzuwenden ist. Damit ist bewiesen

Satz 7. *Jede in der Umgebung von $X = E$ analytische Lösung $\Phi(X)$ der Gleichung* (5) *genügt einem System von partiellen Differentialgleichungen der Form* (13), *wobei die A^{pq} gewisse konstante Matrizes sind.*

Es ist das ein System von n^2 Gleichungen für die Matrix Φ, also eigentlich ein System von $n^2\nu^2$ Gleichungen für die ν^2 Funktionen $\varphi_{11}, \varphi_{12}, \ldots, \varphi_{\nu\nu}$. Damit dieses System eine von der trivialen Lösung $\Phi(X) = 0$ verschiedene Lösung hat, müssen die Konstanten A^{pq} die „Integrabilitätsbedingungen" erfüllen, mit denen wir uns bald beschäftigen werden. Aber auch wenn die A^{pq} diese Bedingungen erfüllen, so braucht eine Lösung von (13) noch lange keine Lösung von (5) zu sein. Wenn aber auch die Bedingung (9) erfüllt ist, so trifft das zu; es gilt nämlich die folgende Umkehrung von Satz 7:

Satz 8. *Wenn das Differentialgleichungssystem* (13) *eine in der Umgebung von $X = E$ analytische Lösung $\Phi(X)$ hat, für die $\Phi(E) = \mathsf{E}$ ist, so ist $\Phi(X)$ auch eine Lösung der Gleichung* (5).

Beim Beweis sehen wir zunächst von der Nebenbedingung $\Phi(E) = \mathsf{E}$ ab und wollen zeigen, daß infolge des Systems (13) auch die folgende Gleichung gilt:

$$(14)\quad |X|^k \frac{\partial^k \Phi(X)}{\partial x_{s_1 q_1} \cdots \partial x_{s_k q_k}} = \sum_{p_1, \ldots, p_k} \frac{\partial |X|}{\partial x_{s_1 p_1}} \cdots \frac{\partial |X|}{\partial x_{s_k p_k}} \Phi(X)\, \mathsf{A}^{p_1 q_1; \ldots; p_k q_k},$$

wo alle Summationsindizes von 1 bis n laufen und auch die übrigen Indizes die Werte $1, \ldots, n$ haben. Dabei sind die konstanten Matrizes $\mathsf{A}^{p_1 q_1; \ldots; p_k q_k}$ im Fall $k = 1$ die in (13) auftretenden und sind für $k > 1$ durch folgende Rekursionsformel definiert:

$$(15)\quad \mathsf{A}^{p_1 q_1; \ldots; p_k q_k; pq} = \mathsf{A}^{pq} \mathsf{A}^{p_1 q_1; \ldots; p_k q_k} - e_{p_1 q} \mathsf{A}^{p q_1; p_2 q_2; \ldots; p_k q_k} - \\ - e_{p_2 q} \mathsf{A}^{p_1 q_1; p q_2; \ldots; p_k q_k} - \cdots - e_{p_k q} \mathsf{A}^{p_1 q_1; \ldots; p_{k-1} q_{k-1}; p q_k}.$$

Für $k = 1$ ist (14) mit (13) identisch, also richtig. Den allgemeinen Nachweis führen wir durch vollständige Induktion; wir nehmen also (14) für einen gewissen Wert k als richtig an. Dann multiplizieren wir (14) mit $|X|^{-k}$ und differenzieren dann partiell nach x_{sq}. Die dabei auftretenden zweiten Ableitungen von $|X|$ drücken wir vermöge der Formel [3])

$$|X| \frac{\partial^2 |X|}{\partial x_{rp}\, \partial x_{sq}} = \frac{\partial |X|}{\partial x_{rp}} \frac{\partial |X|}{\partial x_{sq}} - \frac{\partial |X|}{\partial x_{rq}} \frac{\partial |X|}{\partial x_{sp}}$$

durch die ersten aus und erhalten dann nach Multiplikation mit $|X|^{k+1}$:

$$|X|^{k+1} \frac{\partial^{k+1} \Phi(X)}{\partial x_{s_1 q_1} \cdots \partial x_{s_k q_k} \partial x_{sq}} = \sum_{p_1, \ldots, p_k} \frac{\partial |X|}{\partial x_{s_1 p_1}} \cdots \frac{\partial |X|}{\partial x_{s_k p_k}} |X| \frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_{sq}} \mathsf{A}^{p_1 q_1; \ldots; p_k q_k} \\ - \sum_{p_1, \ldots, p_k} \frac{\partial |X|}{\partial x_{s_1 q}} \frac{\partial |X|}{\partial x_{s p_1}} \frac{\partial |X|}{\partial x_{s_2 p_2}} \cdots \frac{\partial |X|}{\partial x_{s_k p_k}} \Phi(X)\, \mathsf{A}^{p_1 q_1; \ldots; p_k q_k} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ - \sum_{p_1, \ldots, p_k} \frac{\partial |X|}{\partial x_{s_1 p_1}} \cdots \frac{\partial |X|}{\partial x_{s_{k-1} p_{k-1}}} \frac{\partial |X|}{\partial x_{s_k q}} \frac{\partial |X|}{\partial x_{s p_k}} \Phi(X)\, \mathsf{A}^{p_1 q_1; \ldots; p_k q_k}.$$

Hier geht zunächst die erste Summe vermöge (13) über in die $(k+1)$-fache Summe

$$\sum_{p_1, \ldots, p_k, p} \frac{\partial |X|}{\partial x_{s_1 p_1}} \cdots \frac{\partial |X|}{\partial x_{s_k p_k}} \frac{\partial |X|}{\partial x_{sp}} \Phi(X)\, \mathsf{A}^{pq} \mathsf{A}^{p_1 q_1; \ldots; p_k q_k}.$$

Aber auch die zweite Summe läßt sich als $(k+1)$-fache Summe schreiben:

$$\sum_{p_1, \ldots, p_k, p} e_{pq} \frac{\partial |X|}{\partial x_{s_1 p}} \frac{\partial |X|}{\partial x_{s p_1}} \frac{\partial |X|}{\partial x_{s_2 p_2}} \cdots \frac{\partial |X|}{\partial x_{s_k p_k}} \Phi(X)\, \mathsf{A}^{p_1 q_1; \ldots; p_k q_k},$$

---

[3]) Für $r = s$ und für $p = q$ steht beiderseits 0. Für $r \neq s$, $p \neq q$ handelt es sich um eine geläufige Formel für Unterdeterminanten.

oder indem man die Summationsindizes p, p_1 mit p_1, p bezeichnet:

$$\sum_{p_1,\ldots,p_k,p} \frac{\partial |X|}{\partial x_{s_1 p_1}} \frac{\partial |X|}{\partial x_{s_2 p_2}} \cdots \frac{\partial |X|}{\partial x_{s_k p_k}} \frac{\partial |X|}{\partial x_{sp}} \Phi(X)\, e_{p_1 q}\, \mathsf{A}^{pq_1;\,p_2q_2;\,\ldots;\,p_kq_k}.$$

In entsprechender Weise lassen sich auch die anderen Summen als $(k+1)$-fache Summen schreiben. Wenn man dann die sämtlichen $(k+1)$-fachen Summen unter ein einziges Summenzeichen zusammenfaßt, ergibt sich

$$|X|^{k+1} \frac{\partial^{k+1}\Phi(X)}{\partial x_{s_1 q_1} \cdots \partial x_{s_k q_k} \partial x_{sq}} = \sum_{p_1,\ldots,p_k,p} \frac{\partial |X|}{\partial x_{s_1 p_1}} \cdots \frac{\partial |X|}{\partial x_{s_k p_k}} \frac{\partial |X|}{\partial x_{sp}} \Phi(X)\, \mathsf{A}^{p_1q_1;\,\ldots;\,p_kq_k;\,pq},$$

wobei $\mathsf{A}^{p_1q_1;\,\ldots;\,p_kq_k;\,pq}$ gerade durch (15) gegeben ist. Das ist aber die Formel (14) mit $k+1$ an Stelle von k, womit (14) allgemein bewiesen ist.

Aus (14) folgt weiter, wenn man mit $x_{s_1 r_1} \ldots x_{s_k r_k}$ multipliziert und nach $s_1, \ldots, s_k$ summiert, unter Benutzung von (12):

$$(16)\qquad \sum_{s_1,\ldots,s_k} \frac{\partial^k \Phi(X)}{\partial x_{s_1 q_1} \ldots \partial x_{s_k q_k}} x_{s_1 r_1} \ldots x_{s_k r_k} = \Phi(X)\, \mathsf{A}^{r_1q_1;\,\ldots;\,r_kq_k}.$$

Nunmehr kann der Satz 8 leicht bewiesen werden. Zunächst ist wegen $\Phi(E) = \mathsf{E}$ die Gleichung $\Phi(X)\,\Phi(Y) = \Phi(XY)$ mindestens für $Y = E$ richtig. Wenn wir zeigen können, daß infolge des Gleichungssystems (13) und der Forderung $\Phi(E) = \mathsf{E}$ auch für alle partiellen Ableitungen die Formel

$$(17)\qquad \left\{\frac{\partial^k[\Phi(X)\,\Phi(Y) - \Phi(XY)]}{\partial y_{r_1 q_1} \ldots \partial y_{r_k q_k}}\right\}_{Y=E} = 0$$

gilt, so hat die Taylorentwicklung der Funktion $\Phi(X)\,\Phi(Y) - \Phi(XY)$ nach Potenzen der n^2 Größen $y_{rq} - e_{rq}$ lauter Koeffizienten 0, und damit wird der Satz 8 bewiesen sein. Nun ist die zu beweisende Formel (17), wenn wieder $XY = Z$ gesetzt wird, gleichbedeutend mit

$$\Phi(X) \left\{\frac{\partial^k \Phi(Y)}{\partial y_{r_1 q_1} \ldots \partial y_{r_k q_k}}\right\}_{Y=E} = \sum_{s_1,\ldots,s_k} \left\{\frac{\partial^k \Phi(Z)}{\partial z_{s_1 q_1} \ldots \partial z_{s_k q_k}}\right\}_{Y=E} x_{s_1 r_1} \ldots x_{s_k r_k},$$

oder also mit

$$(18)\qquad \Phi(X) \left\{\frac{\partial^k \Phi(Y)}{\partial y_{r_1 q_1} \ldots \partial y_{r_k q_k}}\right\}_{Y=E} = \sum_{s_1,\ldots,s_k} \frac{\partial^k \Phi(X)}{\partial x_{s_1 q_1} \ldots \partial x_{s_k q_k}} x_{s_1 r_1} \ldots x_{s_k r_k}.$$

Aus (13) folgt aber, wie wir gesehen haben, die Formel (16) und aus dieser folgt für $X = E$ wegen $\Phi(E) = \mathsf{E}$:

$$(19)\qquad \left\{\frac{\partial^k \Phi(X)}{\partial x_{r_1 q_1} \ldots \partial x_{r_k q_k}}\right\}_{X=E} = \mathsf{A}^{r_1q_1;\,\ldots;\,r_kq_k}.$$

Wenn man diesen Wert von $\mathsf{A}^{r_1 q_1; \ldots; r_k q_k}$ in (16) einsetzt, ergibt sich genau die zu beweisende Formel (18), womit diese und folglich auch der Satz 8 bewiesen ist.

Auch die Integrabilitätsbedingungen des Systems (13) können jetzt leicht angegeben werden. Bekanntlich bestehen sie darin, daß die aus (13) berechneten zweiten Ableitungen

$$\frac{\partial^2 \Phi(X)}{\partial x_{s_1 q_1}\,\partial x_{s_2 q_2}} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 \Phi(X)}{\partial x_{s_2 q_2}\,\partial x_{s_1 q_1}}$$

für alle Variabelnpaare $x_{s_1 q_1}$ und $x_{s_2 q_2}$ einander gleich sind; für die höheren Ableitungen trifft dann das Entsprechende von selbst zu. Nun lauten die Gleichungen (14) und (16) im Fall $k = 2$:

$$|X|^2 \frac{\partial^2 \Phi(X)}{\partial x_{s_1 q_1}\,\partial x_{s_2 q_2}} = \sum_{p_1, p_2} \frac{\partial |X|}{\partial x_{s_1 p_1}}\,\frac{\partial |X|}{\partial x_{s_2 p_2}}\,\Phi(X)\,\mathsf{A}^{p_1 q_1; p_2 q_2},$$

$$\sum_{s_1, s_2} \frac{\partial^2 \Phi(X)}{\partial x_{s_1 q_1}\,\partial x_{s_2 q_2}}\,x_{s_1 r_1}\,x_{s_2 r_2} = \Phi(X)\,\mathsf{A}^{r_1 q_1; r_2 q_2}.$$

Notwendig und hinreichend für die Vertauschbarkeit der Differentiationsreihenfolge in allen zweiten Ableitungen ist daher

$$\mathsf{A}^{p_1 q_1; p_2 q_2} = \mathsf{A}^{p_2 q_2; p_1 q_1}$$

und das besagt, wie die Formel (15) für $k = 1$ lehrt, soviel wie

$$\mathsf{A}^{p_2 q_2}\,\mathsf{A}^{p_1 q_1} - e_{p_1 q_2}\,\mathsf{A}^{p_2 q_1} = \mathsf{A}^{p_1 q_1}\,\mathsf{A}^{p_2 q_2} - e_{p_2 q_1}\,\mathsf{A}^{p_1 q_2}.$$

Indem wir statt p_1, q_1, p_2, q_2 einfacher p, q, r, s schreiben, gewinnen wir so den

Satz 9. *Die Integrabilitätsbedingungen des Differentialgleichungssystems* (13) *lauten:*

$$\mathsf{A}^{pq}\,\mathsf{A}^{rs} - \mathsf{A}^{rs}\,\mathsf{A}^{pq} = e_{rq}\,\mathsf{A}^{ps} - e_{ps}\,\mathsf{A}^{rq}$$

für $p, q, r, s = 1, \ldots, n$.

Die in der Umgebung von $X = E$ analytische, also nach Potenzen der n^2 Größen $x_{pq} - e_{pq}$ entwickelbare Lösung $\Phi(X)$ von (13) mit $\Phi(E) = \mathsf{E}$ ist nunmehr eindeutig bestimmt; nach dem Taylorschen Satz ist sie nämlich gleich

$$\Phi(X) = \mathsf{E} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \Bigg(\sum_{\substack{p_1, \ldots, p_k \\ q_1, \ldots, q_k}} \left\{ \frac{\partial^k \Phi(X)}{\partial x_{p_1 q_1} \cdots \partial x_{p_k q_k}} \right\}_{X = E} \times (x_{p_1 q_1} - e_{p_1 q_1}) \cdots (x_{p_k q_k} - e_{p_k q_k}) \Bigg). \tag{20}$$

Die dabei auftretenden k-ten Ableitungen für $X = E$ sind die Größen (19) (mit p an Stelle von r), welche sich nach der Rekursionsformel (15) berechnen.

Auf Grund dieser Formel kann man leicht einen Konvergenzbereich angeben. Wenn nämlich für die Elemente der in dem System (13) gegebenen Matrizes A^{pq} die Abschätzung

$$(21) \qquad |\alpha_{\varrho\sigma}^{pq}| \leqq c, \quad \text{wo } c \geqq 1,$$

gilt, so gilt für die Elemente von $\mathsf{A}^{p_1 q_1; \ldots; p_k q_k}$ die Abschätzung

$$(22) \qquad |\alpha_{\varrho\sigma}^{p_1 q_1; \ldots; p_k q_k}| \leqq \frac{(\nu + k - 1)!}{(\nu - 1)!} c^k.$$

Denn für $k = 1$ ist das nach (21) richtig, und wenn es für ein gewisses k richtig ist, so folgt aus (15)

$$\begin{aligned} |\alpha_{\varrho\sigma}^{p_1 q_1; \ldots; p_k q_k; pq}| &\leqq \nu c \frac{(\nu + k - 1)!}{(\nu - 1)!} c^k + k \frac{(\nu + k - 1)!}{(\nu - 1)!} c^k \\ &\leqq \frac{(\nu + k)!}{(\nu - 1)!} c^{k+1}. \end{aligned}$$

Daher gilt die Formel (22) allgemein, was mit Rücksicht auf (19) besagt, daß jedes Element der Matrix

$$\left\{\frac{\partial^k \Phi(X)}{\partial x_{p_1 q_1} \ldots \partial x_{p_k q_k}}\right\}_{X = E}$$

absolut höchstens gleich der rechten Seite von (22) ist. Für die Reihe in (20) hat man also die Majorante

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{\substack{p_1, \ldots, p_k \\ q_1, \ldots, q_k}} \frac{(\nu + k - 1)!}{(\nu - 1)!} c^k |x_{p_1 q_1} - e_{p_1 q_1}| \ldots |x_{p_k q_k} - e_{p_k q_k}|$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\nu + k - 1}{k} c^k \Big(\sum_{p,q} |x_{pq} - e_{pq}|\Big)^k = \Big(1 - c \sum_{p,q} |x_{pq} - e_{pq}|\Big)^{-\nu} - 1,$$

und es ergibt sich der

Satz 10. *Das Differentialgleichungssystem* (13) *hat, wenn die in Satz* 9 *angegebenen Integrabilitätsbedingungen erfüllt sind, eine und nur eine in der Umgebung von* $X = E$ *analytische Lösung* $\Phi(X)$ *mit* $\Phi(E) = \mathsf{E}$, *und ihre Reihenentwicklung nach Potenzen der* n^2 *Größen* $x_{pq} - e_{pq}$ *konvergiert mindestens für*

$$\sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} |x_{pq} - e_{pq}| < \frac{1}{c},$$

wobei c *die größte der* $n^2\nu^2 + 1$ *Zahlen* 1 *und* $|\alpha_{\varrho\sigma}^{pq}|$ *ist* $(p, q = 1, \ldots, n;$ $\varrho, \sigma = 1, \ldots, \nu)$.

Bemerkung. Statt die Funktionalgleichung (5) partiell nach y_{pq} zu differenzieren und dann $Y = E$ zu setzen, kann man ebensogut nach x_{pq}

differenzieren und dann $X = E$ setzen. Dadurch ergibt sich, wenn im Endresultat X statt Y geschrieben wird, analog zu (13) das System

$$|X|\frac{\partial\Phi(X)}{\partial x_{ps}} = \sum_{q=1}^{n}\frac{\partial|X|}{\partial x_{qs}}\mathsf{A}^{pq}\Phi(X) \qquad (p, s = 1, \ldots, n), \tag{23}$$

wo A^{pq} wieder durch (10) gegeben ist. Hieran lassen sich nun die entsprechenden Überlegungen anschließen wie an (13). Die Integrabilitätsbedingungen sind die gleichen, und die bei ihrem Erfülltsein eindeutig bestimmte in der Umgebung von $X = E$ analytische Lösung von (23) mit $\Phi(E) = \mathsf{E}$ ist auch Lösung der Gleichung (5). Im übrigen ist aber das System (23) keineswegs mit (13) gleichbedeutend, und das allgemeine Integral von (23) ist ein anderes als das allgemeine Integral von (13), wovon man sich schon im Fall $n = 1$ überzeugen kann[4]). Nur das Integral mit der Nebenbedingung $\Phi(E) = \mathsf{E}$ ist für beide Systeme dasselbe und ist Lösung der Gleichung (5).

§ 4.

Die Fälle $n = 1$ und $\nu = 1$.

Nachdem wir in § 3 bis zur Entwicklung der Lösung unserer Funktionalgleichung (5) in die Taylorsche Reihe nach den n^2 Größen $x_{pq} - e_{pq}$ vorgedrungen sind, ist das Problem im Prinzip bereits erledigt. Es handelt sich aber noch darum, die konstanten Matrizes A^{pq} explizit auf die allgemeinste Weise so anzugeben, daß die Integrabilitätsbedingungen von Satz 9 erfüllt sind, und dann die Lösung in einer handlicheren Form anzugeben als es die besagte Taylorsche Reihe ist.

Sehr einfach sind die Fälle $n = 1$ und $\nu = 1$.

I. Im Fall $n = 1$ hat die Matrix X nur das eine Element x_{11}, wofür wir einfach x schreiben. Ebenso gibt es nur eine Matrix A^{pq}, nämlich A^{11}, wofür wir einfach A schreiben. Das System (13) besteht dann nur aus der einen (gewöhnlichen) Differentialgleichung

$$x\frac{d\Phi(x)}{dx} = \Phi(x)\,\mathsf{A}, \tag{24}$$

bei der es natürlich keine Integrabilitätsbedingungen gibt; die in Satz 9 angegebenen reduzieren sich auf eine Identität. Das allgemeine Integral von (24) ist augenscheinlich

$$\Phi(x) = \Gamma x^{\mathsf{A}} = \Gamma e^{\mathsf{A}\log x} = \Gamma \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\mathsf{A}\log x)^k}{k!}, \tag{25}$$

---

[4]) Die allgemeine Lösung von (13) im Fall $n = 1$ ist in Formel (25) gegeben. Die allgemeine Lösung von (23) im Fall $n = 1$ unterscheidet sich davon dadurch, daß die konstante Matrix Γ nicht als vorderer, sondern als hinterer Faktor auftritt.

wo Γ eine willkürliche konstante Matrix ist. Die Forderung $\Phi(E) = \mathsf{E}$ gewinnt für $n = 1$ das Aussehen $\Phi(1) = \mathsf{E}$, und dann folgt aus (25): $\Gamma = \mathsf{E}$. Somit gewinnen wir den

Satz 11. *Die in der Umgebung von $x = 1$ analytischen Lösungen der Funktionalgleichung $\Phi(x)\,\Phi(y) = \Phi(xy)$ mit der Nebenbedingung $\Phi(1) = \mathsf{E}$ sind gegeben durch die Formel*

$$\Phi(x) = x^{\mathsf{A}} = e^{\mathsf{A} \log x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathsf{A} \log x)^k}{k\,!},$$

wobei A eine willkürliche konstante Matrix ist.

II. Im Fall $\nu = 1$ hat die Matrix $\Phi(X)$ nur das eine Element $\varphi_{11}(X)$, wofür wir einfach $\varphi(X)$ schreiben. Ebenso hat A^{pq} nur das eine Element α_{11}^{pq}, wofür wir α^{pq} schreiben. Das System (13) lautet dann

$$(26) \qquad |X| \frac{\partial \varphi(X)}{\partial x_{sq}} = \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial |X|}{\partial x_{sp}} \varphi(X)\, \alpha^{pq}.$$

Die Integrabilitätsbedingungen (Satz 9) reduzieren sich auf

$$(27) \qquad e_{rq}\, \alpha^{ps} = e_{ps}\, \alpha^{rq} \qquad (p, q, r, s = 1, \ldots, n).$$

Speziell für $r = q = 1$ folgt hieraus

$$(28) \qquad \alpha^{ps} = e_{ps}\, \alpha^{11} \qquad (p, s = 1, \ldots, n)$$

und umgekehrt folgt aus (28) sogleich auch wieder (27), so daß die Gleichungen (28) bereits die vollen Integrabilitätsbedingungen sind. Hiernach sind alle α^{ps} bereits durch das willkürlich bleibende α^{11} bestimmt, und die Differentialgleichungen (26) reduzieren sich, wenn wir statt α^{11} einfach α schreiben, auf

$$|X| \frac{\partial \varphi(X)}{\partial x_{sq}} = \frac{\partial |X|}{\partial x_{sq}} \varphi(X)\, \alpha \qquad (s, q = 1, \ldots, n).$$

Das besagt soviel wie

$$\frac{\partial \log [\varphi(X)\, |X|^{-\alpha}]}{\partial x_{sq}} = 0 \qquad (s, q = 1, \ldots, n).$$

Hiernach ist $\varphi(X) |X|^{-\alpha}$ eine Konstante, und da die Forderung $\Phi(E) = \mathsf{E}$ für $\nu = 1$ das Aussehen $\varphi(E) = 1$ hat, ist die Konstante gleich 1. Somit ergibt sich

Satz 12. *Die in der Umgebung von $X = E$ analytischen Lösungen der Funktionalgleichung $\varphi(X)\, \varphi(Y) = \varphi(XY)$ mit der Nebenbedingung $\varphi(E) = 1$ sind gegeben durch die Formel*

$$\varphi(X) = |X|^{\alpha} = e^{\alpha \log |X|},$$

wo α eine willkürliche Konstante ist.

§ 5.

Reduktion der Integrabilitätsbedingungen.

Im folgenden scheiden die erledigten Fälle $n = 1$ und $\nu = 1$ aus[5]. Die Integrabilitätsbedingungen lauten nach Satz 9

$$\mathsf{A}^{pq}\mathsf{A}^{rs} - \mathsf{A}^{rs}\mathsf{A}^{pq} = e_{rq}\mathsf{A}^{ps} - e_{ps}\mathsf{A}^{rq}. \tag{29}$$

Speziell für $p = s = 1$ folgt daraus

$$\text{I.} \qquad \mathsf{A}^{rq} = \mathsf{A}^{r1}\mathsf{A}^{1q} - \mathsf{A}^{1q}\mathsf{A}^{r1} + e_{rq}\mathsf{A}^{11} \qquad (r, q = 1, \ldots, n).$$

Dadurch sind alle n^2 Matrizes A^{rq} bereits durch die $2n - 1$ Matrizes

$$\begin{gathered}\mathsf{A}^{11}, \mathsf{A}^{21}, \ldots, \mathsf{A}^{n1},\\ \mathsf{A}^{12}, \ldots, \mathsf{A}^{1n}\end{gathered}$$

ausgedrückt. Zwischen diesen bestehen aber noch Beziehungen. Zunächst folgt aus I für $q = 1$, $r > 1$ bzw. für $r = 1$, $q > 1$:

$$\text{II.} \qquad \mathsf{A}^{r1} = \mathsf{A}^{r1}\mathsf{A}^{11} - \mathsf{A}^{11}\mathsf{A}^{r1} \qquad (r = 2, \ldots, n),$$

$$\text{III.} \qquad \mathsf{A}^{1q} = \mathsf{A}^{11}\mathsf{A}^{1q} - \mathsf{A}^{1q}\mathsf{A}^{11} \qquad (q = 2, \ldots, n).$$

Die Formel I ist für $q = r = 1$ eine Identität; für $q = 1$, $r > 1$ bzw. für $q > 1$, $r = 1$ deckt sie sich mit II bzw. III, weshalb es in Satz 13 genügen wird, sie für $q > 1$, $r > 1$ aufzuschreiben.

Weiter folgt aus (29) für $q = s = 1$ bzw. für $p = r = 1$:

$$\text{IV.} \qquad \mathsf{A}^{p1}\mathsf{A}^{r1} = \mathsf{A}^{r1}\mathsf{A}^{p1} \qquad (p, r = 2, \ldots, n),$$

$$\text{V.} \qquad \mathsf{A}^{1q}\mathsf{A}^{1s} = \mathsf{A}^{1s}\mathsf{A}^{1q} \qquad (q, s = 2, \ldots, n).$$

Die Beziehungen IV und V brauchen in Satz 13 aus Symmetriegründen nur für $p < r$ bzw. für $q < s$ vermerkt zu werden. Sie kommen dann natürlich nur im Fall $n \geqq 3$ in Betracht.

Schließlich folgt aus (29) für $s = 1$ bzw. für $r = 1$

$$\mathsf{A}^{pq}\mathsf{A}^{r1} - \mathsf{A}^{r1}\mathsf{A}^{pq} = e_{rq}\mathsf{A}^{p1} \qquad (p, q, r = 2, \ldots\ n)$$

$$\mathsf{A}^{pq}\mathsf{A}^{1s} - \mathsf{A}^{1s}\mathsf{A}^{pq} = -e_{ps}\mathsf{A}^{1q} \quad (p, q, s = 2, \ldots, n),$$

wofür man mit Rücksicht auf I auch schreiben kann:

$$\begin{aligned}(\mathsf{A}^{p1}\mathsf{A}^{1q} - \mathsf{A}^{1q}\mathsf{A}^{p1} + e_{pq}\mathsf{A}^{11})\,\mathsf{A}^{r1} - \mathsf{A}^{r1}(\mathsf{A}^{p1}\mathsf{A}^{1q} - \mathsf{A}^{1q}\mathsf{A}^{p1} + e_{pq}\mathsf{A}^{11})&\\ = e_{rq}\mathsf{A}^{p1},&\\ (\mathsf{A}^{p1}\mathsf{A}^{1q} - \mathsf{A}^{1q}\mathsf{A}^{p1} + e_{pq}\mathsf{A}^{11})\,\mathsf{A}^{1s} - \mathsf{A}^{1s}(\mathsf{A}^{p1}\mathsf{A}^{1q} - \mathsf{A}^{1q}\mathsf{A}^{p1} + e_{pq}\mathsf{A}^{11})&\\ = -e_{ps}\mathsf{A}^{1q},&\end{aligned}$$

[5]) Für $\nu = 1$ bleibt allerdings die ganze Rechnung in Kraft. Sie besteht aber zum größten Teil aus Trivialitäten, weil für einreihige Matrizes trivialerweise das kommutative Gesetz der Multiplikation gilt.

und endlich mit Rücksicht auf II und III:

$$\text{VI.}\quad (A^{p1}A^{1q} - A^{1q}A^{p1})A^{r1} - A^{r1}(A^{p1}A^{1q} - A^{1q}A^{p1}) = e_{rq}A^{p1} + e_{pq}A^{r1} \quad (p, q, r = 2, \ldots, n),$$

$$\text{VII.}\quad A^{1s}(A^{p1}A^{1q} - A^{1q}A^{p1}) - (A^{p1}A^{1q} - A^{1q}A^{p1})A^{1s} = e_{ps}A^{1q} + e_{pq}A^{1s} \quad (p, q, s = 2, \ldots, n).$$

Weitere Beziehungen sind nicht erforderlich. Um das einzusehen, müssen wir zeigen, daß aus den Beziehungen I bis VII bereits die Gleichung (29) für beliebige Indizes folgt. Zu dem Zweck leiten wir zuerst einige Folgerungen aus I bis VII her. Aus II und III folgt für $q \geqq 2$, $r \geqq 2$

$$\begin{aligned} A^{r1}A^{1q} &= (A^{r1}A^{11} - A^{11}A^{r1})A^{1q} \\ &= A^{r1}A^{11}A^{1q} - A^{11}A^{r1}A^{1q} \\ &= A^{r1}(A^{1q}A^{11} + A^{1q}) - A^{11}A^{r1}A^{1q}, \end{aligned}$$

oder also

$$\text{VIII.}\qquad A^{r1}A^{1q}A^{11} = A^{11}A^{r1}A^{1q} \qquad (q, r = 2, \ldots, n),$$

und eine analoge Rechnung führt zu

$$\text{IX.}\qquad A^{1q}A^{r1}A^{11} = A^{11}A^{1q}A^{r1} \qquad (q, r = 2, \ldots, n).$$

Nach I ist

$$A^{pq}A^{r1} - A^{r1}A^{pq} = (A^{p1}A^{1q} - A^{1q}A^{p1} + e_{pq}A^{11})A^{r1} - A^{r1}(A^{p1}A^{1q} - A^{1q}A^{p1} + e_{pq}A^{11}),$$

was für $p > 1$, $q > 1$, $r > 1$ nach VI und II gleich

$$e_{rq}A^{p1} + e_{pq}A^{r1} - e_{pq}A^{r1} = e_{rq}A^{p1},$$

dagegen für $p > 1$, $q > 1$, $r = 1$ wegen VIII und IX gleich 0 ist. Man hat also die beiden Folgerungen

$$\text{X.}\qquad A^{pq}A^{r1} - A^{r1}A^{pq} = e_{rq}A^{p1} \qquad (p, q, r = 2, \ldots, n)$$

$$\text{XI.}\qquad A^{pq}A^{11} = A^{11}A^{pq} \qquad (p, q = 2, \ldots, n).$$

Analog ist wegen I auch

$$A^{pq}A^{1s} - A^{1s}A^{pq} = (A^{p1}A^{1q} - A^{1q}A^{p1} + e_{pq}A^{11})A^{1s} - A^{1s}(A^{p1}A^{1q} - A^{1q}A^{p1} + e_{pq}A^{11}),$$

was für $p > 1$, $q > 1$, $s > 1$ nach VII und III gleich

$$-e_{ps}A^{1q} - e_{pq}A^{1s} + e_{pq}A^{1s} = -e_{ps}A^{1q}$$

ist. Man hat also die weitere Folgerung

$$\text{XII.}\qquad A^{pq}A^{1s} - A^{1s}A^{pq} = -e_{ps}A^{1q} \qquad (p, q, s = 2, \ldots, n).$$

Eine letzte Folgerung bekommt man, wenn man VI hinten mit A^{1s} multipliziert, VII hinten mit A^{r1}, sodann VI vorn mit $-\mathsf{A}^{1s}$, VII vorn mit $-\mathsf{A}^{r1}$, worauf man die vier so entstehenden Gleichungen addiert. So ergibt sich

$$\text{XIII.}\qquad \begin{aligned}(\mathsf{A}^{p1}\mathsf{A}^{1q} - \mathsf{A}^{1q}\mathsf{A}^{p1})(\mathsf{A}^{r1}\mathsf{A}^{1s} - \mathsf{A}^{1s}\mathsf{A}^{r1}) &- \\ - (\mathsf{A}^{r1}\mathsf{A}^{1s} - \mathsf{A}^{1s}\mathsf{A}^{r1})(\mathsf{A}^{p1}\mathsf{A}^{1q} - \mathsf{A}^{1q}\mathsf{A}^{p1})& \\ = e_{rq}(\mathsf{A}^{p1}\mathsf{A}^{1s} - \mathsf{A}^{1s}\mathsf{A}^{p1}) - e_{ps}(\mathsf{A}^{r1}\mathsf{A}^{1q} - \mathsf{A}^{1q}\mathsf{A}^{r1}).&\end{aligned}$$

Nunmehr genügt es, zu zeigen, daß (29) eine Folge der Formeln I bis XIII ist. Wir unterscheiden verschiedene Fälle.

1. Sind in (29) alle vier Indizes gleich 1, so ist (29) eine Identität, also nichts mehr zu beweisen.

2. Ist in (29) nur *ein* Index größer als 1, und zwar ein vorderer bzw. hinterer, so kann man aus Symmetriegründen annehmen, daß es der Index r bzw. q ist. Dann hat (29) das Aussehen

$$\mathsf{A}^{11}\mathsf{A}^{r1} - \mathsf{A}^{r1}\mathsf{A}^{11} = -\mathsf{A}^{r1} \quad \text{bzw.} \quad \mathsf{A}^{1q}\mathsf{A}^{11} - \mathsf{A}^{11}\mathsf{A}^{1q} = -\mathsf{A}^{1q},$$

und das deckt sich mit II bzw. III.

3. Sind in (29) zwei Indizes größer als 1, und zwar die zwei vorderen bzw. die zwei hinteren, so hat (29) das Aussehen

$$\mathsf{A}^{p1}\mathsf{A}^{r1} - \mathsf{A}^{r1}\mathsf{A}^{p1} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \mathsf{A}^{1q}\mathsf{A}^{1s} - \mathsf{A}^{1s}\mathsf{A}^{1q} = 0,$$

und das deckt sich mit IV bzw. V.

4. Sind in (29) zwei Indizes größer als 1, und zwar ein vorderer und ein hinterer, so kann man annehmen, daß es die Indizes r und q oder die Indizes p und q sind. Dann hat (29) das Aussehen

$$\mathsf{A}^{1q}\mathsf{A}^{r1} - \mathsf{A}^{r1}\mathsf{A}^{1q} = e_{rq}\mathsf{A}^{11} - \mathsf{A}^{rq} \quad \text{bzw.} \quad \mathsf{A}^{pq}\mathsf{A}^{11} - \mathsf{A}^{11}\mathsf{A}^{pq} = 0,$$

und das deckt sich mit I bzw. XI.

5. Ist in (29) nur *ein* Index gleich 1 und zwar ein vorderer bzw. hinterer, so kann man annehmen, daß es der Index r bzw. s ist. Dann hat (29) das Aussehen

$$\mathsf{A}^{pq}\mathsf{A}^{1s} - \mathsf{A}^{1s}\mathsf{A}^{pq} = -e_{ps}\mathsf{A}^{1q} \quad \text{bzw.} \quad \mathsf{A}^{pq}\mathsf{A}^{r1} - \mathsf{A}^{r1}\mathsf{A}^{pq} = e_{rq}\mathsf{A}^{p1},$$

und das deckt sich mit XII bzw. X.

6. Jetzt bleibt nur noch der Fall, daß in (29) alle vier Indizes größer als 1 sind. Dann hat (29) wegen I das Aussehen

$$\begin{aligned}(\mathsf{A}^{p1}\mathsf{A}^{1q} - \mathsf{A}^{1q}\mathsf{A}^{p1} + e_{pq}\mathsf{A}^{11})(\mathsf{A}^{r1}\mathsf{A}^{1s} - \mathsf{A}^{1s}\mathsf{A}^{r1} + e_{rs}\mathsf{A}^{11}) &- \\ - (\mathsf{A}^{r1}\mathsf{A}^{1s} - \mathsf{A}^{1s}\mathsf{A}^{r1} + e_{rs}\mathsf{A}^{11})(\mathsf{A}^{p1}\mathsf{A}^{1q} - \mathsf{A}^{1q}\mathsf{A}^{p1} + e_{pq}\mathsf{A}^{11})& \\ = e_{rq}(\mathsf{A}^{p1}\mathsf{A}^{1s} - \mathsf{A}^{1s}\mathsf{A}^{p1} + e_{ps}\mathsf{A}^{11}) - e_{ps}(\mathsf{A}^{r1}\mathsf{A}^{1q} - \mathsf{A}^{1q}\mathsf{A}^{r1} + e_{rq}\mathsf{A}^{11}).&\end{aligned}$$

Hier fällt nun A^{11} mit Rücksicht auf VIII und IX völlig heraus und die dann verbleibende Formel deckt sich mit XIII.

Damit ist alles bewiesen, und wir gewinnen, wenn wir in den Formeln I bis VII die Indizes teilweise mit anderen Buchstaben bezeichnen, den

Satz 13. *Den in Satz 9 angegebenen Integrabilitätsbedingungen des Differentialgleichungssystems (13) läßt sich die folgende Gestalt geben: Die Bedingungen bestehen darin, daß durch die $2n-1$ Matrizes*

$$\begin{gathered}\mathsf{A}^{11}, \mathsf{A}^{21}, \ldots, \mathsf{A}^{n1},\\ \mathsf{A}^{12}, \ldots, \mathsf{A}^{1n}\end{gathered}$$

die $(n-1)^2$ anderen sich ausdrücken durch die Formel

I. $$\mathsf{A}^{pq} = \mathsf{A}^{p1}\mathsf{A}^{1q} - \mathsf{A}^{1q}\mathsf{A}^{p1} + e_{pq}\mathsf{A}^{11} \quad (p, q = 2, \ldots, n),$$

und daß zwischen den $2n-1$ erstgenannten Matrizes noch die folgenden Beziehungen bestehen:

II. $$\mathsf{A}^{p1} = \mathsf{A}^{p1}\mathsf{A}^{11} - \mathsf{A}^{11}\mathsf{A}^{p1} \quad (p = 2, \ldots, n),$$

III. $$\mathsf{A}^{1p} = \mathsf{A}^{11}\mathsf{A}^{1p} - \mathsf{A}^{1p}\mathsf{A}^{11} \quad (p = 2, \ldots, n),$$

IV. $$\mathsf{A}^{p1}\mathsf{A}^{q1} = \mathsf{A}^{q1}\mathsf{A}^{p1} \quad (1 < p < q \leqq n),$$

V. $$\mathsf{A}^{1p}\mathsf{A}^{1q} = \mathsf{A}^{1q}\mathsf{A}^{1p} \quad (1 < p < q \leqq n),$$

VI. $$\begin{aligned}(\mathsf{A}^{p1}\mathsf{A}^{1q} - \mathsf{A}^{1q}\mathsf{A}^{p1})\mathsf{A}^{r1} - \mathsf{A}^{r1}(\mathsf{A}^{p1}\mathsf{A}^{1q} - \mathsf{A}^{1q}\mathsf{A}^{p1})&\\ = e_{rq}\mathsf{A}^{p1} + e_{pq}\mathsf{A}^{r1}. \quad (p, q, r = 2, \ldots, n),&\end{aligned}$$

VII. $$\begin{aligned}\mathsf{A}^{1r}(\mathsf{A}^{p1}\mathsf{A}^{1q} - \mathsf{A}^{1q}\mathsf{A}^{p1}) - (\mathsf{A}^{p1}\mathsf{A}^{1q} - \mathsf{A}^{1q}\mathsf{A}^{p1})\mathsf{A}^{1r}&\\ = e_{pr}\mathsf{A}^{1q} + e_{pq}\mathsf{A}^{1r} \quad (p, q, r = 2, \ldots, n).&\end{aligned}$$

Bemerkung. Die Vorzugsstellung, die in Satz 13 dem Index 1 eingeräumt ist, kann man ebensogut jedem anderen der Indizes $1, 2, \ldots, n$ einräumen und dadurch zu entsprechenden anderen Formulierungen der Integrabilitätsbedingungen gelangen[6]).

§ 6.

Einige Folgerungen aus den Integrabilitätsbedingungen.

Es sei $\mathsf{A}^{12} = 0$. Aus VII für $p = q = 2$ folgt dann

$$\mathsf{A}^{1r} = 0 \quad (r = 2, \ldots, n).$$

Aus VI für $p = q = 2$ folgt

$$e_{r2}\mathsf{A}^{21} + \mathsf{A}^{r1} = 0 \quad (r = 2, \ldots, n),$$

also auch

$$\mathsf{A}^{r1} = 0 \quad (r = 2, \ldots, n).$$

---

[6]) Daß keiner der Indizes $1, 2, \ldots, n$ vor einem anderen eine Vorzugsstellung hat, ergibt sich aus Satz 3 und der unmittelbar daran angeschlossenen Bemerkung.

Aus I folgt dann weiter

$$\mathsf{A}^{pq} = e_{pq}\,\mathsf{A}^{11} \qquad (p, q = 2, \ldots, n).$$

Daher sind alle A^{pq} für $p \neq q$ gleich 0 und alle A^{pp} sind einander gleich. Wir hatten angenommen, daß $\mathsf{A}^{12} = 0$ ist. Da aber das Indexpaar 1, 2 in keiner Weise vor einem anderen ausgezeichnet ist[7]), so können wir schließen, daß, wenn A^{pq} für irgendein Paar verschiedener Indizes p, q gleich 0 ist, das für jedes Paar gilt und daß dann alle A^{pp} einander gleich sind, etwa gleich A. Das System (13) lautet dann

$$|X|\,\frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_{sq}} = \frac{\partial |X|}{\partial x_{sq}}\,\Phi(X)\,\mathsf{A}.$$

Dieses System besagt, wenn man

$$|X|^{\mathsf{A}} = e^{\mathsf{A}\log|X|} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathsf{A}\log|X|)^k}{k!} = \Psi(X),$$

also

$$|X|^{-\mathsf{A}} = e^{-\mathsf{A}\log|X|} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\mathsf{A}\log|X|)^k}{k!} = [\Psi(X)]^{-1}$$

setzt, nach hinterer Multiplikation mit $[\Psi(X)]^{-1}$ soviel wie

$$|X|\,\frac{\partial\{\Phi(X)\,[\Psi(X)]^{-1}\}}{\partial x_{sq}} = 0.$$

Somit ist $\Phi(X)\,[\Psi(X)]^{-1}$ eine konstante Matrix Γ, also

$$\Phi(X) = \Gamma\,\Psi(X).$$

Wegen $\Phi(E) = \mathsf{E}$ muß $\Gamma = \mathsf{E}$ sein, und man gewinnt mit Rücksicht auf die in (10) gegebene Bedeutung der A^{pq} den

Satz 14. *Wenn für eine in der Umgebung von $X = E$ analytische Lösung der Gleichung* (5) $\Phi(E) = \mathsf{E}$ *ist und wenn die Matrix*

$$\mathsf{A}^{pq} = \left\{\frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_{pq}}\right\}_{X=E}$$

für ein Paar verschiedener Indizes p, q gleich 0 *ist, so ist $\Phi(X)$ notwendig die bereits in Satz* 5 *angegebene Lösung*

$$\Phi(X) = |X|^{\mathsf{A}} = e^{\mathsf{A}\log|X|} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathsf{A}\log|X|)^k}{k!} \quad \textit{mit} \quad \mathsf{A} = \mathsf{A}^{11}.$$

Nunmehr wollen wir die Gestalt der Matrizes A^{pq} auf Grund der in Satz 13 ihnen auferlegten Bedingungen näher untersuchen. Wenn wir statt

---

[7]) Das ergibt sich aus der ursprünglichen Formulierung der Integrabilitätsbedingungen in Satz 9 oder auch aus Satz 3 und der unmittelbar daran angeschlossenen Bemerkung.

der Lösung $\Phi(X)$ von (5) die äquivalente Lösung $\Gamma^{-1}\Phi(X)\Gamma$ betrachten, so tritt an Stelle von $\mathsf{A}^{pq} = \left\{\frac{\partial\,\Phi(X)}{\partial x_{pq}}\right\}_{X=E}$ die Matrix

$$\Gamma^{-1}\left\{\frac{\partial\Phi(X)}{\partial x_{pq}}\right\}_{X=E}\Gamma = \Gamma^{-1}\mathsf{A}^{pq}\Gamma.$$

Nun läßt sich Γ so wählen, daß etwa $\Gamma^{-1}\mathsf{A}^{11}\Gamma$ eine den Elementarteilern von $\mathsf{A}^{11} - \lambda\,\mathsf{E}$ entsprechende Kästchenmatrix ist, bei einfachen Elementarteilern also eine reine Diagonalmatrix. Es bedeutet daher keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn wir A^{11} von vornherein als Kästchenmatrix annehmen; das wollen wir tun. Sind[8])

$$(\lambda-\alpha_1)^{\nu_1},\quad (\lambda-\alpha_2)^{\nu_2},\ \ldots,\ (\lambda-\alpha_\mu)^{\nu_\mu}$$

die Elementarteiler von $\mathsf{A}^{11} - \lambda\,\mathsf{E}$, wobei dann $\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_\mu = \nu$ ist, so setzen wir demgemäß

$$\mathsf{A}^{11} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}^1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mathfrak{A}^2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \mathfrak{A}^\mu \end{pmatrix}, \tag{30}$$

wo die Nullen für rechteckige Nullmatrizes stehen und wo $\mathfrak{A}^\varrho$ im Fall $\nu_\varrho = 1$ einfach die einreihige Matrix α_ϱ, für $\nu_\varrho > 1$ aber die folgende ν_ϱ-reihige Matrix ist:

$$\mathfrak{A}^\varrho = \begin{pmatrix} \alpha_\varrho & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha_\varrho & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha_\varrho & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & \alpha_\varrho \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Machen wir dementsprechend für $p = 2, \ldots, n$ den Ansatz

$$\mathsf{A}^{p1} = \begin{pmatrix} \mathfrak{B}^{p11} & \ldots & \mathfrak{B}^{p1\mu} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathfrak{B}^{p\mu1} & \ldots & \mathfrak{B}^{p\mu\mu} \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{A}^{1p} = \begin{pmatrix} \mathfrak{C}^{p11} & \ldots & \mathfrak{C}^{p1\mu} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathfrak{C}^{p\mu1} & \ldots & \mathfrak{C}^{p\mu\mu} \end{pmatrix}, \tag{32}$$

wo $\mathfrak{B}^{p\varrho\sigma}$ und $\mathfrak{C}^{p\varrho\sigma}$ Matrizes mit ν_ϱ Zeilen und ν_σ Spalten sind, so nehmen die Bedingungen II und III in Satz 13 die folgende Gestalt an:

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{B}^{p11} & \ldots & \mathfrak{B}^{p1\mu} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathfrak{B}^{p\mu1} & \ldots & \mathfrak{B}^{p\mu\mu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{B}^{p11}\mathfrak{A}^1 & \ldots & \mathfrak{B}^{p1\mu}\mathfrak{A}^\mu \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathfrak{B}^{p\mu1}\mathfrak{A}^1 & \ldots & \mathfrak{B}^{p\mu\mu}\mathfrak{A}^\mu \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathfrak{A}^1\mathfrak{B}^{p11} & \ldots & \mathfrak{A}^1\mathfrak{B}^{p1\mu} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathfrak{A}^\mu\mathfrak{B}^{p\mu1} & \ldots & \mathfrak{A}^\mu\mathfrak{B}^{p\mu\mu} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{C}^{p11} & \ldots & \mathfrak{C}^{p1\mu} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathfrak{C}^{p\mu1} & \ldots & \mathfrak{C}^{p\mu\mu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}^1\mathfrak{C}^{p11} & \ldots & \mathfrak{A}^1\mathfrak{C}^{p1\mu} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathfrak{A}^\mu\mathfrak{C}^{p\mu1} & \ldots & \mathfrak{A}^\mu\mathfrak{C}^{p\mu\mu} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathfrak{C}^{p11}\mathfrak{A}^1 & \ldots & \mathfrak{C}^{p1\mu}\mathfrak{A}^\mu \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathfrak{C}^{p\mu1}\mathfrak{A}^1 & \ldots & \mathfrak{C}^{p\mu\mu}\mathfrak{A}^\mu \end{pmatrix}.$$

---

[8]) Die α_ϱ brauchen natürlich keineswegs alle voneinander verschieden zu sein.

Also ist

(33) $$\mathfrak{B}^{p\varrho\sigma} = \mathfrak{B}^{p\varrho\sigma}\mathfrak{A}^{\sigma} - \mathfrak{A}^{\varrho}\mathfrak{B}^{p\varrho\sigma} \qquad (\varrho, \sigma = 1, \ldots, \mu),$$

(34) $$\mathfrak{C}^{p\varrho\sigma} = \mathfrak{A}^{\varrho}\mathfrak{C}^{p\varrho\sigma} - \mathfrak{C}^{p\varrho\sigma}\mathfrak{A}^{\sigma} \qquad (\varrho, \sigma = 1, \ldots, \mu).$$

Geht man von den Matrizes zu ihren Elementen über, so besagen diese Formeln

$$\mathfrak{b}^{p\varrho\sigma}_{\varkappa\lambda} = \mathfrak{b}^{p\varrho\sigma}_{\varkappa\lambda}\alpha_{\sigma} + \mathfrak{b}^{p\varrho\sigma}_{\varkappa,\lambda+1} - \mathfrak{b}^{p\varrho\sigma}_{\varkappa-1,\lambda} - \alpha_{\varrho}\mathfrak{b}^{p\varrho\sigma}_{\varkappa\lambda},$$
$$\mathfrak{c}^{p\varrho\sigma}_{\varkappa\lambda} = \mathfrak{c}^{p\varrho\sigma}_{\varkappa-1,\lambda} + \alpha_{\varrho}\mathfrak{c}^{p\varrho\sigma}_{\varkappa\lambda} - \mathfrak{c}^{p\varrho\sigma}_{\varkappa\lambda}\alpha_{\sigma} - \mathfrak{c}^{p\varrho\sigma}_{\varkappa,\lambda+1},$$

oder etwas anders geschrieben:

(35) $$(1 - \alpha_{\sigma} + \alpha_{\varrho})\,\mathfrak{b}^{p\varrho\sigma}_{\varkappa\lambda} = \mathfrak{b}^{p\varrho\sigma}_{\varkappa,\lambda+1} - \mathfrak{b}^{p\varrho\sigma}_{\varkappa-1,\lambda} \quad (\varkappa = 1, \ldots, \nu_{\varrho};\ \lambda = 1, \ldots, \nu_{\sigma}),$$

(36) $$(1 - \alpha_{\varrho} + \alpha_{\sigma})\,\mathfrak{c}^{p\varrho\sigma}_{\varkappa\lambda} = \mathfrak{c}^{p\varrho\sigma}_{\varkappa-1,\lambda} - \mathfrak{c}^{p\varrho\sigma}_{\varkappa,\lambda+1} \quad (\varkappa = 1, \ldots, \nu_{\varrho};\ \lambda = 1, \ldots, \nu_{\sigma}).$$

Dabei sind auf der rechten Seite diejenigen $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$, bei denen der erste untere Index gleich 0 oder der zweite untere Index gleich $\nu_{\sigma} + 1$ ist, durch 0 zu ersetzen.

Wenn nun $\alpha_{\sigma} - \alpha_{\varrho} \neq 1$ ist, was insbesondere für $\sigma = \varrho$ zutrifft, so ist nach (35) zunächst $\mathfrak{b}^{p\varrho\sigma}_{1\nu_{\sigma}} = 0$, und dann folgt aus (35) weiter der Reihe nach

$$\begin{array}{llll} & \mathfrak{b}^{p\varrho\sigma}_{2\nu_{\sigma}} = 0, & \ldots, & \mathfrak{b}^{p\varrho\sigma}_{\nu_{\varrho}\nu_{\sigma}} = 0, \\ \mathfrak{b}^{p\varrho\sigma}_{1,\nu_{\sigma}-1} = 0, & \mathfrak{b}^{p\varrho\sigma}_{2,\nu_{\sigma}-1} = 0, & \ldots, & \mathfrak{b}^{p\varrho\sigma}_{\nu_{\varrho},\nu_{\sigma}-1} = 0, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \mathfrak{b}^{p\varrho\sigma}_{11} = 0, & \mathfrak{b}^{p\varrho\sigma}_{21} = 0, & \ldots, & \mathfrak{b}^{p\varrho\sigma}_{\nu_{\varrho}1} = 0. \end{array}$$

Das besagt aber

(37) $$\mathfrak{B}^{p\varrho\sigma} = 0 \quad \text{für} \quad \alpha_{\sigma} - \alpha_{\varrho} \neq 1.$$

Analog folgt aus (36)

(38) $$\mathfrak{C}^{p\varrho\sigma} = 0 \quad \text{für } \alpha_{\varrho} - \alpha_{\sigma} \neq 1.$$

Insbesondere sind also die in den Formeln (32) in der Diagonale stehenden Matrizes $\mathfrak{B}^{p\varrho\varrho}$ und $\mathfrak{C}^{p\varrho\varrho}$ lauter Nullmatrizes.

Nun kommen wir zum Fall $\alpha_{\sigma} - \alpha_{\varrho} = 1$. Die Formel (35) besagt dann

(39) $$\mathfrak{b}^{p\varrho\sigma}_{\varkappa,\lambda+1} = \mathfrak{b}^{p\varrho\sigma}_{\varkappa-1,\lambda} \quad \text{für } \alpha_{\sigma} - \alpha_{\varrho} = 1.$$

Daher hängt $\mathfrak{b}^{p\varrho\sigma}_{\varkappa\lambda}$ nur von der Differenz $\varkappa - \lambda$ ab, und man kann setzen:

(40) $$\mathfrak{b}^{p\varrho\sigma}_{\varkappa\lambda} = b^{p\varrho\sigma}_{\varkappa-\lambda} \quad \text{für } \alpha_{\sigma} - \alpha_{\varrho} = 1.$$

Nach (39) ist dann aber speziell

$$\mathfrak{b}^{p\varrho\sigma}_{1,\lambda+1} = 0 \quad \text{für } \lambda = 1, 2, \ldots, \nu_{\sigma} - 1,$$
$$\mathfrak{b}^{p\varrho\sigma}_{\varkappa-1,\nu_{\sigma}} = 0 \quad \text{für } \varkappa = 2, 3, \ldots, \nu_{\varrho}.$$

Nach (40) kann man dafür schreiben

$$b_{-\lambda}^{p\varrho\sigma} = 0 \quad \text{für } \lambda = 1, 2, \ldots, \nu_\sigma - 1,$$

$$b_{\varkappa-1-\nu_\sigma}^{p\varrho\sigma} = 0 \quad \text{für } \varkappa = 2, 3, \ldots, \nu_\varrho,$$

oder beide Formeln zusammenfassend:

(41) $$b_\iota^{p\varrho\sigma} = 0 \quad \text{für } 1 - \nu_\sigma \leqq \iota \leqq \mathrm{Max}\,(-1, \nu_\varrho - 1 - \nu_\sigma).$$

Die anderen $b_\iota^{p\varrho\sigma}$, also die für

$$\mathrm{Max}\,(-1, \nu_\varrho - 1 - \nu_\sigma) < \iota \leqq \nu_\varrho - 1,$$

bleiben willkürlich. Ihre Anzahl ist bei festem p, ϱ, σ gleich $\mathrm{Min}\,(\nu_\varrho, \nu_\sigma)$.

Analog schließt man aus (36)

$$c_{\varkappa\lambda}^{p\varrho\sigma} = c_{\varkappa-\lambda}^{p\varrho\sigma} \quad \text{für } \alpha_\varrho - \alpha_\sigma = 1,$$

wobei dann

$$c_\iota^{p\varrho\sigma} = 0 \quad \text{für } 1 - \nu_\sigma \leqq \iota \leqq \mathrm{Max}\,(-1, \nu_\varrho - 1 - \nu_\sigma)$$

ist, während die anderen $c_\iota^{p\varrho\sigma}$, also die für

$$\mathrm{Max}\,(-1, \nu_\varrho - 1 - \nu_\sigma) < \iota \leqq \nu_\varrho - 1$$

willkürlich bleiben; ihre Anzahl ist bei festem p, ϱ, σ gleich $\mathrm{Min}\,(\nu_\varrho, \nu_\sigma)$.

Somit gewinnen wir den

Satz 15. *Nimmt man* A^{11} *als Kästchenmatrix an:*

$$\mathsf{A}^{11} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}^1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \mathfrak{A}^\mu \end{pmatrix},$$

bezeichnet man mit α_ϱ *und* ν_ϱ *das Diagonalelement und die Zeilenzahl des Kästchens* $\mathfrak{A}_\varrho$ *und setzt dementsprechend*

$$\mathsf{A}^{p1} = \begin{pmatrix} \mathfrak{B}^{p11} & \ldots & \mathfrak{B}^{p1\mu} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathfrak{B}^{p\mu 1} & \ldots & \mathfrak{B}^{p\mu\mu} \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{A}^{1p} = \begin{pmatrix} \mathfrak{C}^{p11} & \ldots & \mathfrak{C}^{p1\mu} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathfrak{C}^{p\mu 1} & \ldots & \mathfrak{C}^{p\mu\mu} \end{pmatrix},$$

wo die $\mathfrak{B}^{p\varrho\sigma}$ *und* $\mathfrak{C}^{p\varrho\sigma}$ *Matrizes mit* ν_ϱ *Zeilen und* ν_σ *Spalten sind, so nehmen die Bedingungen II, III von Satz 13 die folgende Form an:*

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}^{p\varrho\sigma} &= 0 && \text{für } \alpha_\sigma - \alpha_\varrho \neq 1, \\ b_{\varkappa\lambda}^{p\varrho\sigma} &= b_{\varkappa-\lambda}^{p\varrho\sigma} && \text{für } \alpha_\sigma - \alpha_\varrho = 1, \\ \mathfrak{C}^{p\varrho\sigma} &= 0 && \text{für } \alpha_\varrho - \alpha_\sigma \neq 1, \\ c_{\varkappa\lambda}^{p\varrho\sigma} &= c_{\varkappa-\lambda}^{p\varrho\sigma} && \text{für } \alpha_\varrho - \alpha_\sigma = 1. \end{aligned}$$

Dabei ist

$$b_\iota^{p\varrho\sigma} = 0, \; c_\iota^{p\varrho\sigma} = 0 \quad \textit{für } 1 - \nu_\sigma \leqq \iota \leqq \mathrm{Max}\,(-1, \nu_\varrho - 1 - \nu_\sigma),$$

während die anderen $b_\iota^{p\varrho\sigma}$ *und* $c_\iota^{p\varrho\sigma}$ *willkürlich bleiben. Bei festem* p, ϱ, σ *mit* $\alpha_\sigma - \alpha_\varrho = 1$ *ist die Anzahl der willkürlich bleibenden* $b_\iota^{p\varrho\sigma}$ *gleich* $\mathrm{Min}\,(\nu_\varrho, \nu_\sigma)$ *und ebenso groß ist für* $\alpha_\varrho - \alpha_\sigma = 1$ *die Anzahl der willkürlich bleibenden* $c_\iota^{p\varrho\sigma}$.

Nun müssen nach Satz 13 die Matrizes A^{p1}, A^{1p} außer II und III noch weitere Bedingungen erfüllen. Diese ergeben für die zunächst noch willkürlich gebliebenen $b_\iota^{p\varrho\sigma}$, $c_\iota^{p\varrho\sigma}$ gewisse Einschränkungen, die wir für $\nu = 2$ und $\nu = 3$ in den folgenden Paragraphen vollständig diskutieren werden. Hier soll nur eine wichtige allgemeine Folgerung daraus gezogen werden. Setzt man[9])

$$\sum_{\alpha_\sigma - \alpha_\varrho = 1} \mathrm{Min}\,(\nu_\varrho, \nu_\sigma) = g$$

und ist $g < n - 1$, so gibt es $n - 1$ Zahlen $u_2, u_3, \ldots, u_n$, die nicht sämtlich verschwinden und so beschaffen sind, daß

$$\sum_{p=2}^{n} u_p\, \mathsf{A}^{p1} = 0$$

ist. Denn diese Gleichung bedeutet nach Satz 15 für die $n - 1$ Größen u_p ein System von nur g linearen homogenen Bedingungsgleichungen

$$\sum_{p=2}^{n} u_p\, b_\iota^{p\varrho\sigma} = 0,$$

ist also stets erfüllbar. Nunmehr folgt aber aus der Bedingung VII von Satz 13 für $r = q$, wenn man mit u_p multipliziert und nach p summiert,

$$0 = \sum_{p=2}^{n} u_p\, e_{pq}\, \mathsf{A}^{1q} = u_q\, \mathsf{A}^{1q}.$$

Da nun die u_q nicht sämtlich verschwinden, so ist wenigstens ein A^{1q} gleich 0, und aus Satz 14 folgt dann, daß $\Phi(X)$ die in Satz 5 angegebene Lösung ist. Also gilt

Satz 16. *Wenn für eine in der Umgebung von* $X = E$ *analytische Lösung der Gleichung* (5) *mit* $\Phi(E) = \mathsf{E}$ *die Matrix*

$$\mathsf{A}^{11} - \lambda\,\mathsf{E} = \left\{\frac{\partial\,\Phi(X)}{\partial x_{11}}\right\}_{X=E} - \lambda\,\mathsf{E}$$

die Elementarteiler

$$(\lambda - \alpha_1)^{\nu_1},\ (\lambda - \alpha_2)^{\nu_2},\ \ldots,\ (\lambda - \alpha_u)^{\nu_u}$$

hat und wenn

$$\sum_{\alpha_\sigma - \alpha_\varrho = 1} \mathrm{Min}\,(\nu_\varrho, \nu_\sigma) < n - 1$$

---

[9]) Wenn $\alpha_\sigma - \alpha_\varrho$ für kein Indexpaar ϱ, σ gleich 1 ist, so ist die folgende Summe leer, also $g = 0$ zu setzen.

ist, so ist $\Phi(X)$ *notwendig die bereits in Satz* 5 *angegebene Lösung*

$$\Phi(X) = |X|^{\mathsf{A}} = e^{\mathsf{A}\log|X|} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathsf{A}\log|X|)^k}{k!} \quad \text{mit} \quad \mathsf{A} = \mathsf{A}^{11}.$$

Bei der Formulierung dieses Satzes durfte die seither gemachte Voraussetzung, daß A^{11} eine Kästchenmatrix ist, weggelassen werden, weil sie überflüssig ist. Betrachtet man nämlich statt $\Phi(X)$ die äquivalente Lösung $\Gamma^{-1}\Phi(X)\Gamma$ und wählt Γ so, daß $\Gamma^{-1}\mathsf{A}^{11}\Gamma$ eine Kästchenmatrix ist (wobei natürlich $\Gamma^{-1}\mathsf{A}^{11}\Gamma - \lambda\,\mathsf{E}$ dieselben Elementarteiler wie $\mathsf{A}^{11} - \lambda\,\mathsf{E}$ hat), so ist nach dem Bewiesenen

$$\Gamma^{-1}\Phi(X)\,\Gamma = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\Gamma^{-1}\mathsf{A}^{11}\Gamma\log|X|)^k}{k!} = \Gamma^{-1}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathsf{A}^{11}\log|X|)^k}{k!}\,\Gamma,$$

also auch

$$\Phi(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathsf{A}^{11}\log|X|)^k}{k!},$$

wie behauptet.

Nun seien $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$ die charakteristischen Wurzeln der Matrix A^{11}, d. h. die Wurzeln der Gleichung $|\mathsf{A}^{11} - \lambda\,\mathsf{E}| = 0$. Sie decken sich natürlich mit den Zahlen

$$\underbrace{\alpha_1, \ldots, \alpha_1}_{\nu_1}, \quad \underbrace{\alpha_2, \ldots, \alpha_2}_{\nu_2}, \quad \ldots, \quad \underbrace{\alpha_\mu, \ldots, \alpha_\mu}_{\nu_\mu} \tag{42}$$

in der seitherigen Bezeichnung. Von den Differenzen $\beta_\lambda - \beta_\varkappa$ mögen genau h den Wert 1 haben. Nach dem im nächsten Paragraphen bewiesenen Hilfssatz ist

$$h \leqq \frac{\nu^2}{4}.$$

Für ein gewisses Indexpaar ϱ, σ sei $\alpha_\sigma - \alpha_\varrho = 1$. Da nun α_ϱ bzw. α_σ genau ν_ϱ- bzw. ν_σ-mal in der Reihe (42) aufgeschrieben ist, so liefert das Indexpaar ϱ, σ genau $\nu_\varrho \cdot \nu_\sigma$ Indexpaare $\varkappa, \lambda$, für die $\beta_\lambda - \beta_\varkappa = 1$ ist. Folglich ist

$$h = \sum_{\alpha_\sigma - \alpha_\varrho = 1} (\nu_\varrho \nu_\sigma),$$

also gewiß

$$\frac{\nu^2}{4} \geqq h \geqq \sum_{\alpha_\sigma - \alpha_\varrho = 1} \operatorname{Min}(\nu_\varrho, \nu_\sigma).$$

Aus Satz 16 folgt daher

Satz 17. *Für* $\frac{\nu^2}{4} < n - 1$ *hat die Gleichung* (5) *keine anderen in der Umgebung von* $X = E$ *analytischen Lösungen, für die* $\Phi(E) = \mathsf{E}$ *ist, als die in Satz* 5 *angegebenen.*

§ 7.

Beweis eines in § 6 benutzten Hilfssatzes.

Hilfssatz. *Für $k = 2, 3, 4, \ldots$ sei eine Funktion $f(k)$ folgendermaßen definiert: Es gibt k (vielleicht teilweise einander gleiche) Zahlen $\varrho_1, \ldots, \varrho_k$ derart, daß von den Differenzen $\varrho_m - \varrho_l$ genau $f(k)$ den Wert 1 haben: es gibt aber keine k Zahlen derart, daß mehr als $f(k)$ Differenzen den Wert 1 haben. Dann ist*[10] $f(k) = \left[\frac{k^2}{4}\right]$.

Beweis. Für $k = 2r$ betrachte man die k Zahlen

$$\varrho_1 = 0, \ldots, \varrho_r = 0, \quad \varrho_{r+1} = 1, \ldots, \varrho_{2r} = 1.$$

Hier gibt es r^2 Differenzen $\varrho_m - \varrho_l$, die gleich 1 sind, nämlich die für

$$l = 1, 2, \ldots, r; \quad m = r + 1, r + 2, \ldots, 2r.$$

Also ist $f(2r) \geqq r^2$. Für $k = 2r + 1$ betrachte man die k Zahlen

$$\varrho_1 = 0, \quad \ldots, \quad \varrho_r = 0, \quad \varrho_{r+1} = 1, \quad \ldots, \quad \varrho_{2r+1} = 1.$$

Hier gibt es $r(r+1)$ Differenzen $\varrho_m - \varrho_l$, die gleich 1 sind; also ist $f(2r+1) \geqq r(r+1)$. Beide Resultate zusammenfassend erhält man

$$\text{(I)} \qquad f(k) \geqq \left[\frac{k^2}{4}\right].$$

Nun seien die k Zahlen $\varrho_1, \ldots, \varrho_k$ so gewählt, daß $f(k)$ Differenzen gleich 1 sind. Für jede Zahl λ aus der Reihe $1, \ldots, k$ betrachte man die Menge M_λ derjenigen Indizes $\varkappa$, für welche $\varrho_\varkappa$ den Wert ϱ_λ oder $\varrho_\lambda + 2$ hat. Sei etwa M_1 die größte dieser Mengen oder *eine* der größten, falls es mehrere gleich große maximale gibt. Bei verschiedenen zulässigen Wahlen der Zahlen $\varrho_1, \ldots, \varrho_k$ kann die so definierte Menge M_1 vielleicht verschieden groß ausfallen. Wir denken uns $\varrho_1, \ldots, \varrho_k$ so gewählt, daß M_1 auch in dieser Hinsicht maximal ist. Für s ($\geqq 1$) Indizes $\varkappa$ aus M_1 sei $\varrho_\varkappa$ gleich ϱ_1, für t ($\geqq 0$) Indizes $\varkappa$ aus M_1 sei $\varrho_\varkappa$ gleich $\varrho_1 + 2$. Die k Zahlen $\varrho_\varkappa$ sind dann bei geeigneter Numerierung die folgenden:

$$\underbrace{\varrho_1, \ldots, \varrho_1,}_{s} \quad \underbrace{\varrho_1 + 2, \ldots, \varrho_1 + 2,}_{t} \quad \varrho_{s+t+1}, \ldots, \varrho_k$$

Wenn nun etwa $\varrho_{s+t+1} \neq \varrho_1 + 1$ ist, so ersetze man ϱ_{s+t+1} durch $\varrho_1 + 1$. Dadurch werden $s + t$ Differenzen gewonnen, die gleich 1 sind, andererseits aber auch höchstens $s + t$ solche Differenzen verloren, nämlich diejenigen, die mit ϱ_{s+t+1} und den etwaigen $\varrho_\varkappa$, die gleich $\varrho_{s+t+1} \pm 1$ sind und deren Anzahl, weil M_1 maximal gewählt war, höchstens gleich $s + t$ ist, gebildet waren. Durch diese Operation ist daher die Anzahl der fraglichen

[10]) Das Zeichen $[m]$ bedeutet hier die größte in m enthaltene ganze Zahl.

Differenzen nicht verkleinert worden, sie ist also immer noch gleich $f(k)$. Nun kann man ebenso $\varrho_{s+t+2}, \ldots, \varrho_k$ sämtlich durch $\varrho_1 + 1$ ersetzen; die Anzahl der fraglichen Differenzen bleibt, weil M_1 in doppelter Hinsicht maximal war, immer gleich $f(k)$. Man hat dann schließlich die folgende Menge gewonnen:

$$\underbrace{\varrho_1, \ldots, \varrho_1}_{s}, \quad \underbrace{\varrho_1 + 2, \ldots, \varrho_1 + 2}_{t}, \quad \underbrace{\varrho_1 + 1, \ldots, \varrho_1 + 1}_{k-s-t}.$$

Hier kann man augenscheinlich $(k - s - t)(s + t)$ Differenzen bilden, die gleich 1 sind. Daher ist

$$\text{(II)} \qquad f(k) = (k - s - t)(s + t) = \frac{k^2}{4} - \left(\frac{k}{2} - s - t\right)^2 \leqq \frac{k^2}{4}.$$

Mit (I) und (II) ist der Hilfssatz bewiesen.

§ 8.

Der Fall $\nu = 2$.

Vorbemerkung. Betrachtet man an Stelle der Lösung $\Phi(X)$ mit $\Phi(E) = \mathsf{E}$ die Lösung $\Psi(X) = |X|^\alpha \Phi(X)$ (Satz 4), so tritt an Stelle der Matrix A^{pq} die folgende:

$$\left\{\frac{\partial \Psi(X)}{\partial x_{pq}}\right\}_{X=E} = \left\{|X|^\alpha \frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_{pq}} + \alpha |X|^{\alpha-1} \frac{\partial |X|}{\partial x_{pq}} \Phi(X)\right\}_{X=E} = \mathsf{A}^{pq} + \alpha e_{pq} \mathsf{E}.$$

Daher bleibt A^{pq} für $p \neq q$ unverändert, während an Stelle von A^{pp} die Matrix $\mathsf{A}^{pp} + \alpha \mathsf{E}$ tritt, deren charakteristische Wurzeln um α größer sind als die von A^{pp}. Man kann daher insbesondere durch geeignete Wahl von α eine beliebige der charakteristischen Wurzeln von A^{11} zu 0 machen. Außerdem darf A^{11} natürlich als Kästchenmatrix angenommen werden.

Wir wollen jetzt für kleine Werte von ν die in der Umgebung von $X = E$ analytischen, aber in Satz 5 nicht enthaltenen irreduziblen Lösungen der Gleichung (5) vollständig ermitteln. Nach Satz 6 ist dabei $\Phi(E) = \mathsf{E}$.

Sei zunächst $\nu = 2$. Nach Satz 17 kommt dann, nachdem der Fall $n = 1$ bereits in § 4 erledigt ist, wobei sich keine in Satz 5 nicht enthaltene Lösung ergab (Satz 11), nur der Fall $n = 2$ in Frage, und für die charakteristischen Wurzeln α_1, α_2 der Matrix A^{11} muß nach Satz 16 bei passender Anordnung die Beziehung gelten: $\alpha_1 - \alpha_2 = 1$. Nach der Vorbemerkung kann man $\alpha_2 = 0$, also $\alpha_1 = 1$ annehmen, so daß A^{11} als Kästchenmatrix die folgende ist:

$$\mathsf{A}^{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nach Satz 15 ist dann weiter

$$\mathsf{A}^{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{A}^{12} = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hieraus folgt

$$\mathsf{A}^{21}\mathsf{A}^{12} - \mathsf{A}^{12}\mathsf{A}^{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -cb & 0 \\ 0 & bc \end{pmatrix},$$

und daher gehen die Bedingungen VI, VII von Satz 13 über in[11])

$$\begin{pmatrix} -cb & 0 \\ 0 & bc \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -cb & 0 \\ 0 & bc \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix},$$

das heißt $bcb = b$,

$$\begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -cb & 0 \\ 0 & bc \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -cb & 0 \\ 0 & bc \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

das heißt $cbc = c$.

Nun ist $b \neq 0$, $c \neq 0$, weil es sich andernfalls nach Satz 14 um die jetzt ausgeschlossene in Satz 5 angegebene Lösung handeln würde. Die letzten beiden Formeln sind daher gleichbedeutend und besagen: $bc = 1$. Infolgedessen ist

$$\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Phi(X)\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eine zu $\Phi(X)$ äquivalente Lösung, und wenn man zu dieser übergeht und sie wieder mit $\Phi(X)$ bezeichnet, dann gehen A^{21} und A^{12} über in

$$\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

während A^{11} unverändert bleibt. Man darf daher von vornherein

$$\mathsf{A}^{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{A}^{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{A}^{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

annehmen, und aus Formel I in Satz 13 folgt dann

$$\mathsf{A}^{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Differentialgleichungen (13) lauten daher

$$|X|\frac{\partial\Phi}{\partial x_{s1}} = \frac{\partial|X|}{\partial x_{s1}}\Phi\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\partial|X|}{\partial x_{s2}}\Phi\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$|X|\frac{\partial\Phi}{\partial x_{s2}} = \frac{\partial|X|}{\partial x_{s1}}\Phi\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\partial|X|}{\partial x_{s2}}\Phi\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

---

[11]) Die Formeln IV, V in Satz 13 kommen für $n = 2$ nicht in Betracht.

oder wenn man von den Matrizes zu ihren Elementen übergeht,

$$(43)\qquad |X|\frac{\partial \varphi_{\varrho 1}}{\partial x_{s1}} = \frac{\partial |X|}{\partial x_{s1}}\varphi_{\varrho 1} + \frac{\partial |X|}{\partial x_{s2}}\varphi_{\varrho 2}, \quad \frac{\partial \varphi_{\varrho 2}}{\partial x_{s1}} = 0,$$

$$(44)\qquad \frac{\partial \varphi_{\varrho 1}}{\partial x_{s2}} = 0, \quad |X|\frac{\partial \varphi_{\varrho 2}}{\partial x_{s2}} = \frac{\partial |X|}{\partial x_{s1}}\varphi_{\varrho 1} + \frac{\partial |X|}{\partial x_{s2}}\varphi_{\varrho 2}.$$

Nach der ersten Gleichung (44) und der zweiten Gleichung (43) ist

$$(45)\qquad \varphi_{\varrho 1} = \varphi_{\varrho 1}(x_{11}, x_{21}), \quad \varphi_{\varrho 2} = \varphi_{\varrho 2}(x_{12}, x_{22}).$$

Ferner folgt aus der ersten Gleichung (43) und der zweiten Gleichung (44)

$$(46)\qquad \sum_{s=1}^{2} x_{s1}\frac{\partial \varphi_{\varrho 1}}{\partial x_{s1}} = \varphi_{\varrho 1}, \quad \sum_{s=1}^{2} x_{s2}\frac{\partial \varphi_{\varrho 2}}{\partial x_{s2}} = \varphi_{\varrho 2},$$

$$(47)\qquad \frac{\partial \varphi_{\varrho 1}}{\partial x_{s1}} = \frac{\partial \varphi_{\varrho 2}}{\partial x_{s2}}.$$

In (47) ist wegen (45) die linke Seite frei von x_{12}, x_{22} und die rechte Seite frei von x_{11}, x_{21}; also ist

$$\frac{\partial \varphi_{\varrho 1}}{\partial x_{s1}} = \frac{\partial \varphi_{\varrho 2}}{\partial x_{s2}} = \alpha^{\varrho s} = \text{konst.}$$

Hieraus folgt durch Integration, weil $\varphi_{\varrho 1}$ und $\varphi_{\varrho 2}$ wegen (46) homogene Funktionen ihrer Argumente sind,

$$\varphi_{\varrho 1} = \alpha^{\varrho 1}x_{11} + \alpha^{\varrho 2}x_{21}, \quad \varphi_{\varrho 2} = \alpha^{\varrho 1}x_{12} + \alpha^{\varrho 2}x_{22}.$$

Da nun $\Phi(E) = \mathsf{E}$ sein soll, muß

$$\alpha^{11} = 1, \quad \alpha^{21} = 0, \quad \alpha^{12} = 0, \quad \alpha^{22} = 1$$

sein und man erhält

$$(48)\qquad \Phi(X) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = X.$$

Diese (übrigens ohne weiteres als Lösung erkennbare) Lösung von (5) ist irreduzibel. Denn wenn es eine konstante Matrix Γ gäbe derart, daß $\Gamma^{-1}X\Gamma$ eine Diagonalmatrix ist, so müßten in der Diagonale einerseits lineare Polynome der x_{pq} stehen, andererseits aber die charakteristischen Wurzeln der Matrix X, was sich widerspricht. Somit gewinnen wir den

Satz 18. *Im Fall $\nu = 2$ hat die Gleichung* (5) *in der Umgebung von $X = E$ analytische, in Satz* 5 *aber nicht enthaltene irreduzible Lösungen nur für $n = 2$; und zwar sind es dann die Lösungen*

$$\Phi(X) = |X|^{\alpha}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = |X|^{\alpha} X$$

und die damit äquivalenten.

§ 9.

Der Fall $\nu = 3$.

Sei jetzt $\nu = 3$. Im Fall eines dreifachen Elementarteilers von $\mathsf{A}^{11} - \lambda\mathsf{E}$ ist die Summe in Satz 16 leer, so daß die Lösung die in Satz 5 angegebene Form hat. Im Fall eines zweifachen Elementarteilers muß, damit die Summe nicht abermals leer ist, bei passender Numerierung der charakteristischen Wurzeln $\alpha_1 - \alpha_2 = 1$ sein, so daß man für die Kästchenmatrix A^{11} die folgenden beiden Möglichkeiten hat:

$$\begin{pmatrix} \alpha_2+1 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha_2+1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} \alpha_2+1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Im ersten bzw. zweiten Fall ist nach Satz 15

$$\mathsf{A}^{21} = \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&0 \\ b&0&0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}^{12} = \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&c \\ 0&0&0 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathsf{A}^{21} = \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&0 \\ b&0&0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}^{12} = \begin{pmatrix} 0&c&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}.$$

In beiden Fällen erweist sich die für $p = q = r = 2$ ausgerechnete linke Seite der Formel VI in Satz 13 als 0. Daher ist $\mathsf{A}^{21} = 0$, so daß nach Satz 14 die Lösung wieder die in Satz 5 angegebene Form hat.

Somit bleibt nur der Fall von drei einfachen Elementarteilern. Damit die Summe in Satz 16 nicht leer ist, muß es zwei charakteristische Wurzeln α_ϱ, α_σ geben, für die $\alpha_\sigma - \alpha_\varrho = 1$ ist. Nach der Vorbemerkung zu § 8 darf man eine beliebige charakteristische Wurzel gleich 0 annehmen und darf daher die Kästchenmatrix A^{11} in einer der folgenden vier Gestalten ansetzen, wobei wir jedesmal auch die Matrizes A^{p1}, A^{1p}, deren Gestalt durch Satz 15 bestimmt ist, angegeben haben:

A) $$\mathsf{A}^{11} = \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&\alpha \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}^{p1} = \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ b^p&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}^{1p} = \begin{pmatrix} 0&c^p&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix};$$

B) $$\mathsf{A}^{11} = \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}^{p1} = \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ b_1^p&0&0 \\ b_2^p&0&0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}^{1p} = \begin{pmatrix} 0&c_1^p&c_2^p \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix};$$

C) $$\mathsf{A}^{11} = \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}^{p1} = \begin{pmatrix} 0&b_2^p&b_3^p \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}^{1p} = \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ c_2^p&0&0 \\ c_3^p&0&0 \end{pmatrix};$$

D) $$\mathsf{A}^{11} = \begin{pmatrix} 2&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}^{p1} = \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ b_1^p&0&0 \\ 0&b_2^p&0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}^{1p} = \begin{pmatrix} 0&c_1^p&0 \\ 0&0&c_2^p \\ 0&0&0 \end{pmatrix}.$$

In den Fällen B), C), D) hat die Summe in Satz 16 den Wert 2, so daß nach diesem Satz nur die Fälle $n = 2$ und $n = 3$ interessieren. Im Fall A) ist $\alpha \neq -1, 0, 1, 2$ zu denken; die Summe in Satz 16 hat den Wert 1, so daß nur der Fall $n = 2$ interessiert. Aber auch bei den ausgeschlossenen Werten von α bleibt die folgende Überlegung gültig und sie wird erlauben, bei den Fällen B), C), D) einige Rechnung zu sparen.

Im Fall A) hat, weil $n = 2$ ist, auch p nur den einen Wert 2, so daß wir den Index p bei b und c weglassen können. Die Formel VI in Satz 13 ergibt dann bei Ausrechnung: $bcb = b$. Da aber $b \neq 0$, weil sonst $\mathsf{A}^{21} = 0$ wäre, so daß es sich nach Satz 14 um die jetzt ausgeschlossene in Satz 5 angegebene Lösung handeln würde, so ist $bc = 1$. Nun hat die Gleichung (5) gewiß die reduzible Lösung (vgl. Satz 18)

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & 0 \\ x_{21} & x_{22} & 0 \\ 0 & 0 & |X|^\alpha \end{pmatrix}$$

und daher auch die wegen $bc = 1$ damit äquivalente Lösung

$$\Phi^1(X) = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & 0 \\ x_{21} & x_{22} & 0 \\ 0 & 0 & |X|^\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & c x_{12} & 0 \\ b x_{21} & x_{22} & 0 \\ 0 & 0 & |X|^\alpha \end{pmatrix}.$$

Für diese sind aber A^{11}, A^{21}, A^{12} gerade die oben in A) angegebenen Matrizes, und da auch A^{22} dadurch nach Satz 13, Formel I eindeutig bestimmt ist, so sind die Differentialgleichungen für unsere gesuchte Funktion $\Phi(X)$ dieselben wie die für die Funktion $\Phi^1(X)$. Wegen Satz 10 ist daher $\Phi(X) = \Phi^1(X)$. Somit liefert der Fall A) keine irreduzible Lösung.

Wir kommen zum Fall B). Die (nur für $n = 3$ in Betracht kommenden) Bedingungen IV, V in Satz 13 sind dann von selbst erfüllt, da die ausgerechneten Matrixprodukte beiderseits gleich 0 sind. Die Bedingungen VI, VII liefern bei Ausrechnung

$$(49)\quad \begin{cases} b_1^p (c_1^q b_1^r + c_2^q b_2^r) + b_1^r (c_1^q b_1^p + c_2^q b_2^p) = e_{rq} b_1^p + e_{pq} b_1^r, \\ b_2^p (c_1^q b_1^r + c_2^q b_2^r) + b_2^r (c_1^q b_1^p + c_2^q b_2^p) = e_{rq} b_2^p + e_{pq} b_2^r, \\ (c_1^r b_1^p + c_2^r b_2^p)\, c_1^q + (c_1^q b_1^p + c_2^q b_2^p)\, c_1^r = e_{pr} c_1^q + e_{pq} c_1^r, \\ (c_1^r b_1^p + c_2^r b_2^p)\, c_2^q + (c_1^q b_1^p + c_2^q b_2^p)\, c_2^r = e_{pr} c_2^q + e_{pq} c_2^r. \end{cases}$$

Die ersten beiden Formeln ergeben speziell für $r = p$:

$$b_1^p (c_1^q b_1^p + c_2^q b_2^p - e_{pq}) = 0, \quad b_2^p (c_1^q b_1^p + c_2^q b_2^p - e_{pq}) = 0.$$

Nun sind b_1^p, b_2^p nicht beide gleich 0 (wieder wegen Satz 14). Daher muß

$$(50)\qquad c_1^q b_1^p + c_2^q b_2^p = e_{pq}$$

sein, und damit sind dann alle Formeln (49) von selbst erfüllt.

Wegen (50) ist $b_1^2 c_1^2 + b_2^2 c_2^2 = 1$. Daher ist zur gesuchten Matrix $\Phi(X)$ die folgende äquivalent:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_1^2 & c_2^2 \\ 0 & -b_2^2 & b_1^2 \end{pmatrix} \Phi(X) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b_1^2 & -c_2^2 \\ 0 & b_2^2 & c_1^2 \end{pmatrix}.$$

Wir wollen zu dieser übergehen und sie fortan mit $\Phi(X)$ bezeichnen. Dann gehen $\mathsf{A}^{11}, \mathsf{A}^{21}, \ldots$ wegen (50) über in

$$\mathsf{A}^{11} = \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}^{21} = \begin{pmatrix} 0&0&0\\1&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}^{12} = \begin{pmatrix} 0&1&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix},$$

$$\mathsf{A}^{31} = \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\\beta&0&0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}^{13} = \begin{pmatrix} 0&0&\gamma\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix} \qquad (\text{nur für } n = 3),$$

wobei

$$\beta = b_1^2 b_2^3 - b_1^3 b_2^2, \quad \gamma = c_1^2 c_2^3 - c_1^3 c_2^2$$

ist, also nach (50)

$$\beta\gamma = \begin{vmatrix} b_1^2 & b_2^2 \\ b_1^3 & b_2^3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1^2 & c_2^2 \\ c_1^3 & c_2^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Im Fall $n = 2$ fällt das unter die Formeln A) mit $\alpha = 0$, so daß nach dem Bewiesenen keine irreduzible Lösung herauskommt.

Im Fall $n = 3$ gehen wir abermals zu einer äquivalenten Lösung über, nämlich zu

$$\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&\gamma \end{pmatrix} \Phi(X) \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&\beta \end{pmatrix} \qquad (\text{äquivalent wegen } \gamma\beta = 1)$$

und bezeichnen diese fortan mit $\Phi(X)$. Dann gehen $\mathsf{A}^{11}, \mathsf{A}^{21}, \ldots$ über in

$$\mathsf{A}^{11} = \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}^{21} = \begin{pmatrix} 0&0&0\\1&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}^{12} = \begin{pmatrix} 0&1&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix},$$

$$\mathsf{A}^{31} = \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\1&0&0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}^{13} = \begin{pmatrix} 0&0&1\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix},$$

und die Formel I in Satz 13 liefert weiter

$$\mathsf{A}^{22} = \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&1&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}^{32} = \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&1&0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}^{23} = \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&1\\0&0&0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}^{33} = \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&1 \end{pmatrix}.$$

Die Differentialgleichungen (13) lauten daher

$$|X|\frac{\partial\Phi}{\partial x_{s1}}=\frac{\partial|X|}{\partial x_{s1}}\Phi\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+\frac{\partial|X|}{\partial x_{s2}}\Phi\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+\frac{\partial|X|}{\partial x_{s3}}\Phi\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},$$

$$|X|\frac{\partial\Phi}{\partial x_{s2}}=\frac{\partial|X|}{\partial x_{s1}}\Phi\cdot\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+\frac{\partial|X|}{\partial x_{s2}}\Phi\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}+\frac{\partial|X|}{\partial x_{s3}}\Phi\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},$$

$$|X|\frac{\partial\Phi}{\partial x_{s3}}=\frac{\partial|X|}{\partial x_{s1}}\Phi\cdot\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+\frac{\partial|X|}{\partial x_{s2}}\Phi\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}+\frac{\partial|X|}{\partial x_{s3}}\Phi\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

oder, indem man von den Matrizes zu ihren Elementen übergeht,

$$|X|\frac{\partial\varphi_{\varrho 1}}{\partial x_{s1}}=\sum_{q=1}^{3}\frac{\partial|X|}{\partial x_{sq}}\varphi_{\varrho q},\quad \frac{\partial\varphi_{\varrho 2}}{\partial x_{s1}}=0,\quad \frac{\partial\varphi_{\varrho 3}}{\partial x_{s1}}=0,$$

$$\frac{\partial\varphi_{\varrho 1}}{\partial x_{s2}}=0,\quad |X|\frac{\partial\varphi_{\varrho 2}}{\partial x_{s2}}=\sum_{q=1}^{3}\frac{\partial|X|}{\partial x_{sq}}\varphi_{\varrho q},\quad \frac{\partial\varphi_{\varrho 3}}{\partial x_{s2}}=0,$$

$$\frac{\partial\varphi_{\varrho 1}}{\partial x_{s3}}=0,\quad \frac{\partial\varphi_{\varrho 2}}{\partial x_{s3}}=0,\quad |X|\frac{\partial\varphi_{\varrho 3}}{\partial x_{s3}}=\sum_{q=1}^{3}\frac{\partial|X|}{\partial x_{sq}}\varphi_{\varrho q}.$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich sofort:

$$\text{(51)}\qquad \begin{cases}\varphi_{\varrho 1}=\varphi_{\varrho 1}(x_{11},x_{21},x_{31}),\\ \varphi_{\varrho 2}=\varphi_{\varrho 2}(x_{12},x_{22},x_{32}),\\ \varphi_{\varrho 3}=\varphi_{\varrho 3}(x_{13},x_{23},x_{33}),\end{cases}$$

$$\text{(52)}\qquad \sum_{s=1}^{3}x_{s1}\frac{\partial\varphi_{\varrho 1}}{\partial x_{s1}}=\varphi_{\varrho 1},\quad \sum_{s=1}^{3}x_{s2}\frac{\partial\varphi_{\varrho 2}}{\partial x_{s2}}=\varphi_{\varrho 2},\quad \sum_{s=1}^{3}x_{s3}\frac{\partial\varphi_{\varrho 3}}{\partial x_{s3}}=\varphi_{\varrho 3},$$

$$\text{(53)}\qquad \frac{\partial\varphi_{\varrho 1}}{\partial x_{s1}}=\frac{\partial\varphi_{\varrho 2}}{\partial x_{s2}}=\frac{\partial\varphi_{\varrho 3}}{\partial x_{s3}}.$$

Aus (53) und (51) folgt dann

$$\frac{\partial\varphi_{\varrho 1}}{\partial x_{s1}}=\frac{\partial\varphi_{\varrho 2}}{\partial x_{s2}}=\frac{\partial\varphi_{\varrho 3}}{\partial x_{s3}}=\alpha^{\varrho s}=\text{konst.}$$

Hieraus erhält man durch Integration, weil $\varphi_{\varrho 1}, \varphi_{\varrho 2}, \varphi_{\varrho 3}$ nach (52) homogene Funktionen ihrer Argumente sind,

$$\varphi_{\varrho\sigma}=\sum_{s=1}^{3}\alpha^{\varrho s}x_{s\sigma}.$$

Speziell für $X=E$ ergibt sich daraus, weil $\Phi(E)=\mathsf{E}$ sein soll,

$$\varepsilon_{\varrho\sigma}=\sum_{s=1}^{3}\alpha^{\varrho s}e_{s\sigma}=\alpha^{\varrho\sigma}.$$

Daher ist $\alpha^{\varrho\sigma} = \varepsilon_{\varrho\sigma} = e_{\varrho\sigma}$, und man erhält:

$$\Phi(X) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = X. \tag{54}$$

Diese Lösung ist irreduzibel. Denn wenn es eine konstante Matrix Γ gäbe derart, daß

$$\Gamma^{-1} X \Gamma = \begin{pmatrix} \psi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \psi_{22} & \psi_{23} \\ 0 & \psi_{32} & \psi_{33} \end{pmatrix}$$

ist, dann müßte ψ_{11} einerseits ein lineares Polynom der x_{pq} sein, andererseits aber auch eine charakteristische Wurzel der Matrix X, was sich widerspricht.

Wir kommen zum Fall C). Die Bedingungen IV, V in Satz 13 sind wieder von selbst erfüllt. Die Bedingungen VI, VII liefern bei Ausrechnung

$$\begin{cases} (b_2^p c_2^q + b_3^p c_3^q)\, b_2^r + (b_2^r c_2^q + b_3^r c_3^q)\, b_2^p = e_{rq} b_2^p + e_{pq} b_2^r, \\ (b_2^p c_2^q + b_3^p c_3^q)\, b_3^r + (b_2^r c_2^q + b_3^r c_3^q)\, b_3^p = e_{rq} b_3^p + e_{pq} b_3^r, \\ c_2^r (b_2^p c_2^q + b_3^p c_3^q) + c_2^q (b_2^p c_2^r + b_3^p c_3^r) = e_{pr} c_2^q + e_{pq} c_2^r, \\ c_3^r (b_2^p c_2^q + b_3^p c_3^q) + c_3^q (b_2^p c_2^r + b_3^p c_3^r) = e_{pr} c_3^q + e_{pq} c_3^r. \end{cases} \tag{55}$$

Die ersten beiden Formeln ergeben speziell für $r = p$

$$(b_2^p c_2^q + b_3^p c_3^q - e_{pq})\, b_2^p = 0, \quad (b_2^p c_2^q + b_3^p c_3^q - e_{pq})\, b_3^p = 0.$$

Nun sind b_2^p, b_3^p nicht beide gleich 0 (wieder wegen Satz 14). Daher muß

$$b_2^p c_2^q + b_3^p c_3^q = e_{pq} \tag{56}$$

sein, und damit sind dann alle Formeln (55) von selbst erfüllt.

Wegen (56) ist $b_2^2 c_2^2 + b_3^2 c_3^2 = 1$. Daher ist zur gesuchten Matrix $\Phi(X)$ die folgende äquivalent:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -b_2^2 & -b_3^2 \\ 0 & c_3^2 & -c_2^2 \end{pmatrix} \Phi(X) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -c_2^2 & b_3^2 \\ 0 & -c_3^2 & -b_2^2 \end{pmatrix}.$$

Wir wollen zu dieser übergehen und sie fortan mit $\Phi(X)$ bezeichnen. Dann gehen A^{11}, A^{21}, ... unter Berücksichtigung von (56) über in

$$A^{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{21} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\gamma & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{nur für } n = 3),$$

wobei

$$\beta = b_2^2 b_3^3 - b_2^3 b_3^2, \quad \gamma = c_2^2 c_3^3 - c_2^3 c_3^2$$

ist, also unter Benutzung von (56)

$$\beta\gamma = \begin{vmatrix} b_2^2 & b_3^2 \\ b_2^3 & b_3^3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_2^2 & c_3^2 \\ c_2^3 & c_3^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Im Fall $n = 2$ fällt das, wenn man durch Vertauschung der ersten zwei Zeilen und Spalten zu einer äquivalenten Lösung übergeht, unter die Formeln A) mit $\alpha = 1$, so daß wieder keine irreduzible Lösung herauskommt.

Im Fall $n = 3$ gehen wir ebenfalls zu einer äquivalenten Lösung über, nämlich zu

$$\begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Phi(X) \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(äquivalent wegen } \gamma\beta = 1)$$

und bezeichnen diese fortan mit $\Phi(X)$. Dann gehen $\mathsf{A}^{11}, \mathsf{A}^{21}, \ldots$ über in

$$\mathsf{A}^{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}^{21} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}^{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathsf{A}^{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}^{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

und die Formel I in Satz 13 liefert weiter

$$\mathsf{A}^{22} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}^{32} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}^{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}^{33} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Integration der Differentialgleichungen wollen wir diesmal durch einen Kunstgriff umgehen. Man sieht nämlich ohne weiteres (für beliebiges ν und n), daß mit $\Phi(X)$ stets auch $\Phi(|X| X'^{-1})$, wo X' die transponierte Matrix von X ist, eine irreduzible Lösung von (5) ist. Aus der in (54) gegebenen Lösung $\Phi(X) = X$ entsteht so die Lösung

$$(57)\quad \Phi^1(X) = |X| X'^{-1} = \begin{pmatrix} x_{22}x_{33} - x_{23}x_{32} & x_{23}x_{31} - x_{21}x_{33} & x_{21}x_{32} - x_{22}x_{31} \\ x_{32}x_{13} - x_{33}x_{12} & x_{33}x_{11} - x_{31}x_{13} & x_{31}x_{12} - x_{32}x_{11} \\ x_{12}x_{23} - x_{13}x_{22} & x_{13}x_{21} - x_{11}x_{23} & x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21} \end{pmatrix}.$$

Bildet man nun von dieser Lösung die Matrizes A^{pq}, so sind es genau die oben erhaltenen. Die Differentialgleichungen für die gesuchte Matrix $\Phi(X)$ sind daher dieselben wie für die Matrix $\Phi^1(X)$ und folglich ist nach Satz 10 $\Phi(X) = \Phi^1(X)$.

Schließlich kommen wir zum Fall D). Bei diesem liefern die Bedingungen VI, VII in Satz 13 bei Ausrechnung

$$(58)\qquad \begin{cases} (b_1^p c_1^q - b_2^p c_2^q)\, b_1^r + b_1^r c_1^q b_1^p = e_{rq} b_1^p + e_{pq} b_1^r, \\ b_2^p c_2^q b_2^r - b_2^r (b_1^p c_1^q - b_2^p c_2^q) = e_{rq} b_2^p + e_{pq} b_2^r, \\ c_1^r (b_1^p c_1^q - b_2^p c_2^q) + b_1^p c_1^q c_1^r = e_{pr} c_1^q + e_{pq} c_1^r, \\ c_2^r b_2^p c_2^q - (b_1^p c_1^q - b_2^p c_2^q) c_2^r = e_{pr} c_2^q + e_{pq} c_2^r. \end{cases}$$

Die ersten beiden Formeln für $r = p$ und die letzten beiden für $r = q$ besagen speziell

$$(59)\qquad \begin{cases} (2\, b_1^p c_1^q - b_2^p c_2^q - 2\, e_{pq})\, b_1^p = 0, \\ (2\, b_2^p c_2^q - b_1^p c_1^q - 2\, e_{pq})\, b_2^p = 0, \\ (2\, b_1^p c_1^q - b_2^p c_2^q - 2\, e_{pq})\, c_1^q = 0, \\ (2\, b_2^p c_2^q - b_1^p c_1^q - 2\, e_{pq})\, c_2^q = 0. \end{cases}$$

Nun dürfen b_1^p, b_2^p für kein p beide zugleich verschwinden, ebenso c_1^p, c_2^p (wieder wegen Satz 14). Daraus läßt sich folgern, daß nur der Fall $n = 2$ möglich ist. Denn angenommen, es sei $n = 3$. Wenn dann erstens $b_1^2 = 0$, $b_2^2 \neq 0$, so folgt aus der zweiten Gleichung (59) für $p = 2$, $q = 3$: $c_2^3 = 0$; sodann aus der zweiten Gleichung (58) für $p = 2$, $q = r = 3$: $0 = b_2^2$ im Widerspruch mit der Voraussetzung. Wenn zweitens $b_1^2 \neq 0$, $b_2^2 = 0$, so folgt aus der ersten Gleichung (59) für $p = 2$, $q = 3$: $c_1^3 = 0$; sodann aus der dritten Gleichung (58) für $q = 2$, $p = r = 3$: $0 = c_1^2$, wodurch sich ein Widerspruch gegen die erste Gleichung (59) für $p = q = 2$ ergibt. Wenn schließlich $b_1^2 \neq 0$, $b_2^2 \neq 0$, so folgt aus den ersten beiden Gleichungen (59) für $p = 2$, $q = 3$:

$$2\, b_1^2 c_1^3 - b_2^2 c_2^3 = 0, \quad 2\, b_2^2 c_2^3 - b_1^2 c_1^3 = 0,$$

also $c_1^3 = 0$, $c_2^3 = 0$, was ausgeschlossen war.

Somit bleibt in der Tat nur die Möglichkeit $n = 2$ übrig. Wir unterscheiden drei Fälle:

a) $\qquad b_1^2 = 0, \quad b_2^2 \neq 0,$

b) $\qquad b_1^2 \neq 0, \quad b_2^2 = 0,$

c) $\qquad b_1^2 \neq 0, \quad b_2^2 \neq 0.$

Im Fall a) folgt aus der zweiten und dritten Gleichung (59)

$$b_2^2 c_2^2 = 1, \ (b_2^2 c_2^2 + 2)\, c_1^2 = 0; \quad \text{also } c_1^2 = 0.$$

Daher läuft dieser Fall, wenn man dadurch zu einer äquivalenten Lösung übergeht, daß man die erste Zeile und Spalte durch zyklische Vertauschung zur letzten macht, auf den Fall A) mit $\alpha = 2$ hinaus. Er liefert also keine irreduzible Lösung.

Im Fall b) folgt aus der ersten und letzten Gleichung (59)

$$b_1^2 c_1^2 = 1, \ (b_1^2 c_1^2 + 2)\, c_2^2 = 0, \quad \text{also } c_2^2 = 0.$$

Daher läuft dieser Fall, wenn man zur Lösung $|X|^{-1}\,\Phi(X)$ übergeht, wodurch sich die Diagonalelemente von A^{11} um 1 vermindern, während A^{21} und A^{12} unverändert bleiben (siehe Vorbemerkung zu § 8), auf den Fall A) mit $\alpha = -1$ hinaus; er liefert also wieder keine irreduzible Lösung.

Somit bleibt nur der Fall c). Die ersten beiden Gleichungen (59) besagen dann

$$2\, b_1^2 c_1^2 - b_2^2 c_2^2 - 2 = 0, \quad 2\, b_2^2 c_2^2 - b_1^2 c_1^2 - 2 = 0, \qquad \text{also } b_1^2 c_1^2 = b_2^2 c_2^2 = 2,$$

wodurch die letzten beiden von selbst erfüllt sind. Wir gehen nun von $\Phi(X)$ zu der äquivalenten Lösung

$$\begin{pmatrix} b_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c_2^2 \end{pmatrix} \Phi(X) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} c_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} b_2^2 \end{pmatrix}$$

über und bezeichnen diese fortan mit $\Phi(X)$. Dann gehen $\mathsf{A}^{11}, \ldots$ über in

$$\mathsf{A}^{11} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}^{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}^{12} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

und die Formel I in Satz 13 liefert noch

$$\mathsf{A}^{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Differentialgleichungen (13) lauten daher

$$|X| \frac{\partial \Phi}{\partial x_{s1}} = \frac{\partial |X|}{\partial x_{s1}} \Phi \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\partial |X|}{\partial x_{s2}} \Phi \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$|X| \frac{\partial \Phi}{\partial x_{s2}} = \frac{\partial |X|}{\partial x_{s1}} \Phi \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\partial |X|}{\partial x_{s2}} \Phi \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hieraus folgt sogleich

$$(60)\qquad \sum_{s=1}^{2}\left(x_{s1}\frac{\partial \Phi}{\partial x_{s1}} + x_{s2}\frac{\partial \Phi}{\partial x_{s2}}\right) = \Phi \cdot 2\,\mathsf{E} = 2\,\Phi.$$

Außerdem ergeben sich, wenn man von den Matrizes zu ihren Elementen übergeht, u. a. die Formeln

$$(61)\qquad \frac{\partial \varphi_{\varrho 1}}{\partial x_{s2}} = 0, \qquad \frac{\partial \varphi_{\varrho 3}}{\partial x_{s1}} = 0,$$

$$(62)\qquad \frac{\partial \varphi_{\varrho 1}}{\partial x_{s1}} = \frac{\partial \varphi_{\varrho 2}}{\partial x_{s2}}, \qquad \frac{\partial \varphi_{\varrho 2}}{\partial x_{s1}} = \frac{\partial \varphi_{\varrho 3}}{\partial x_{s2}}.$$

Wegen (61) ist

$$\varphi_{\varrho 1} = \varphi_{\varrho 1}(x_{11}, x_{21}), \quad \varphi_{\varrho 3} = \varphi_{\varrho 3}(x_{12}, x_{22})$$

und sodann wegen (62)

$$\frac{\partial^2 \varphi_{\varrho 1}}{\partial x_{s1}\,\partial x_{t1}} = \frac{\partial^2 \varphi_{\varrho 2}}{\partial x_{s2}\,\partial x_{t1}} = \frac{\partial^2 \varphi_{\varrho 3}}{\partial x_{s2}\,\partial x_{t2}} = 2\,\alpha_\varrho^{st} = 2\,\alpha_\varrho^{ts} = \text{konst.}$$

Hieraus erhält man durch Integration, weil $\varphi_{\varrho 1}, \varphi_{\varrho 2}, \varphi_{\varrho 3}$ wegen (60) homogene Funktionen ihrer Argumente sind,

$$\varphi_{\varrho 1} = \sum_{s=1}^{2}\sum_{t=1}^{2} \alpha_\varrho^{st}\, x_{s1}\, x_{t1},$$

$$\varphi_{\varrho 2} = 2\sum_{s=1}^{2}\sum_{t=1}^{2} \alpha_\varrho^{st}\, x_{s2}\, x_{t1},$$

$$\varphi_{\varrho 3} = \sum_{s=1}^{2}\sum_{t=1}^{2} \alpha_\varrho^{st}\, x_{s2}\, x_{t2}.$$

Da nun $\Phi(E) = \mathsf{E}$ sein soll, ergibt sich speziell für $X = E$

$$\varepsilon_{\varrho 1} = \sum_{s=1}^{2}\sum_{t=1}^{2} \alpha_\varrho^{st}\, e_{s1}\, e_{t1} = \alpha_\varrho^{11},$$

$$\varepsilon_{\varrho 2} = 2\sum_{s=1}^{2}\sum_{t=1}^{2} \alpha_\varrho^{st}\, e_{s2}\, e_{t1} = 2\,\alpha_\varrho^{21} = 2\,\alpha_\varrho^{12},$$

$$\varepsilon_{\varrho 3} = \sum_{s=1}^{2}\sum_{t=1}^{2} \alpha_\varrho^{st}\, e_{s2}\, e_{t2} = \alpha_\varrho^{22}.$$

Dadurch sind die Konstanten α_ϱ^{st} bestimmt, und man erhält

$$\Phi(X) = \begin{pmatrix} x_{11}^2 & 2\,x_{11}x_{12} & x_{12}^2 \\ x_{11}x_{21} & x_{11}x_{22} + x_{12}x_{21} & x_{12}x_{22} \\ x_{21}^2 & 2\,x_{21}x_{22} & x_{22}^2 \end{pmatrix}.$$

Diese Lösung ist wieder irreduzibel, wie man genau wie in den früheren Fällen erkennt.

Die verschiedenen Resultate dieses Paragraphen fassen wir zusammen in

Satz 19. *Im Fall $v = 3$ hat die Gleichung (5) in der Umgebung von $X = E$ analytische, in Satz 5 aber nicht enthaltene irreduzible Lösungen nur, wenn $n = 2$ oder $n = 3$ ist. Für $n = 2$ sind es die Lösungen*

$$|X|^{\alpha}\begin{pmatrix} x_{11}^2 & 2\,x_{11}x_{12} & x_{12}^2 \\ x_{11}x_{21} & x_{11}x_{22}+x_{12}x_{21} & x_{12}x_{22} \\ x_{21}^2 & 2\,x_{21}x_{22} & x_{22}^2 \end{pmatrix}$$

und die damit äquivalenten. Für $n = 3$ sind es die Lösungen

$$|X|^{\alpha}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = |X|^{\alpha} X,$$

$$|X|^{\alpha}\begin{pmatrix} x_{22}x_{33}-x_{23}x_{32} & x_{23}x_{31}-x_{21}x_{33} & x_{21}x_{32}-x_{22}x_{31} \\ x_{32}x_{13}-x_{33}x_{12} & x_{33}x_{11}-x_{31}x_{13} & x_{31}x_{12}-x_{32}x_{11} \\ x_{12}x_{23}-x_{13}x_{22} & x_{13}x_{21}-x_{11}x_{23} & x_{11}x_{22}-x_{12}x_{21} \end{pmatrix} = |X|^{\alpha+1} X'^{-1}$$

und die damit äquivalenten.

(Eingegangen am 29. Oktober 1941.)