

Werk

Titel: Mathematische Zeitschrift

Ort: Berlin

Jahr: 1942

Kollektion: Mathematica

Werk Id: PPN266833020_0048

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN266833020_0048 | LOG_0019

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Zur asymptotischen Integration von Differentialgleichungen.

Herrn KONRAD KNOPP

zum 60. Geburtstag am 22. Juli 1942 gewidmet.

Von

H. Seifert in Braunschweig.

Eine Differentialgleichung

$$y'' + p(x)y' - (\varrho^2 q(x) + r(x))y = 0$$

pflegt man für große Werte von ϱ angenähert mit dem Ansatz

$$y = e^{\varrho g(x)} \left(h(x) + \frac{1}{\varrho} h_1(x) + \frac{1}{\varrho^2} h_2(x) + \cdots + \frac{1}{\varrho^m} h_m(x) \right)$$

zu integrieren. Die Differentialgleichung läßt sich durch geeignete Wahl der Funktionen g, h, h_1, \dots, h_m genau bis auf ein Glied der Größenordnung $\varrho^{-m} \cdot e^{\varrho g(x)}$ erfüllen, wofür man auch sagt, asymptotisch integrieren. — Je nach dem Vorzeichen von q haben ihre Lösungen ganz verschiedenen Charakter: In Intervallen, in denen $q > 0$ ist, verlaufen sie aperiodisch, in solchen, in denen $q < 0$ ist, oszillatorisch. Wo zwei solche Intervalle zusammenstoßen, liegt eine singuläre Stelle der asymptotischen Lösungen, während die von der asymptotischen Lösung approximierte exakte Lösung im allgemeinen regulär ist. Ein und dieselbe Lösung der Differentialgleichung wird also auf beiden Seiten der Nullstelle von $q(x)$ durch ganz verschiedenartige Funktionen asymptotisch dargestellt, und es erhebt sich die Frage, welcher Zusammenhang zwischen diesen Funktionen besteht.

Diese Frage ist von H. JEFFREYS [6], S. GOLDSTEIN [7] und R. E. LANGER [8] behandelt worden. Die beiden ersten Autoren benutzen eine Methode, die mir mathematisch nicht zureichend zu sein scheint. Sie besteht darin, daß man in der gegebenen Differentialgleichung, in der $p(x) = r(x) \equiv 0$ angenommen wird, die Funktion $q(x)$ in der Umgebung ihrer Nullstelle durch das Anfangsglied ihrer Taylor-Entwicklung ersetzt. Die so abgeänderte Differentialgleichung läßt sich durch BESSELSche Funktionen integrieren, und es wird behauptet, daß die bekannten asymptotischen Formeln für die BESSELschen Funktionen den gewünschten Zusammenhang zwischen den asymptotischen Lösungen der gegebenen Differentialgleichung liefern.

R. E. LANGER legt die Lösung der Differentialgleichung durch Funktionswert und Ableitung an einer Nullstelle von q fest und gibt auf beiden Seiten der Nullstelle asymptotische Darstellungen dieser Lösung.

ferner

$$(5) \quad h = \frac{c}{\sqrt{q}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \int p \, dx} \quad (c \neq 0).$$

h verschwindet also nirgends in \mathfrak{G} .

Die durch die Integration in g, h, h_1, h_2, \dots eingehenden Integrationskonstanten und die in \mathfrak{G} zu benutzenden Zweige dieser mehrdeutigen Funktionen seien ein für allemal fest gewählt. Da $q \neq 0$ in \mathfrak{G} ist, so folgt aus den Differentialgleichungen (3), daß g, h, h_1, \dots in \mathfrak{G} überall regulär analytisch sind. Die so bestimmte Reihe (2) ist bekanntlich im allgemeinen für keinen Wert von ϱ konvergent.

Wir betrachten nun eine Partialsumme von (2)

$$(6) \quad \eta(x, \varrho) = e^{\varrho g} (h + \varrho^{-1} h_1 + \varrho^{-2} h_2 + \dots + \varrho^{-m} h_m) \quad (m \geq 0).$$

Da wir den Index m ein für allemal festhalten, bringen wir ihn in dem Symbol $\eta(x, \varrho)$ nicht besonders zum Ausdruck.

Wir sagen, daß eine Lösung $y(x, \varrho)$ von (1) in einem Punkte x_0 von \mathfrak{G} asymptotisch durch $\eta(x, \varrho)$ dargestellt wird, wenn für Funktionswert und Ableitung Gleichungen von der Form bestehen¹⁾

$$(7) \quad \begin{aligned} y(x_0, \varrho) &= \eta(x_0, \varrho) + \varrho^{-m-1} \cdot e^{\varrho g(x_0)} \cdot O(1), \\ y'(x_0, \varrho) &= \eta'(x_0, \varrho) + \varrho^{-m} \cdot e^{\varrho g(x_0)} \cdot O(1); \end{aligned}$$

die Striche an y und η bezeichnen Ableitungen nach x . m ist die in (6) definierte ganze Zahl. Es wird also nur verlangt, daß die Gleichungen (7) für die m -te Partialsumme (6) und nicht etwa notwendig für sämtliche Partialsummen von (2) gelten. Z. B. kann man diejenige Lösung $y(x, \varrho)$ von (1) betrachten, die durch die „Anfangswerte“ $y(x_0, \varrho) = \eta(x_0, \varrho)$, $y'(x_0, \varrho) = \eta'(x_0, \varrho)$ festgelegt ist. In diesem Falle sind die beiden Funktionen $O(1)$ identisch 0.

Wenn $y(x, \varrho)$ im Punkte x_0 asymptotisch durch $\eta(x, \varrho)$ dargestellt wird, so fragt es sich, in welchen anderen Punkten das auch noch der Fall ist. Darüber gilt der

Satz I. Wenn $y(x, \varrho)$ im Punkte x_0 durch $\eta(x, \varrho)$ asymptotisch dargestellt wird, so auch in jedem Punkte x_1 von \mathfrak{G} , den man von x_0 aus auf einer

¹⁾ Dabei bezeichnen wir wie üblich mit $O(1)$ jede Funktion von ϱ , die beschränkt bleibt für alle genügend großen ϱ . Es ist also $f(\varrho) = O(1)$, wenn zwei positive Konstanten ϱ_0 und H existieren, so daß $|f(\varrho)| < H$ für alle $\varrho > \varrho_0$.

in \mathfrak{G} verlaufenden rektifizierbaren Kurve C erreichen kann, längs der der Realteil $\Re(g)$ von g nirgends abnimmt. Genauer gelten Relationen der folgenden Art

$$(8) \quad \begin{aligned} y(x, \varrho) &= \eta(x, \varrho) + \varrho^{-m-1} \cdot e^{\varrho g(x)} \cdot O(1), \\ y'(x, \varrho) &= \eta'(x, \varrho) + \varrho^{-m} \cdot e^{\varrho g(x)} \cdot O(1) \end{aligned}$$

gleichmäßig²⁾ für alle x von C .

Insbesondere gilt hiernach die asymptotische Darstellung in allen Punkten x_1 der durch x_0 hindurchgehenden Kurve $\Re(g) = \text{const}$. Da $g' = \sqrt{q}$ in \mathfrak{G} von Null verschieden ist, so geht durch jeden Punkt von \mathfrak{G} genau eine Kurve $\Re(g) = \text{const}$ hindurch.

Wenn x_1 von x_0 aus nicht auf einem Wege der im Satz genannten Art erreichbar ist, so läßt sich von vornherein nicht entscheiden, ob y in x_1 durch η asymptotisch dargestellt wird oder nicht. Da es auf Grund von Satz I in jedem hinreichend kleinen Teilgebiet von G eine Lösung $y(x, \varrho)$ der Differentialgleichung (1) gibt, die in diesem Teilgebiete asymptotisch durch $\eta(x, \varrho)$ dargestellt wird, so ist es sinnvoll, $\eta(x, \varrho)$ als eine *asymptotische Lösung* von (1) zu bezeichnen.

Der Beweis von Satz I benutzt einen Kunstgriff von LIOUVILLE [1], der von BIRKHOFF [3] und BLUMENTHAL [4] für Beweise ähnlicher Sätze ausgebaut worden ist. — Wir betrachten zunächst den Fall $m = 0$. Als dann lautet die asymptotische Lösung

$$\eta(x, \varrho) = h(x) e^{\varrho g(x)}.$$

$y(x, \varrho)$ sei diejenige Lösung von (1), die im Punkte x_0 dieselben Anfangswerte hat wie η ; d. h. es sei

$$(9) \quad y(x_0, \varrho) = h(x_0) e^{\varrho g(x_0)}; \quad y'(x_0, \varrho) = (\varrho h(x_0) g'(x_0) + h'(x_0)) e^{\varrho g(x_0)}.$$

Wir führen außer der gegebenen Differentialgleichung $L(y) = 0$ die Differentialgleichung

$$(10) \quad \Delta(\eta) \equiv \eta'' + p\eta' - \left[\varrho^2 q + \frac{h'p}{h} + \frac{h''}{h} \right] \eta = 0$$

ein, die dadurch charakterisiert ist, daß

$$h e^{\varrho g} \quad \text{und} \quad h e^{-\varrho g}$$

ein System linear unabhängiger Lösungen sind. Die Differenz

$$\eta(x, \varrho) = y(x, \varrho) - \eta(x, \varrho)$$

²⁾ Wir sagen, eine Relation $f(x, \varrho) = w(x, \varrho) \cdot O(1)$ gelte *gleichmäßig* für alle Punkte x einer gewissen Menge \mathfrak{M} , wenn die darin auftretende Funktion $O(1) = \varphi(x, \varrho)$ gleichmäßig beschränkt ist für alle x auf \mathfrak{M} und alle genügend großen ϱ ; genauer: Es gibt zwei positive Zahlen H und ϱ_0 , so daß $|\varphi(x, \varrho)| < H$ für alle x auf \mathfrak{M} und alle $\varrho > \varrho_0$.

genügt dann der Differentialgleichung

$$(11) \quad A(\eta) = \left(r - \frac{h'}{h} p - \frac{h''}{h} \right) y,$$

wie man durch Subtraktion von (1) und (10) erkennt. Da von der zugehörigen homogenen Differentialgleichung ein fundamentales Lösungssystem, nämlich $h e^{\varrho g}$ und $h e^{-\varrho g}$ bekannt ist, ergibt sich für die Lösung von (11) nach der Methode der Variation der Konstanten, wenn man zur Abkürzung

$$s(x) = \frac{1}{g'} \left(r - \frac{h'}{h} p - \frac{h''}{h} \right)$$

setzt,

$$(12) \quad \eta(x, \varrho) = \frac{1}{2\varrho} \left\{ h(x) e^{\varrho g(x)} \left[\int_{x_0}^x s(\xi) y(\xi, \varrho) h^{-1}(\xi) e^{-\varrho g(\xi)} d\xi + c_1(\varrho) \right] - \right. \\ \left. - h(x) e^{-\varrho g(x)} \left[\int_{x_0}^x s(\xi) y(\xi, \varrho) h^{-1}(\xi) e^{\varrho g(\xi)} d\xi + c_2(\varrho) \right] \right\}.$$

Die Ableitung hiervon lautet

$$(12') \quad \eta'(x, \varrho) = \frac{1}{2\varrho} \left\{ (\varrho h(x) g'(x) + h'(x)) e^{\varrho g(x)} \left[\int_{x_0}^x s y h^{-1} e^{-\varrho g} d\xi + c_1(\varrho) \right] - \right. \\ \left. - (-\varrho h(x) g'(x) + h'(x)) e^{-\varrho g(x)} \left[\int_{x_0}^x s y h^{-1} e^{\varrho g} d\xi + c_2(\varrho) \right] \right\}.$$

Zur Bestimmung der Integrationskonstanten c_1 und c_2 setzen wir in diesen Gleichungen $x = x_0$. Da nach (9)

$$\eta(x_0, \varrho) = \eta'(x_0, \varrho) = 0$$

ist, so folgt

$$(13) \quad c_1(\varrho) = c_2(\varrho) = 0.$$

Wenn wir in (12) für die linke Seite wieder $y - \eta$ schreiben und die Gleichung mit $h^{-1} e^{-\varrho g}$ multiplizieren, so ergibt sich

$$(14) \quad y(x) h^{-1}(x) e^{-\varrho g(x)} \\ = 1 + \frac{1}{2\varrho} \left\{ \int_{x_0}^x s y h^{-1} e^{-\varrho g(\xi)} d\xi - e^{-2\varrho g(x)} \int_{x_0}^x s y h^{-1} e^{-\varrho g(\xi)} \cdot e^{2\varrho g(\xi)} d\xi \right\}.$$

Es sei nun $M = M(\varrho)$ das Maximum, das $|y(x) h^{-1}(x) e^{-\varrho g(x)}|$ auf dem von x_0 nach x_1 führenden Wege C des Satzes I annimmt, und zwar möge es im Punkte X angenommen werden. Bildet man (14) insbesondere für $x = X$, indem man die Integrale von x_0 bis X längs C nimmt, so folgt, weil

$$|e^{2\varrho g(\xi)}| = e^{2\varrho \Re(g(\xi))}$$

nach der Annahme des Satzes I im Endpunkte X des Integrationsweges sein Maximum annimmt,

$$M \leq 1 + \frac{1}{2\varrho} \left\{ M \int_{x_0}^X |s(\xi)| d\xi + M \int_{x_0}^X |s(\xi)| d\xi \right\}$$

und daher

$$M(\varrho) = O(1).$$

Geht man mit dieser Abschätzung von M nochmals in die Gleichung (12) hinein, so ergibt sich

$$(15) \quad y(x, \varrho) = h(x) e^{\varrho g(x)} + \vartheta(x, \varrho) \cdot \varrho^{-1} \cdot e^{\varrho g(x)}$$

mit

$$\begin{aligned} |\vartheta(x, \varrho)| &= \frac{1}{2} |h(x)| \cdot \left| \int_{x_0}^x s(\xi) y(\xi, \varrho) h^{-1}(\xi) e^{-\varrho g(\xi)} d\xi - \right. \\ &\quad \left. - e^{-2\varrho g(x)} \cdot \int_{x_0}^x s(\xi) y(\xi, \varrho) h^{-1}(\xi) e^{-\varrho g(\xi)} \cdot e^{2\varrho g(\xi)} d\xi \right| \\ &\leq \frac{1}{2} |h(x)| 2M \int_{x_0}^{x_1} |s(\xi)| d\xi. \end{aligned}$$

Es gilt also $\vartheta(x, \varrho) = O(1)$ gleichmäßig für alle x auf C .

Eine der Formel (15) entsprechende Formel gilt für die Ableitung $y'(x, \varrho)$. Wir gehen auf (12') zurück und finden

$$(16) \quad y'(x, \varrho) = (h(x) e^{\varrho g(x)})' + \tau(x, \varrho) e^{\varrho g(x)}$$

mit

$$\begin{aligned} |\tau(x, \varrho)| &= \frac{1}{2} \varrho^{-1} \left| (h'(x) + \varrho h(x) g'(x)) \int_{x_0}^x s(\xi) y(\xi, \varrho) h^{-1}(\xi) e^{-\varrho g(\xi)} d\xi - \right. \\ &\quad \left. - (h'(x) - \varrho h(x) g'(x)) e^{-2\varrho g(x)} \cdot \int_{x_0}^x s(\xi) y(\xi, \varrho) h^{-1}(\xi) e^{-\varrho g(\xi)} \cdot e^{2\varrho g(\xi)} d\xi \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \varrho^{-1} \left\{ |h'(x) + \varrho h(x) g'(x)| M \int_{x_0}^{x_1} |s(\xi)| d\xi + \right. \\ &\quad \left. + |h'(x) - \varrho h(x) g'(x)| M \int_{x_0}^{x_1} |s(\xi)| d\xi \right\}. \end{aligned}$$

Somit gilt $\tau(x, \varrho) = O(1)$ gleichmäßig für alle x auf C .

Nach dem bisher Bewiesenen gibt es eine Lösung $y = y^+(x, \varrho)$ unserer Differentialgleichung (1), die längs C durch $h e^{\varrho g}$ asymptotisch dargestellt wird, d. h. es gilt gleichmäßig in x auf C

$$(17) \quad \begin{aligned} y^+(x, \varrho) &= h(x) e^{\varrho g(x)} + \varrho^{-1} e^{\varrho g(x)} \cdot O(1), \\ y^{+'}(x, \varrho) &= (h'(x) + \varrho h(x) g'(x)) e^{\varrho g(x)} + e^{\varrho g(x)} \cdot O(1). \end{aligned}$$

Hätten wir in $g = \int \sqrt{q} dx$ das andere Vorzeichen der Wurzel gewählt, so wären wir durch Betrachtung der rückwärts, von x_1 nach x_0 durchlaufenen Kurve C zu einer Lösung $y^-(x, \varrho)$ der Differentialgleichung (1) gelangt, die längs C durch $h e^{-\varrho g}$ asymptotisch dargestellt wird:

$$(18) \quad \begin{aligned} y^-(x, \varrho) &= h(x) e^{-\varrho g(x)} + \varrho^{-1} e^{-\varrho g(x)} \cdot O(1), \\ y'^-(x, \varrho) &= (h'(x) - \varrho h(x) g'(x)) e^{-\varrho g(x)} + e^{-\varrho g(x)} \cdot O(1). \end{aligned}$$

Es sei nun η die Funktion (6)

$$\eta(x, \varrho) = e^{\varrho g(x)} (h(x) + \varrho^{-1} h_1(x) + \dots + \varrho^{-m} h_m(x)).$$

η genügt nicht der Differentialgleichung $L(\eta) = 0$, sondern es wird nach (3)

$$(19) \quad L(\eta) = -\varrho^{-m} e^{\varrho g(x)} \cdot F(x)$$

mit

$$F(x) = - (h_m'' + p h_m' - r h_m).$$

$y(x, \varrho)$ sei jetzt eine Lösung der Differentialgleichung (1), die durch η im Punkte x_0 asymptotisch dargestellt wird:

$$(20) \quad \begin{aligned} y(x_0, \varrho) &= \eta(x_0, \varrho) + \varrho^{-m-1} \cdot e^{\varrho g(x_0)} \cdot O(1), \\ y'(x_0, \varrho) &= \eta'(x_0, \varrho) + \varrho^{-m} \cdot e^{\varrho g(x_0)} \cdot O(1). \end{aligned}$$

Setzt man wieder

$$\eta(x, \varrho) = y(x, \varrho) - \eta(x, \varrho),$$

so ergibt Subtraktion von $L(y) = 0$ und (19)

$$(21) \quad L(\eta) = \varrho^{-m} \cdot e^{\varrho g(x)} \cdot F(x).$$

Von der zugehörigen homogenen Differentialgleichung kennt man die beiden linear unabhängigen Lösungen y^+ und y^- . Somit erhält man nach der Methode der Variation der Konstanten für die Lösung η von (21)

$$(22) \quad \eta(x, \varrho) = \varrho^{-m} \left\{ y^-(x, \varrho) \left[\int_{x_0}^x \frac{y^+(\xi, \varrho)}{D(\xi, \varrho)} \cdot e^{\varrho g(\xi)} \cdot F(\xi) d\xi + \gamma_1(\varrho) \right] - \right. \\ \left. - y^+(x, \varrho) \left[\int_{x_0}^x \frac{y^-(\xi, \varrho)}{D(\xi, \varrho)} \cdot e^{\varrho g(\xi)} \cdot F(\xi) d\xi + \gamma_2(\varrho) \right] \right\},$$

worin

$$D = \begin{vmatrix} y^+ & y^- \\ y^{+'} & y^{-'} \end{vmatrix}$$

die WRONSKISCHE Determinante der beiden Lösungen y^+ und y^- bezeichnet und γ_1, γ_2 Integrationskonstanten bedeuten. Aus (22) folgt durch Differentiation nach x

$$(23) \quad \eta'(x, \varrho) = \varrho^{-m} \left\{ y^{-'}(x, \varrho) \left[\int_{x_0}^x \frac{y^+(\xi, \varrho)}{D(\xi, \varrho)} \cdot e^{\varrho g(\xi)} \cdot F(\xi) d\xi + \gamma_1(\varrho) \right] - \right. \\ \left. - y^{+'}(x, \varrho) \left[\int_{x_0}^x \frac{y^-(\xi, \varrho)}{D(\xi, \varrho)} \cdot e^{\varrho g(\xi)} \cdot F(\xi) d\xi + \gamma_2(\varrho) \right] \right\}.$$

Insbesondere ist für $x = x_0$

$$\varrho^m \eta(x_0, \varrho) = \gamma_1 y^-(x_0, \varrho) - \gamma_2 y^+(x_0, \varrho), \\ \varrho^m \eta'(x_0, \varrho) = \gamma_1 y^{-'}(x_0, \varrho) - \gamma_2 y^{+'}(x_0, \varrho);$$

hieraus folgt durch Auflösen unter Benutzung der Relationen (17), (18), (20)

$$\gamma_1(\varrho) = \frac{\varrho^m}{D} \cdot \frac{y^+}{y^{+'}} \cdot \frac{\eta}{\eta'} \Big|_{x_0} = \varrho^m \cdot \frac{e^{\varrho g(x_0)} \cdot O(1) \quad \varrho^{-m-1} e^{\varrho g(x_0)} O(1)}{-2 \varrho h^2(x_0) g'(x_0) + O(1)} = \varrho^{-1} \cdot e^{2\varrho g(x_0)} \cdot O(1);$$

$$\gamma_2(\varrho) = -\frac{\varrho^m}{D} \cdot \frac{\eta}{\eta'} \Big|_{x_0} = -\varrho^m \cdot \frac{\varrho^{-m-1} \cdot e^{\varrho g(x_0)} \cdot O(1) \quad e^{-\varrho g(x_0)} \cdot O(1)}{-2 \varrho h^2(x_0) g'(x_0) + O(1)} = \frac{1}{\varrho} O(1).$$

Somit wird aus (22) für x auf C :

$$\eta(x, \varrho) = \varrho^{-m} \left\{ e^{-\varrho g(x)} \cdot a_1(x, \varrho) \cdot \left[\int_{x_0}^x \frac{e^{2\varrho g(\xi)}}{\varrho} \cdot b_1(\xi, \varrho) d\xi + \frac{e^{2\varrho g(x_0)}}{\varrho} c_1(\varrho) \right] - \right. \\ \left. - e^{\varrho g(x)} \cdot a_2(x, \varrho) \left[\int_{x_0}^x \frac{b_2(\xi, \varrho)}{\varrho} d\xi + \frac{c_2(\varrho)}{\varrho} \right] \right\},$$

worin $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ für x auf C und hinreichend große ϱ gleichmäßig beschränkte Funktionen sind, die nicht näher bezeichnet zu werden brauchen. Bedenkt man nun wieder, daß

$$|e^{\varrho g(\xi)}| = e^{\varrho \Re(g(\xi))}$$

längs C nicht abnimmt, so folgt ähnlich wie oben

$$|\eta(x, \varrho)| \leq A \varrho^{-m-1} \cdot |e^{\varrho g(x)}|.$$

Darin ist A eine von x und ϱ unabhängige Konstante und die Ungleichung gilt für alle x auf C und alle genügend großen ϱ . Ebenso folgt aus (23)

$$|\eta'(x, \varrho)| \leq A' \varrho^{-m} \cdot |e^{\varrho g(x)}| \quad (A' = \text{const}),$$

womit Satz I bewiesen ist.

Als Beispiel betrachten wir die Differentialgleichung

$$(24) \quad y'' + p y' - (\varrho^2 x + r) y = 0,$$

in der $p(x)$, $r(x)$ in der ganzen x -Ebene regulär analytisch seien; es ist hier $q(x) = x$. Als Gebiet \mathfrak{G} können wir die x -Ebene betrachten, aus der die negative reelle Achse einschließlich des Nullpunktes herausgenommen ist. Man hat

$$g = \int \sqrt{x} dx = \pm \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$$

und

$$h = \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\frac{1}{2} \int p dx}.$$

Brechen wir die asymptotische Entwicklung nach dem ersten Gliede ab, so ergeben sich die beiden asymptotischen Lösungen

$$\eta^+(x, \varrho) = h \cdot e^{\frac{2}{3} \varrho x^{\frac{3}{2}}} \quad \text{und} \quad \eta^-(x, \varrho) = h \cdot e^{-\frac{2}{3} \varrho x^{\frac{3}{2}}},$$

wobei wir von den mehrdeutigen Funktionen $x^{\frac{3}{2}}$ und \sqrt{x} in der aufgeschnittenen x -Ebene diejenigen Zweige benutzen wollen, die auf der positiven reellen Achse positiv sind. — Die Kurven $\Re(g) = \text{const}$ zeigt die Fig. 1. Weiß man von einer Lösung $y = y^+(x, \varrho)$ der Differentialgleichung (24), daß sie in einem Punkte $x_0 > 0$ asymptotisch durch $\eta^+(x, \varrho)$ dargestellt wird, so ist dies nach Satz 1 zugleich für alle Punkte x der Fall, für die

$$\Re\left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}\right) \geq \Re\left(\frac{2}{3} x_0^{\frac{3}{2}}\right)$$

ist, das sind die auf der gestrichelten Kurve und rechts von ihr liegenden Punkte. Dagegen wird eine Lösung $y^-(x, \varrho)$, die in x_0 asymptotisch durch $\eta^-(x, \varrho)$ dargestellt wird, zugleich in allen Punkten x von \mathfrak{G} dargestellt, für die

$$\Re\left(-\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}\right) \geq \Re\left(-\frac{2}{3} x_0^{\frac{3}{2}}\right)$$

ist; das sind die auf der gestrichelten Kurve und links davon liegenden Punkte.

Auf Kurven, auf denen $\Re\left(-\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}\right)$ niemals abnimmt, kann man von x_0 aus in beliebige Nähe der negativen reellen Achse gelangen, wie die in Fig. 1 stark ausgezogene, aus Stücken von Niveaulinien und Falllinien von $\Re(x^{\frac{3}{2}})$

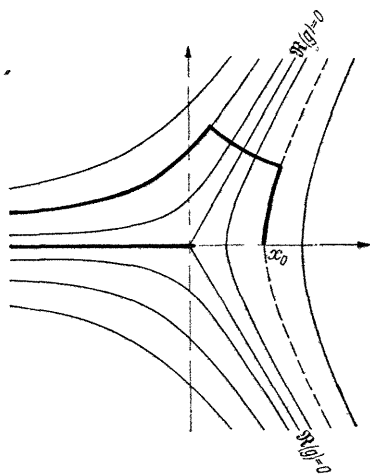


Fig. 1.

bestehende Kurve zeigt. Dagegen kann man die negative Achse selbst auf solchen Kurven nicht erreichen (auch wenn sie zu \mathfrak{G} gehörte, was durch Abänderung des Schnittes sich bewirken läßt). Denn an die negative reelle Achse schließt sich in beiden Halbebenen ein Gebiet an, in dem $\Re(-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}) > 0$ ist; auf der negativen Achse aber ist $\Re(-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}) = 0$. In der Tat werden wir in § 2 sehen, daß das asymptotische Verhalten von $y^-(x, \rho)$ auf der negativen Achse ein ganz anderes als in beliebiger Nähe der negativen Achse ist.

§ 2.

Differentialgleichungen mit reellen Koeffizienten.

Von besonderem Interesse ist der Fall, daß die Koeffizienten $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ der Differentialgleichung (1) für reelle x reellwertige analytische Funktionen sind. Ist dann in einem abgeschlossenen Intervalle der reellen Achse $q(x) > 0$, so wird $g = \int \sqrt{q} dx$ bei geeigneter Wahl der Integrationskonstante reell. Dann haben die reellen Lösungen der Differentialgleichung (1), wie der Faktor e^{g} in der asymptotischen Lösung zeigt, „aperiodische“ Gestalt. Wir nennen das Intervall *aperiodisch*. Ist dagegen in einem abgeschlossenen Intervall $q(x) < 0$, so wird $g = \int \sqrt{q} dx$ bei geeigneter Wahl der Integrationskonstante rein imaginär, und die reellen Lösungen der Differentialgleichung (1) zeigen „oszillatorischen“ Verlauf. Wir sprechen von einem *oszillatorischen* Intervall. Wenn eine Lösung $y(x, \rho)$ der Differentialgleichung (1) in einem Punkte x_0 eines aperiodischen Intervalles asymptotisch durch eine asymptotische Lösung $\eta(x, \rho)$ dargestellt wird, so gilt nach Satz I diese Darstellung jedenfalls in allen Punkten des Intervalles, in denen $g(x) \geq g(x_0)$ ist, dagegen nicht notwendig in den übrigen Punkten des Intervalles. Liegt aber x_0 in einem oszillatorischen Intervall, so gilt die asymptotische Darstellung nach Satz I von selbst in dem ganzen Intervall, da in ihm $\Re(g) = \text{const} = 0$ ist.

Zwischen den aperiodischen und den oszillatorischen Intervallen liegen Nullstellen von $q(x)$. Sie sind für die Differentialgleichung und daher auch für ihre Lösungen $y(x, \rho)$ keine singulären Stellen, wohl aber singuläre Stellen, nämlich Verzweigungspunkte, für die asymptotischen Lösungen $\eta(x, \rho)$, wie die Ausdrücke (4) und (5) für g und h zeigen.

Wenn $y(x, \rho)$ in einem Punkte der reellen Achse asymptotisch durch $\eta(x, \rho)$ dargestellt wird, so erhebt sich die Frage, wie $y(x, \rho)$ in einem anderen Punkte der reellen Achse dargestellt werden kann, der von ersterem durch eine Nullstelle von $q(x)$ getrennt ist. Diese Frage soll im folgenden behandelt werden.

Wir setzen voraus: Die Koeffizienten $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ der Differentialgleichung (1) sind in einer Umgebung des Nullpunktes $x = 0$ reguläre und

für reelle x reellwertige analytische Funktionen. $q(x)$ habe im Punkte $x = 0$ eine einfache Nullstelle:

$$q(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \dots,$$

wobei $a_1 > 0$ vorausgesetzt werden kann; denn durch Ersetzen von x durch $-x$ ist das immer erreichbar.

Um Satz I anwenden zu können, führen wir zunächst das dort zugrunde gelegte Gebiet \mathfrak{G} ein. \mathfrak{G} entstehe aus einem den Nullpunkt enthaltenden konvexen Gebiete durch Entfernen der negativen imaginären Achse einschließlich des Nullpunktes und sei so klein gewählt, daß p , q , r in \mathfrak{G} keine singuläre Stelle haben und q nirgends in \mathfrak{G} verschwindet. Die Integrationskonstante in (4) legen wir dadurch fest, daß wir $x = 0$ zum Anfangspunkt der Integration machen. Den beiden möglichen Vorzeichen der Wurzel in (4) entsprechend unterscheiden wir die beiden Funktionen

$$(25) \quad g^+ = \int_0^x \sqrt{q(\xi)} d\xi \quad \text{und} \quad g^- = -g^+.$$

In g^+ ist dabei die Wurzel positiv gewählt für $\xi > 0$. Damit wird auch $g^+(x) > 0$ für $x > 0$. Für g^+ schreiben wir der Einfachheit halber zumeist g , für g^- ebenso $-g$. Die aus den Differentialgleichungen (3) bei Benutzung von g^+ zu bestimmenden Funktionen h , h_1 , h_2 , ... bezeichnen wir jetzt genauer mit

$$h^+, h_1^+, h_2^+, \dots$$

Hätten wir in (3) die Funktion g^- benutzt, so hätten wir durch Integration andere Funktionen h , h_1 , h_2 , ... erhalten, die wir mit

$$h^-, h_1^-, h_2^-, \dots$$

bezeichnen. Wir gelangen so zu den beiden asymptotischen Lösungen

$$(26^+) \quad \eta^+ = \eta^+(x, \varrho) = e^{\varrho g(x)} (h^+(x) + \varrho^{-1} h_1^+(x) + \dots + \varrho^{-m} h_m^+(x))$$

$$(26^-) \quad \eta^- = \eta^-(x, \varrho) = e^{-\varrho g(x)} (h^-(x) + \varrho^{-1} h_1^-(x) + \dots + \varrho^{-m} h_m^-(x)).$$

Sie sind für jedes positive ϱ in ganz \mathfrak{G} regulär analytische Funktionen von x . Dagegen ist der nicht zu \mathfrak{G} gehörige Punkt $x = 0$, wie gesagt, eine singuläre Stelle.

Da wir die für reelle x reellwertigen Lösungen der Differentialgleichung (1) untersuchen wollen, so werden wir auch von den asymptotischen Lösungen η^+ und η^- voraussetzen, daß sie für positive x reellwertig sind. Diese Voraussetzung ist deshalb erfüllbar, weil für $x > 0$ die Funktionen p , q , r , g und damit die Koeffizienten in den zur Bestimmung von h , h_1 , h_2 , ... dienenden Differentialgleichungen (3) reell sind. Für $x < 0$ sind dann η^+ und η^- sicher nicht reell, da g rein imaginär wird.

Wir wählen nun auf der positiven reellen Achse einen Punkt x_p und auf der negativen reellen Achse einen Punkt x_n . Selbstverständlich sollen diese wie alle im folgenden eingeführten Punkte zum Gebiete \mathfrak{G} gehören. Über den Zusammenhang zwischen den asymptotischen Darstellungen einer bestimmten Lösung von (1) in den Punkten x_n und x_p gelten folgende Sätze.

Satz II. *Es sei $\eta^-(x, \varrho)$ die für $x > 0$ reellwertige asymptotische Lösung (26⁻) und $y^-(x, \varrho)$ eine für reelle x reellwertige Lösung der Differentialgleichung (1), die im Punkte x_p asymptotisch durch $\eta^-(x, \varrho)$ darstellbar ist:*

$$(27) \quad \begin{aligned} y^-(x_p, \varrho) &= \eta^-(x_p, \varrho) + \varrho^{-m-1} e^{-\varrho g(x_p)} O(1), \\ y'^-(x_p, \varrho) &= \eta'^-(x_p, \varrho) + \varrho^{-m} e^{-\varrho g(x_p)} O(1), \end{aligned}$$

dann gilt im Punkte x_n die Darstellung

$$(28) \quad \begin{aligned} y^-(x_n, \varrho) &= 2 \Re(\eta^-(x_n, \varrho)) + \varrho^{-m-1} O(1), \\ y'^-(x_n, \varrho) &= 2 \Re(\eta'^-(x_n, \varrho)) + \varrho^{-m} O(1). \end{aligned}$$

Beweis in § 3.

Das Gegenstück zu diesem Satze ist der

Satz III: *Es sei $\eta^+(x, \varrho)$ die für $x > 0$ reellwertige asymptotische Lösung (26⁺) und $y^+(x, \varrho)$ eine für reelle x reellwertige Lösung der Differentialgleichung (1), die im Punkte x_n die Darstellung besitzt*

$$(29) \quad \begin{aligned} y^+(x_n, \varrho) &= \Re(\eta^+(x_n, \varrho)) + \varrho^{-m-1} O(1), \\ y'^+(x_n, \varrho) &= \Re(\eta'^+(x_n, \varrho)) + \varrho^{-m} O(1), \end{aligned}$$

dann gilt im Punkte x_p die Darstellung

$$(30) \quad \begin{aligned} y^+(x_p, \varrho) &= \eta^+(x_p, \varrho) + \varrho^{-m-1} e^{\varrho g(x_p)} O(1), \\ y'^+(x_p, \varrho) &= \eta'^+(x_p, \varrho) + \varrho^{-m} e^{\varrho g(x_p)} O(1). \end{aligned}$$

Beweis in § 4.

Man bemerke, daß der Faktor 2, der in (28) auftritt, in (29) fehlt.

Für die Aussage des Satzes II ist es wesentlich, daß die Lösung der Differentialgleichung (1) im Punkte x_p durch η^- und nicht etwa durch η^+ asymptotisch dargestellt wird. Betrachtet man eine Lösung $y(x, \varrho)$, für die im Punkte x_p gilt,

$$(31) \quad \begin{aligned} y(x_p, \varrho) &= \eta^+(x_p, \varrho) + \varrho^{-m-1} e^{\varrho g(x_p)} O(1), \\ y'(x_p, \varrho) &= \eta'^+(x_p, \varrho) + \varrho^{-m} e^{\varrho g(x_p)} O(1), \end{aligned}$$

so kann man daraus noch nicht auf eine asymptotische Darstellung im Punkte x_n schließen. Z. B. erfüllt die Funktion $y^+(x, \varrho)$ des Satzes III die Relationen (31), aber auch die Funktion

$$y^+(x, \varrho) + \varrho^N y^-(x, \varrho),$$

wenn y^- die im Satze II genannte Funktion und N eine positive Zahl ist. Denn es ist nach (30), (27) und (26)

$$\begin{aligned} y^+(x_p, \varrho) + \varrho^N y^-(x_p, \varrho) &= \eta^+(x_p, \varrho) + \varrho^{-m-1} e^{\varrho g(x_p)} O(1) + \\ &\quad + \varrho^N \{\eta^-(x_p, \varrho) + \varrho^{-m-1} e^{-\varrho g(x_p)} O(1)\} \\ &= \eta^+(x_p, \varrho) + \varrho^{-m-1} e^{\varrho g(x_p)} O(1), \end{aligned}$$

und entsprechendes gilt für die Ableitung. Das Zusatzglied $\varrho^N y^-$ macht also asymptotisch im Punkte x_p nichts aus, wohl aber im Punkte x_n . Denn dort ist wegen (29) und (28)

$$\begin{aligned} y^+(x_n, \varrho) + \varrho^N y^-(x_n, \varrho) &= \Re(\eta^+(x_n, \varrho)) + \varrho^{-m-1} O(1) + \\ &\quad + \varrho^N \{2 \Re(\eta^-(x_n, \varrho)) + \varrho^{-m-1} O(1)\}. \end{aligned}$$

Jetzt nimmt das Zusatzglied $\varrho^N y^-$ für unendlich wachsendes ϱ beliebig große Werte an, während y^+ beschränkt bleibt.

Ebenso ist es für die Aussage des Satzes III wesentlich, daß die Lösung der Differentialgleichung (1) im Punkte x_n asymptotisch durch $\Re(\eta^+(x_n, \varrho))$ und nicht etwa durch $\Re(\eta^-(x_n, \varrho))$ dargestellt wird. Betrachtet man eine Lösung, für die im Punkte x_n gilt

$$(32) \quad \begin{aligned} y(x_n, \varrho) &= \Re(\eta^-(x_n, \varrho)) + \varrho^{-m-1} O(1), \\ y'(x_n, \varrho) &= \Re(\eta'^-(x_n, \varrho)) + \varrho^{-m} O(1), \end{aligned}$$

so kann man daraus noch nicht auf eine asymptotische Darstellung im Punkte x_p schließen. Z. B. erfüllt die Funktion $\frac{1}{2} y^-(x, \varrho)$ des Satzes II die Relationen (32), aber auch die Funktion $\frac{1}{2} y^- + \varrho^{-N} y^+$, wo y^+ die im Satze III genannte Funktion und N eine positive Zahl $\geq m+1$ ist. Denn es ist nach (28) und (29)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} y^-(x_n, \varrho) + \varrho^{-N} y^+(x_n, \varrho) &= \Re(\eta^-(x_n, \varrho)) + \varrho^{-m-1} O(1) + \\ &\quad + \varrho^{-N} \{\Re(\eta^+(x_n, \varrho)) + \varrho^{-m-1} O(1)\} \\ &= \Re(\eta^-(x_n, \varrho)) + \varrho^{-m-1} O(1), \end{aligned}$$

und entsprechendes gilt für die Ableitung. Das Zusatzglied $\varrho^{-N} y^+$ macht also asymptotisch im Punkte x_n nichts aus, wohl aber im Punkte x_p . Denn dort ist wegen (27) und (30)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} y^-(x_p, \varrho) + \varrho^{-N} y^+(x_p, \varrho) &= \frac{1}{2} \eta^-(x_p, \varrho) + \varrho^{-m-1} e^{-\varrho g(x_p)} O(1) \\ &\quad + \varrho^{-N} \{\eta^+(x_p, \varrho) + \varrho^{-m-1} e^{\varrho g(x_p)} O(1)\}. \end{aligned}$$

Jetzt geht wegen (26) das Zusatzglied $\varrho^{-N} y^+(x_p, \varrho)$ nach ∞ , während $\frac{1}{2} y^-(x_p, \varrho)$ nach 0 konvergiert.

In Satz I haben wir aus der Gültigkeit einer asymptotischen Darstellung in einem Punkte auf ihre Gültigkeit längs der Kurve C geschlossen. Ein ähnlicher Satz besteht für die asymptotischen Relationen der Art (28) und (29) für Intervalle der negativen reellen Achse:

Satz IV. Sei $\eta(x, \varrho)$ eine der beiden asymptotischen Lösungen (26⁺) und (26⁻), die für $x > 0$ reell sind, und $y(x, \varrho)$ eine Lösung der Differentialgleichung (1), die in einem einzigen Punkte $x_n < 0$ dargestellt wird durch

$$(33) \quad \begin{aligned} y(x, \varrho) &= \Re(\eta(x, \varrho)) + \varrho^{-m-1} O(1) \\ y'(x, \varrho) &= \Re(\eta'(x, \varrho)) + \varrho^{-m} O(1); \end{aligned}$$

dann gelten solche Relationen gleichmäßig (im Sinne der Fußnote 2 von S. 176) für alle x in jedem abgeschlossenen, den Nullpunkt nicht enthaltenden und selbstverständlich zum Gebiete \mathfrak{G} gehörigen Intervalle n der negativen reellen Achse.

Beweis in § 5.

§ 3.

Beweis von Satz II.

Wenn man die in \mathfrak{G} definierte Funktion $\eta^-(x, \varrho)$ analytisch fortsetzt, indem man die negative imaginäre Achse von rechts nach links überschreitet, so gelangt man in einen anderen Zweig dieser Funktion, den wir mit $z^+(x, \varrho)$ bezeichnen wollen. Da η^- auf der positiven reellen Achse reell ist, so sind η^- und z^+ auf der negativen reellen Achse konjugiert komplex. Natürlich ist die Funktion z^+ , da sie nur ein anderer Zweig von η^- ist, ebenfalls asymptotische Lösung von (1) im Sinne von § 1 (6). Der in z^+ auftretende Exponentialfaktor heißt aber $e^{+\varrho g}$ und nicht $e^{-\varrho g}$ wie in η^- . Denn wir befinden uns in dem anderen Blatte der zweiwertigen Funktion g . z^+ hat also die Gestalt

$$(34) \quad z^+(x, \varrho) = e^{\varrho g(x)} (k^+(x) + \varrho^{-1} k_1^+(x) + \varrho^{-2} k_2^+(x) + \cdots + \varrho^{-m} k_m^+(x)).$$

Die Funktionen $k^+, k_1^+, k_2^+, \dots, k_m^+$ entstehen durch die genannte analytische Fortsetzung aus $h^-, h_1^-, h_2^-, \dots, h_m^-$. — Es vereinfacht den Beweis des Satzes II, wenn man die asymptotische Lösung z^+ an Stelle der in (26⁺) eingeführten η^+ verwendet. Da k^+ wegen des in (5) auftretenden Faktors $\sqrt[4]{q}$ für $x > 0$ rein imaginär wird, so stimmt z^+ jedenfalls nicht mit η^+ überein.

Wir bemerken weiter, daß man in der oberen Halbebene einen so kleinen Halbkreis $\widehat{x_i x_r}$ mit dem Mittelpunkte $x = 0$ ziehen kann, daß bei seiner Durchlaufung $\Re(g)$ bis zu einem gewissen Punkte x_0 abnimmt und von da an

wieder zunimmt (Fig. 2). Dies erkennt man leicht durch Entwicklung von $g(x)$ in der Umgebung des Nullpunktes:

$$g(x) = \frac{2}{3} \sqrt{a_1} x^{\frac{3}{2}} (1 + x \mathfrak{P}(x));$$

$\mathfrak{P}(x)$ steht abkürzend für eine Potenzreihe in x . Der Halbkreis sei überdies so klein, daß $x_n < x_l$, $x_r < x_p$ wird. Wir bezeichnen den Linienzug $x_p x_r x_0 x_l x_n$, der in der Fig. 2 stark ausgezogen ist, mit C_{pn} und seine beiden Teile, in die er durch den Punkt x_0 zerlegt wird, mit C_{p_0} und C_{0n} .

Da $\Re(g^-) = \Re(-g)$ längs C_{p_0} dauernd zunimmt, gelten nach Satz I für die Funktion y^- des Satzes II gleichmäßig für alle Punkte x auf C_{p_0} Relationen von der Form (27)

$$(35) \quad \left. \begin{aligned} y^-(x, \varrho) &= \eta^-(x, \varrho) + \varrho^{-m-1} e^{-\varrho g(x)} O(1) \\ y^{-'}(x, \varrho) &= \eta^{-'}(x, \varrho) + \varrho^{-m} e^{-\varrho g(x)} O(1) \end{aligned} \right\} x \text{ auf } C_{p_0}.$$

Weiter sei y_n^- eine Lösung der Differentialgleichung (1), die im Punkte x_n und damit auf ganz C_{0n} asymptotisch durch η^- dargestellt wird. Für sie gelten die Relationen

$$(36) \quad \left. \begin{aligned} y_n^-(x, \varrho) &= \eta^-(x, \varrho) + \varrho^{-m-1} e^{-\varrho g(x)} O(1) \\ y_n^{-'}(x, \varrho) &= \eta^{-'}(x, \varrho) + \varrho^{-m} e^{-\varrho g(x)} O(1) \end{aligned} \right\} x \text{ auf } C_{0n},$$

und zwar gleichmäßig für alle x auf C_{0n} .

Schließlich sei z^+ eine Lösung von (1), die im Punkte x_0 und damit auf ganz C_{pn} durch die eben eingeführte asymptotische Lösung \mathfrak{z}^+ dargestellt wird:

$$(37) \quad \left. \begin{aligned} z^+(x, \varrho) &= \mathfrak{z}^+(x, \varrho) + \varrho^{-m-1} e^{\varrho g(x)} O(1) \\ z^{+'}(x, \varrho) &= \mathfrak{z}^{+'}(x, \varrho) + \varrho^{-m} e^{\varrho g(x)} O(1) \end{aligned} \right\} x \text{ auf } C_{pn},$$

wieder gleichmäßig für alle x auf C_{pn} .

y_n^- und z^+ sind für genügend große ϱ linear unabhängig. Denn die WRONSKISCHE Determinante

$$\begin{vmatrix} y_n^- & z^+ \\ y_n^{-'} & z^{+'} \end{vmatrix}$$

berechnet sich im Punkte x_0 zufolge (36) und (37) zu

$$(38) \quad \begin{aligned} & \begin{vmatrix} \eta^- + \varrho^{-m-1} e^{-\varrho g} O(1) & \mathfrak{z}^+ + \varrho^{-m-1} e^{\varrho g} O(1) \\ \eta^{-'} + \varrho^{-m} e^{-\varrho g} O(1) & \mathfrak{z}^{+'} + \varrho^{-m} e^{\varrho g} O(1) \end{vmatrix} \Big|_{x=x_0} \\ &= \begin{vmatrix} h^- + \varrho^{-1} O(1) & k^+ + \varrho^{-1} O(1) \\ -\varrho g' h^- + O(1) & \varrho g' k^+ + O(1) \end{vmatrix} \Big|_{x=x_0} \\ &= 2 \varrho g'(x_0) h^-(x_0) k^+(x_0) + O(1). \end{aligned}$$

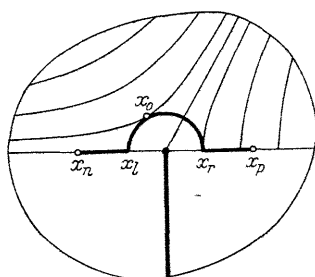


Fig. 2.

Dies ist $\neq 0$ für genügend große ϱ ; denn nach (4) und (5) verschwinden g' , h^- und k^+ nirgends in \mathfrak{G} .

Es läßt sich somit y^- linear durch y_n^- und z^+ ausdrücken:

$$(39) \quad y^-(x, \varrho) = s(\varrho) y_n^-(x, \varrho) + t(\varrho) z^+(x, \varrho);$$

ebenso gilt für die Ableitung

$$(39') \quad y'^-(x, \varrho) = s(\varrho) y_n'^-(x, \varrho) + t(\varrho) z'^+(x, \varrho).$$

Bildet man diese Gleichungen insbesondere an der Stelle $x = x_0$, so läßt sich $s(\varrho)$ asymptotisch durch Auflösen der beiden Gleichungen (39) und (39') berechnen unter Benutzung der Relationen (35), (36), (37), die ja im Punkte x_0 gelten:

$$\begin{aligned} s(\varrho) &= \begin{vmatrix} y^- & z^+ & y_n^- & z^+ \\ y'^- & z'^+ & y_n'^- & z'^+ \end{vmatrix} \\ &= \frac{\begin{vmatrix} \eta^- + \varrho^{-m-1} e^{-\varrho g} O(1) & \zeta^+ + \varrho^{-m-1} e^{\varrho g} O(1) \\ \eta'^- + \varrho^{-m} e^{-\varrho g} O(1) & \zeta'^+ + \varrho^{-m} e^{\varrho g} O(1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \eta^- + \varrho^{-m-1} e^{-\varrho g} O(1) & \zeta^+ + \varrho^{-m-1} e^{\varrho g} O(1) \\ \eta'^- + \varrho^{-m} e^{-\varrho g} O(1) & \zeta'^+ + \varrho^{-m} e^{\varrho g} O(1) \end{vmatrix}} \\ &= \left\{ \begin{vmatrix} \eta^- & \zeta^+ \\ \eta'^- & \zeta'^+ \end{vmatrix} + \varrho^{-m} O(1) \right\} : \left\{ \begin{vmatrix} \eta^- & \zeta^+ \\ \eta'^- & \zeta'^+ \end{vmatrix} + \varrho^{-m} O(1) \right\}. \end{aligned}$$

Benutzt man noch (38), so folgt schließlich

$$(40) \quad s(\varrho) = 1 + \varrho^{-m-1} O(1).$$

Zur Bestimmung von $t(\varrho)$ bemerke man, daß y^- für reelle x , also insbesondere für negative x reell ist und daß ζ^+ und η^- für negative x konjugiert komplex sind. Daher ist

$$\begin{aligned} y^- - \eta^- - \zeta^+ &= s(\varrho) \{ \eta^- + \varrho^{-m-1} c(x, \varrho) e^{-\varrho g} \} + \\ &\quad + t(\varrho) \{ \zeta^+ + \varrho^{-m-1} b(x, \varrho) e^{\varrho g} \} - \eta^- - \zeta^+ \end{aligned}$$

für negative x reell. Dabei sind die in der ersten Gleichung (36) bzw. (37) auftretenden Faktoren $O(1)$ genauer mit $c(x, \varrho)$ und $b(x, \varrho)$ bezeichnet worden; sie sind gleichmäßig beschränkt für alle x auf C_{0n} bzw. C_{pn} , also jedenfalls für alle x des Intervalles

$$(41) \quad x_n \leq x \leq x_1.$$

Für den letzten Ausdruck kann man aber schreiben

$$\begin{aligned} (42) \quad y^- - \eta^- - \zeta^+ &= (s(\varrho) - 1) \eta^- + (t(\varrho) - 1) \zeta^+ + \\ &\quad + s(\varrho) \varrho^{-m-1} c(x, \varrho) e^{-\varrho g} + t(\varrho) \varrho^{-m-1} b(x, \varrho) e^{\varrho g} \\ &= (t(\varrho) - 1) \zeta^+ + t(\varrho) \varrho^{-m-1} b(x, \varrho) e^{\varrho g} + \varrho^{-m-1} f(x, \varrho), \end{aligned}$$

wobei $f(x, \varrho)$ im Intervalle (41) für genügend große ϱ gleichmäßig beschränkt ist, da $|e^{\varrho g}| = 1$ für negative x ist.

Aus der Realität von (42) folgt, daß

$$(43) \quad \varrho^{m+1}(t(\varrho) - 1)$$

für $\varrho \rightarrow \infty$ beschränkt bleiben muß. Denn wäre das nicht der Fall, so gäbe es eine nach ∞ strebende Folge $\varrho_1, \varrho_2, \dots$ derart, daß

$$(44) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} |\varrho_\nu^{m+1}(t(\varrho_\nu) - 1)| = \infty$$

wäre. Insbesondere wäre $t(\varrho_\nu) - 1 \neq 0$ für genügend große ϱ_ν , so daß man (42) für solche ϱ_ν auch umformen kann in

$$(45) \quad (t(\varrho_\nu) - 1) \left\{ \mathfrak{z}^+(x, \varrho_\nu) + \frac{t(\varrho_\nu)}{\varrho_\nu^{m+1}(t(\varrho_\nu) - 1)} b(x, \varrho_\nu) e^{\varrho_\nu g(x)} + \frac{f(x, \varrho_\nu)}{\varrho_\nu^{m+1}(t(\varrho_\nu) - 1)} \right\}.$$

Nun gehen aber die letzten beiden Glieder der geschweiften Klammer wegen (44) für alle x des Intervalles (41) gleichmäßig nach Null, wenn $\nu \rightarrow \infty$ geht, so daß man für (45) mit Benutzung von (34) schreiben kann

$$(46) \quad (t(\varrho_\nu) - 1) \{k^+(x) e^{\varrho_\nu g(x)} + \varepsilon(x, \varrho_\nu)\},$$

worin

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \varepsilon(x, \varrho_\nu) = 0$$

gleichmäßig für alle x des Intervalles (41) gilt.

Wenn (46) reell sein soll, so muß der Arkus der geschweiften Klammer bei festem ϱ unabhängig von x sein. Wir wählen nun ϱ_ν so groß, daß I. $|\varepsilon(x, \varrho_\nu)| < \frac{1}{2}|k^+(x)|$ für jedes x des Intervalles (41) ist ($|k^+(x)|$ ist in diesem ganzen Intervalle positiv), und II. so groß, daß der Arkus von $e^{\varrho_\nu g(x)} k^+(x)$ in demselben Intervalle um mindestens 2π sich ändert. Auf Grund der ersten Annahme unterscheidet sich der Arkus von $e^{\varrho_\nu g(x)} k^+(x)$ von demjenigen der ganzen geschweiften Klammer um weniger als $\frac{2\pi}{6}$, weil $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ ist, so daß auf Grund der zweiten Annahme der Arkus der Klammer nicht konstant sein kann. $\varrho^{m+1}(t(\varrho) - 1)$ bleibt somit für $\varrho \rightarrow \infty$ beschränkt. Es gilt also

$$(47) \quad t(\varrho) = 1 + \varrho^{-m-1} O(1).$$

Somit ist im Intervalle (41) nach (35), (36), (40) und (47)

$$\begin{aligned} y^-(x, \varrho) &= s(\varrho) y_n^-(x, \varrho) + t(\varrho) z^+(x, \varrho) \\ &= \eta^-(x, \varrho) + \mathfrak{z}^+(x, \varrho) + \varrho^{-m-1} O(1) \\ &= 2 \Re(\eta^-(x, \varrho)) + \varrho^{-m-1} O(1). \end{aligned}$$

Damit ist die erste Formel (28) von Satz II bewiesen. Die zweite Formel (28) folgt durch Differentiation:

$$\begin{aligned} y'^-(x, \varrho) &= s(\varrho) y_n'^-(x, \varrho) + t(\varrho) z^{+'}(x, \varrho) \\ &= \eta'^-(x, \varrho) + \mathfrak{z}^{+'}(x, \varrho) + \varrho^{-m} O(1) \\ &= 2 \Re(\eta'^-(x, \varrho)) + \varrho^{-m} O(1). \end{aligned}$$

Der Beweis von Satz II ist damit geführt.

§ 4.

Beweis von Satz III.

Es sei $y^-(x, \varrho)$ die in Satz II eingeführte Lösung der Differentialgleichung (1). Sie ist für reelle x reell und erfüllt in den Punkten x_p und x_n die asymptotischen Relationen (27) und (28). Es sei ferner $y_0^+(x, \varrho)$ eine Lösung der Differentialgleichung (1), die im Punkte x_0 des § 3, Fig. 2 asymptotisch durch $\eta^+(x, \varrho)$ dargestellt wird. Nach Satz I gilt dann diese Darstellung auch in den Punkten x_n und x_p , d. h. es gilt

$$(48) \quad \left. \begin{aligned} y_0^+(x, \varrho) &= \eta^+(x, \varrho) + \varrho^{-m-1} e^{\varrho g(x)} O(1) \\ y_0^{+'}(x, \varrho) &= \eta^{+'}(x, \varrho) + \varrho^{-m} e^{\varrho g(x)} O(1) \end{aligned} \right\} x = x_n \text{ oder } x_p.$$

Wir haben in y_0^+ und y^- zwei Lösungen von (1), die sowohl im Punkte x_p als im Punkte x_n asymptotisch bekannt sind. Wir berechnen ihre WRONSKISCHE Determinante in x_p

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{cc} y_0^+ & y^- \\ y_0^{+'} & y^{-'} \end{array} \right|_{x=x_p} &= \left| \begin{array}{cc} \eta^+ + \varrho^{-m-1} e^{\varrho g} O(1) & \eta^- + \varrho^{-m-1} e^{\varrho g} O(1) \\ \eta^{+'} + \varrho^{-m} e^{\varrho g} O(1) & \eta^{-'} + \varrho^{-m} e^{\varrho g} O(1) \end{array} \right|_{x=x_p} \\ &= -2 \varrho g'(x_p) h^+(x_p) h^-(x_p) + O(1). \end{aligned}$$

Da dieser Wert wegen (4) und (5) $\neq 0$ ist für genügend große ϱ , so sind y_0^+ und y^- für genügend große ϱ linear unabhängig.

Wir hätten die Determinante auch folgendermaßen umformen können:

$$(49) \quad \left| \begin{array}{cc} y_0^+ & y^- \\ y_0^{+'} & y^{-'} \end{array} \right|_{x=x_p} = \left| \begin{array}{cc} \eta^+ & \eta^- \\ \eta^{+'} & \eta^{-'} \end{array} \right|_{x=x_p} + \varrho^{-m} O(1).$$

Da die rechts stehende Determinante reell ist, so folgt für den Imaginärteil

$$(50) \quad \Im \left| \begin{array}{cc} y_0^+ & y^- \\ y_0^{+'} & y^{-'} \end{array} \right| = \varrho^{-m} O(1).$$

Dies gilt zunächst im Punkte $x = x_p$, aber ebenso in $x = x_n$. Denn nach einem bekannten Satze ist

$$(51) \quad \left| \begin{array}{cc} y_0^+ & y^- \\ y_0^{+'} & y^{-'} \end{array} \right|_{x=x_n} = \left| \begin{array}{cc} y_0^+ & y^- \\ y_0^{+'} & y^{-'} \end{array} \right|_{x=x_p} \cdot e^{-\int_{x_p}^{x_n} p(x) dx},$$

und der Exponentialfaktor ist reell. Benutzt man in (50) die asymptotischen Darstellungen (48) und (28) von y_0^+ und y^- im Punkte x_n , so ergibt sich weiter wegen

$$\left| \begin{array}{cc} y_0^+ & y^- \\ y_0^{+'} & y^{-'} \end{array} \right|_{x=x_n} = 2 \left| \begin{array}{cc} \Re(\eta^+) & \Re(\eta^-) \\ \Re(\eta^{+'}) & \Re(\eta^{-'}) \end{array} \right|_{x=x_n} + 2i \left| \begin{array}{cc} \Im(\eta^+) & \Re(\eta^-) \\ \Im(\eta^{+'}) & \Re(\eta^{-'}) \end{array} \right|_{x=x_n} + \varrho^{-m} O(1)$$

die Formel

$$(52) \quad \left| \begin{array}{cc} \Im(\eta^+) & \Re(\eta^-) \\ \Im(\eta^{+'}) & \Re(\eta^{-'}) \end{array} \right|_{x=x_n} = \varrho^{-m} O(1).$$

Wir kommen nun zu der Lösung $y^+(x, \varrho)$ des Satzes III. Sie läßt sich linear ausdrücken durch die linear unabhängigen Lösungen y_0^+ und y^- :

$$(53) \quad \begin{aligned} y^+ &= \alpha(\varrho) y_0^+ + \beta(\varrho) y^- \\ y^{+'} &= \alpha(\varrho) y_0^{+'} + \beta(\varrho) y^{-'} \end{aligned}$$

Zur Berechnung von α und β setzen wir darin $x = x_n$ und finden

$$(54) \quad \alpha = \frac{\begin{vmatrix} y^+ & y^- \\ y^{+'} & y^{-'} \end{vmatrix}_{x=x_n}}{\begin{vmatrix} y_0^+ & y^- \\ y_0^{+'} & y^{-'} \end{vmatrix}_{x=x_n}} = \frac{\begin{vmatrix} y_0^+ & y^- \\ y^{+'} & y^{-'} \end{vmatrix}_{x=x_n} + \begin{vmatrix} y^+ - y_0^+ & y^- \\ y^{+'} - y_0^{+'} & y^{-'} \end{vmatrix}_{x=x_n}}{\begin{vmatrix} y_0^+ & y^- \\ y_0^{+'} & y^{-'} \end{vmatrix}_{x=x_n}}.$$

Die zweite Determinante des Zählers ist nach (48), (29) und (28) gleich

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} -i \Im(\eta^+) + \varrho^{-m-1} O(1) & 2 \Re(\eta^-) + \varrho^{-m-1} O(1) \\ -i \Im(\eta^{+'}) + \varrho^{-m} O(1) & 2 \Re(\eta^{-'}) + \varrho^{-m} O(1) \end{vmatrix} \\ &= -2i \begin{vmatrix} \Im(\eta^+) & \Re(\eta^-) \\ \Im(\eta^{+'}) & \Re(\eta^{-'}) \end{vmatrix} + \varrho^{-m} O(1) = \varrho^{-m} O(1) \end{aligned}$$

wegen (52). Bedenkt man noch, daß die Nennerdeterminante von (54) nach (49) und (51) gleich

$$a\varrho + O(1) \quad (a = \text{const} \neq 0)$$

ist, so folgt

$$\alpha(\varrho) = 1 + \varrho^{-m-1} O(1).$$

Ebenso ergibt sich für $\beta(\varrho)$ der Wert

$$\beta(\varrho) = \begin{vmatrix} y_0^+ & y^+ & & y_0^+ & y^- \\ y_0^{+'} & y^{+'} & & y_0^{+'} & y^{-'} \end{vmatrix}_{x=x_n} = O(1),$$

denn die Zählerdeterminante ist auf Grund von (48) und (29) gleich $\varrho O(1)$.

Setzt man die gefundenen Abschätzungen von α und β in (53) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} y^+(x_p, \varrho) &= (1 + \varrho^{-m-1} O(1)) \{ \eta^+(x_p, \varrho) + \varrho^{-m-1} e^{\varrho g(x_p)} O(1) \} \\ &\quad + O(1) \{ \eta^-(x_p, \varrho) + \varrho^{-m-1} e^{-\varrho g(x_p)} O(1) \} \\ &= \eta^+(x_p, \varrho) + \varrho^{-m-1} e^{\varrho g(x_p)} O(1) \end{aligned}$$

und ebenso

$$y^{+'}(x_p, \varrho) = \eta^{+'}(x_p, \varrho) + \varrho^{-m} e^{\varrho g(x_p)} O(1).$$

Damit ist Satz III bewiesen.

§ 5.

Beweis von Satz IV.

Wir können annehmen, daß das im Satz IV genannte Intervall n der negativen reellen Achse den Punkt x_n enthält. Es sei $y_1(x, \varrho)$ diejenige

Lösung der Differentialgleichung (1), die im Punkte x_n dieselben Anfangswerte besitzt wie η , das heißt es sei

$$\begin{aligned}y_1(x_n, \varrho) &= \eta(x_n, \varrho), \\y_1'(x_n, \varrho) &= \eta'(x_n, \varrho).\end{aligned}$$

Nach Satz I gilt dann in n gleichmäßig

$$(55) \quad \begin{aligned}y_1(x, \varrho) &= \eta(x, \varrho) + \varrho^{-m-1}O(1), \\y_1'(x, \varrho) &= \eta'(x, \varrho) + \varrho^{-m}O(1).\end{aligned}$$

Subtrahiert man von den mit 2 multiplizierten Relationen (33) die Relationen (55), so kommt zunächst für $x = x_n$

$$(56) \quad \begin{aligned}2y(x, \varrho) - y_1(x, \varrho) &= \overline{\eta(x, \varrho)} + \varrho^{-m-1}O(1), \\2y'(x, \varrho) - y_1'(x, \varrho) &= \overline{\eta'(x, \varrho)} + \varrho^{-m}O(1).\end{aligned}$$

Darin bezeichnet der Querstrich den konjugiert komplexen Wert. Nun ist aber $\overline{\eta(x, \varrho)}$ auf der negativen reellen Achse wieder eine asymptotische Lösung (im Falle $\eta = \eta^-$ haben wir sie in § 3 mit η^+ bezeichnet). Daher gelten die Relationen (56) nach Satz I gleichmäßig für alle x in n . Durch Addition von (55) und (56) folgt die gleichmäßige Gültigkeit von (33), also die Behauptung des Satzes IV.

Literaturverzeichnis.

- [1] LIOUVILLE, Sur le développement des fonctions. Journ. de math. 2 (1837).
 [2] J. HORN, Über lineare Differentialgleichungen mit einem willkürlichen Parameter. Math. Annalen 52, S. 271—292; Über eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit einem veränderlichen Parameter. Ebenda, S. 340—362.
 [3] G. D. BIRKHOFF, On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter. Amer. Math. Soc. Trans. 9 (1908) S. 219—231.
 [4] O. BLUMENTHAL, Über asymptotische Lösungen. Arch. Math. Phys. III 19 (1912), S. 136—174.
 [5] O. PERRON, Über die Abhängigkeit der Integrale eines Systems linearer Differentialgleichungen von einem Parameter I, II, III. Sitz.-Ber. Akad. Wiss. Heidelberg 1918 und 1919.
 [6] H. JEFFREYS, On certain approximate solutions of linear differential equations of the second order. Proc. London Math. Soc. (2) 23 (1925), S. 428—454.
 [7] S. GOLDSTEIN, A note on certain approximate solutions of linear differential equations of the second order. Proc. London Math. Soc. (2) 28 (1928), S. 81—90.
 [8] R. E. LANGER, On the asymptotic solutions of ordinary differential equations, with an application to Bessel functions of large order. Trans. Amer. Math. Soc. 33 (1931), S. 23—64.
 [9] R. E. LANGER, The boundary problem of an ordinary linear differential system in the complex domain. Trans. Amer. Math. Soc. 46 (1939), S. 151—190.

(Eingegangen am 23. I. 1942.)