

Werk

Titel: Mathematische Zeitschrift

Ort: Berlin

Jahr: 1942

Kollektion: Mathematica

Werk Id: PPN266833020_0048

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN266833020_0048 | LOG_0020

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Zur Frage des Gleichgewichts von Vierecksnetzen aus verknoteten und gespannten Fäden*).

Zum 80. Geburtstag von S. FINSTERWALDER.

Erster Teil:

**Allgemeine Gleichgewichtsbedingungen (Kapitel I und II);
Kennzeichnung, Übersicht und kurze Beschreibung der all-
gemeinsten Netze besonderer Netzklassen (Kapitel III und IV).**

Von

H. Graf und H. Thomas in Darmstadt.

I. Fadennetze mit allgemeiner Spannungsverteilung und allgemeiner Netzstruktur.

Ein einfach zusammenhängender Bereich einer offenen, im Sinne der Differentialgeometrie regulären Fläche, den wir im folgenden kurz ‚Fläche‘ nennen wollen, sei mit einem ‚Netz‘ aus zwei Kurvenscharen überzogen. Dabei sei der einfach zusammenhängende Bereich das topologische Abbild eines konvexen, einfach zusammenhängenden Bildbereiches der Euklidischen Ebene, und die beiden Kurvenscharen des Netzes seien das topologische Abbild von zwei nicht zusammenfallenden Scharen paralleler Geraden innerhalb des Bildbereiches. Wir denken uns Fläche und Netzkurven modellmäßig realisiert: Die Fläche als starre und glatte Schale, das Kurvennetz als Fadennetz, dessen Fäden in den Kreuzungspunkten miteinander verknotet sind. Dabei seien die Fäden ideale Fäden, d. h. unendlich dünn, undehnbar, gewichtslos, ohne Zwang verbiegbare, ohne Reibung auf der Fläche gleitend und hierbei stets in der Fläche verbleibend. Wir lassen in den Randpunkten unseres über das Flächenmodell ausgebreiteten Fadennetzes ‚Randkräfte‘ in Richtung der Fäden angreifen. Diese Randkräfte können stets so gewählt werden, daß sich das Fadennetz im Gleichgewicht befindet. Dabei werden die Netzfäden im allgemeinen einen Druck senkrecht zur Trägerfläche ausüben. Wir fragen, ob beim Übergang zu einem Fadennetz mit infinitesimalen Maschen und mit infinitesimalen Randkräften sich Fläche, Netz und Randkräfte so bestimmen lassen, daß in allen Flächenpunkten die von dem Netz auf die Fläche ausgeübten Druckkräfte Null werden. Dann ist die starre Fläche als widerstandgebender Träger für das Fadennetz zur Aufrechterhaltung des

*) Vergl. hierzu: S. FINSTERWALDER, Mechanische Beziehungen bei der Flächen-
deformation, Jahresberichte der D. M. V. 6 (1899), S. 67 ff.

Gleichgewichts entbehrlich; das in den Flächenrand eingespannte Fadennetz erzeugt für sich allein ein ‚Fadenmodell‘ der nämlichen Fläche¹⁾.

Unser gesuchtes Fadennetz, das sich unter dem Einfluß von Randkräften im Gleichgewicht befindet, bestehe aus den Parameterkurven der Trägerfläche $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$. Um die Fadenspannungen längs der Kurvenscharen $v = \text{konst.}$ (u -Linien) bzw. $u = \text{konst.}$ (v -Linien) auf eine noch genauer zu erklärende Weise zu kennzeichnen, führen wir zwei stets positive²⁾ Funktionen $\sigma_1(u, v)$ und $\sigma_2(u, v)$ ein. Für diese und alle weiteren Funktionen, die wir später noch einführen werden, setzen wir Regularität voraus. Wir fragen jetzt nach den Bedingungsgleichungen, die zwischen den Grundgrößen erster Ordnung E, F, G und zweiter Ordnung L, M, N der Trägerfläche und den Spannungsfunktionen σ_1, σ_2 des Fadennetzes bestehen.

Zunächst denken wir uns die Parameterkurven auf der Fläche zu zwei Folgen *diskret* aufeinanderfolgender Kurven angeordnet und zwar so, daß sich bei ihrer topologischen Abbildung in die u/v -Ebene — mit u und v als rechtwinkligen Kartesischen Koordinaten — zwei Folgen paralleler gleichabstehender Geraden mit dem Abstand Δt ergeben. In jedem Knotenpunkt unseres diskreten, im allgemeinen krummlinigen und ungleichmaschigen Vierecksnetzes auf der Fläche, dem also ein geradliniges und gleichmaschiges Quadratnetz in der u/v -Ebene entspricht, werde nun mittels der eingeführten Spannungsfunktionen den beiden hindurchgehenden Fäden zunächst jeweils der Spannungsbetrag $\Delta t \sigma_1(u, v)$ bzw. $\Delta t \sigma_2(u, v)$ zugeordnet.

Wir ersetzen nun überall die Kurvenbögen unseres Vierecksnetzes durch deren *Sehnen*, denken uns das so entstandene Sehnennetz wieder durch verknotete und gespannte (andere) Fäden realisiert und fragen nach den Gleichgewichtsbedingungen in einem beliebigen Knotenpunkt P des Sehnennetzes. Wir betrachten die vier Sehnenvektoren $\Delta \mathbf{x}_1, \Delta \bar{\mathbf{x}}_1$ bzw. $\Delta \mathbf{x}_2, \Delta \bar{\mathbf{x}}_2$, die vom Knotenpunkt P aus nach den beiden jeweils benachbarten Knotenpunkten auf der u -Kurve bzw. auf der v -Kurve zielen:

$$\Delta \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(u + \Delta t, v) - \mathbf{x}(u, v) = \Delta t \mathbf{x}_u + \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{x}_{uu} + \Delta t^3 (\dots),$$

$$\Delta \bar{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}(u - \Delta t, v) - \mathbf{x}(u, v) = -\Delta t \mathbf{x}_u + \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{x}_{uu} + \Delta t^3 (\dots),$$

$$\Delta \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}(u, v + \Delta t) - \mathbf{x}(u, v) = \Delta t \mathbf{x}_v + \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{x}_{vv} + \Delta t^3 (\dots),$$

$$\Delta \bar{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{x}(u, v - \Delta t) - \mathbf{x}(u, v) = -\Delta t \mathbf{x}_v + \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{x}_{vv} + \Delta t^3 (\dots).$$

¹⁾ Diese Vierecksnetze lassen sich nicht nur als im Gleichgewicht befindliche Fadennetze, sondern auch als ‚wackelige‘ Kurvennetze mit starren Vierecksmaschen deuten; vgl. hierzu etwa R. SAUER, Wackelige Kurvennetze bei einer infinitesimalen Flächenverbiegung. *Math. Annalen* 108 (1933), S. 673.

²⁾ Ein Vorzeichenwechsel der Funktionen σ_1 und σ_2 würde den Übergang von Zug- zu Druckspannungen bedeuten; Druckspannungen kann aber unser Fadennetz nicht aufnehmen.

Als Einheitsvektoren $e = \frac{\Delta \mathfrak{x}}{\sqrt{\Delta \mathfrak{x}^2}}$ in Richtung dieser vier Sehnenvektoren ergeben sich hieraus entsprechend:

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{\mathfrak{x}_u}{\sqrt{E}} + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\mathfrak{x}_{uu}}{\sqrt{E}} - \frac{E_u \mathfrak{x}_u}{2E\sqrt{E}} \right) + \Delta t^2 (\dots), \\ \bar{e}_1 &= -\frac{\mathfrak{x}_u}{\sqrt{E}} + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\mathfrak{x}_{uu}}{\sqrt{E}} - \frac{E_u \mathfrak{x}_u}{2E\sqrt{E}} \right) + \Delta t^2 (\dots), \\ e_2 &= \frac{\mathfrak{x}_v}{\sqrt{G}} + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\mathfrak{x}_{vv}}{\sqrt{G}} - \frac{G_v \mathfrak{x}_v}{2G\sqrt{G}} \right) + \Delta t^2 (\dots), \\ \bar{e}_2 &= -\frac{\mathfrak{x}_v}{\sqrt{G}} + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\mathfrak{x}_{vv}}{\sqrt{G}} - \frac{G_v \mathfrak{x}_v}{2G\sqrt{G}} \right) + \Delta t^2 (\dots). \end{aligned}$$

Wir wollen nun den Sehnen als Fadenspannungen jeweils die Mittelwerte der Spannungen in den Sehnenendpunkten, d. h. in den Knotenpunkten unseres Netzes zuerteilen und erhalten demgemäß für unsere vier von P ausgehenden Sehnen die Spannungsbeträge:

$$\begin{aligned} \Delta k_1 &= \frac{\Delta t}{2} (\sigma_1(u + \Delta t, v) + \sigma_1(u, v)) = \Delta t \sigma_1 + \frac{\Delta t^2}{2} (\sigma_1)_u + \Delta t^3 (\dots), \\ \Delta \bar{k}_1 &= \frac{\Delta t}{2} (\sigma_1(u - \Delta t, v) + \sigma_1(u, v)) = \Delta t \sigma_1 - \frac{\Delta t^2}{2} (\sigma_1)_u + \Delta t^3 (\dots), \\ \Delta k_2 &= \frac{\Delta t}{2} (\sigma_2(u, v + \Delta t) + \sigma_2(u, v)) = \Delta t \sigma_2 + \frac{\Delta t^2}{2} (\sigma_2)_v + \Delta t^3 (\dots), \\ \Delta \bar{k}_2 &= \frac{\Delta t}{2} (\sigma_2(u, v - \Delta t) + \sigma_2(u, v)) = \Delta t \sigma_2 - \frac{\Delta t^2}{2} (\sigma_2)_v + \Delta t^3 (\dots). \end{aligned}$$

Die in dem Knotenpunkt P des Netzes zusammenlaufenden beiden Sehnen des zur u -Linie bzw. zur v -Linie gehörenden Sehnenpaares besitzen somit jeweils im Mittel den Spannungswert $\frac{1}{2} (\Delta k_1 + \Delta \bar{k}_1)$ bzw. $\frac{1}{2} (\Delta k_2 + \Delta \bar{k}_2)$, der bis auf Größen der Ordnung Δt^3 mit dem ursprünglich dem Knotenpunkt P zugeordneten Spannungswert $\Delta t \sigma_1$ bzw. $\Delta t \sigma_2$ übereinstimmt. Damit nun in dem Knotenpunkt P Gleichgewicht herrscht, muß die Vektorsumme der vier dort angreifenden Kräfte verschwinden; wir erhalten somit die Gleichgewichtsbedingung

$$\Delta k_1 e_1 + \Delta \bar{k}_1 \bar{e}_1 + \Delta k_2 e_2 + \Delta \bar{k}_2 \bar{e}_2 = 0,$$

d. h.

$$\left(\frac{\mathfrak{x}_{uu}}{\sqrt{E}} - \frac{E_u \mathfrak{x}_u}{2E\sqrt{E}} \right) \sigma_1 + \left(\frac{\mathfrak{x}_{vv}}{\sqrt{G}} - \frac{G_v \mathfrak{x}_v}{2G\sqrt{G}} \right) \sigma_2 + \frac{\mathfrak{x}_u}{\sqrt{E}} (\sigma_1)_u + \frac{\mathfrak{x}_v}{\sqrt{G}} (\sigma_2)_v + \Delta t (\dots) = 0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung stellt einen Vektor dar, der verschwinden soll; es müssen daher die inneren Produkte des Vektors mit drei nicht komplanaren Vektoren, etwa den Tangentenvektoren \mathfrak{x}_u , \mathfrak{x}_v und dem Flächen-

normalenvektor $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v$ verschwinden, also die folgenden drei Beziehungen gelten:

$$\sqrt{E} (\sigma_1)_u + \frac{F}{\sqrt{G}} (\sigma_2)_v + \frac{2GF_v - F G_u - G G_u}{2G\sqrt{G}} \sigma_2 + \Delta t(\dots) = 0,$$

$$\sqrt{G} (\sigma_2)_v + \frac{F}{\sqrt{E}} (\sigma_1)_u + \frac{2EF_u - F E_v - E E_v}{2E\sqrt{E}} \sigma_1 + \Delta t(\dots) = 0,$$

$$\frac{L}{\sqrt{E}} \sigma_1 + \frac{N}{\sqrt{G}} \sigma_2 + \Delta t(\dots) = 0.$$

Wir führen jetzt den Grenzübergang $\Delta t \rightarrow 0$ durch, der unser Vierecksnetz aus den Sehnen der Parameterkurven in das *infinitesimale* Vierecksnetz aus den Parameterkurven selbst überführt und erhalten nach einer für das Folgende zweckmäßigen Umformung:

$$(I) \quad \begin{cases} \sqrt{E} (\sigma_1)_u - (\sqrt{G})_u \sigma_2 + \left(\frac{F}{\sqrt{EG}} \sqrt{E} \sigma_2 \right)_v = 0, \\ \sqrt{G} (\sigma_2)_v - (\sqrt{E})_v \sigma_1 + \left(\frac{F}{\sqrt{EG}} \sqrt{G} \sigma_1 \right)_u = 0, \\ \frac{L}{E} \sqrt{E} \sigma_1 + \frac{N}{G} \sqrt{G} \sigma_2 = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichungen besagen, daß sich das Parameternetz als *infinitesimales Fadennetz* unter dem Einfluß von *infinitesimalen Randkräften im Gleichgewicht* befindet. Die Grundgrößen erster und zweiter Ordnung der Trägerfläche unseres im Gleichgewicht befindlichen Fadennetzes genügen neben diesen Gleichgewichtsbedingungen (I) auch noch den Flächen-Grundgleichungen von CODAZZI und GAUSS, also insgesamt sechs partiellen Differentialgleichungen. Es erweist sich als möglich und zweckmäßig, in diesen sechs Gleichungen die Grundgrößen durch Größen zu ersetzen, die für die Fläche und die Parameterkurven von unmittelbarer geometrischer Bedeutung sind. Diese Größen sind für die

u-Linien bzw. v-Linien

die Bogenlängenfunktionen³⁾ $s_1 = \sqrt{E} > 0$ bzw. $s_2 = \sqrt{G} > 0$,

die Normalkrümmungen $n_1 = \frac{L}{E}$ bzw. $n_2 = \frac{N}{G}$,

der Schnittwinkel $\omega = \arccos \frac{F}{\sqrt{EG}} \neq 0$,

das „Schränkungsmaß“⁴⁾ $m = \frac{M}{\sqrt{EG}}$.

³⁾ In jedem Netzknotenpunkt haben also die beiden hindurchgehenden Fäden die Längenelemente $s_1 dt$ bzw. $s_2 dt$ und sind mit den Krafterelementen $\sigma_1 dt$ bzw. $\sigma_2 dt$ gespannt.

⁴⁾ Das Schränkungsmaß ist ein Maß für die „Unebenheit der Maschenvierecke“ (Verschränkung) des infinitesimalen Netzes (vgl. hierzu etwa SCHEFFERS, Theorie der Flächen, S. 250).

Nach Einführung dieser Größen lauten die Gleichgewichtsbedingungen (I):

$$(I 1) \quad \begin{cases} (\sigma_1)_u s_1 - (s_2)_u \sigma_2 + (\sigma_2 s_1 \cos \omega)_v = 0, \\ (\sigma_2)_v s_2 - (s_1)_v \sigma_1 + (\sigma_1 s_2 \cos \omega)_u = 0, \end{cases}$$

$$(I 2) \quad n_1 \sigma_1 s_1 + n_2 \sigma_2 s_2 = 0;$$

und die Grundgleichungen:

$$(I 3) \quad \begin{cases} (n_1)_v s_1 - m_u s_2 = \{(s_1)_v (2 \cos^2 \omega - 1) - (s_2)_u \cos \omega\} \frac{n_1}{\sin^2 \omega} + \\ \quad + \{(s_2)_u - (s_1)_v \cos \omega + \frac{s_2}{4} (\cos^2 \omega)_u\} \frac{2m}{\sin^2 \omega} + \\ \quad + \{(s_1)_v - (s_2)_u \cos \omega - s_2 (\cos \omega)_u\} \frac{n_2}{\sin^2 \omega}, \\ (n_2)_u s_2 - m_v s_1 = \{(s_2)_u (2 \cos^2 \omega - 1) - (s_1)_v \cos \omega\} \frac{n_2}{\sin^2 \omega} + \\ \quad + \{(s_1)_v - (s_2)_u \cos \omega + \frac{s_1}{4} (\cos^2 \omega)_v\} \frac{2m}{\sin^2 \omega} + \\ \quad + \{(s_2)_u - (s_1)_v \cos \omega - s_1 (\cos \omega)_v\} \frac{n_1}{\sin^2 \omega}, \end{cases}$$

$$(I 4) \quad K = \frac{n_1 n_2 - m^2}{\sin^2 \omega} = \frac{\omega_u v + (s_2 g_2)_u + (s_1 g_1)_v}{s_1 s_2 \sin \omega}.$$

Dabei sind K das GAUSSSCHE Krümmungsmaß der Fläche und

$$(I 5) \quad g_1 = \frac{(s_2 \cos \omega)_u - (s_1)_v}{s_1 s_2 \sin \omega}, \quad g_2 = \frac{(s_1 \cos \omega)_v - (s_2)_u}{s_1 s_2 \sin \omega}$$

die geodätischen Krümmungen der u -Linien bzw. v -Linien. Schließlich hat man noch für die mittlere Krümmung H der Fläche:

$$(I 6) \quad H = \frac{n_1 - 2m \cos \omega + n_2}{2 \sin^2 \omega}.$$

Da für die Netzkurven sowohl die Bogenlängenfunktionen s_1 und s_2 als auch die Spannungsfunktionen σ_1 und σ_2 als stets positiv eingeführt sind, so folgt aus der Gleichgewichtsbedingung (I 2), daß die Normalkrümmungen n_1 und n_2 der Netzkurven in jedem Knotenpunkt entgegengesetzte Vorzeichen haben oder aber beide zugleich verschwinden; letzteres besagt, daß an der betrachteten Stelle die Netzkurven in Richtung der Schmiegtangenten verlaufen. Die Trägerfläche muß also in jedem Punkt negativ gekrümmt oder eben sein.

Zusammenfassung. Für jedes, unter dem Einfluß von infinitesimalen Randkräften im Gleichgewicht befindliche infinitesimale Fadennetz und seine Trägerfläche gelten die Gleichgewichtsbedingungen (I 1), (I 2) und die Grundgleichungen (I 3), (I 4). Diese Gleichungen stellen die Bedingungen für das allgemeinste derartige Fadennetz dar, da weder an die Fadenspannungen noch an die Netzstruktur noch an die Netzkurven selbst irgendwelche besonderen For-

derungen gestellt sind. Die Trägerfläche muß in jedem Punkt negativ gekrümmt oder eben sein.

Den Fall der Ebene als Trägerfläche wollen wir jedoch für alles Folgende von der Betrachtung ausschließen.

II. Fadennetze mit isotroper Spannungsverteilung und rhombischer Netzstruktur.

Unter unseren im Gleichgewicht befindlichen Fadennetzen mit infinitesimalen Fadenspannungen und mit infinitesimalen Netzmaschen betrachten wir jetzt spezielle Netze, die *isotrope Spannungsverteilung und rhombische Netzstruktur* besitzen sollen. Die isotrope Spannungsverteilung im Netz sei dabei durch die Forderung erklärt, daß in jedem Knotenpunkt des Netzes die Elementenpaare der Fadenspannungen einander gleich, also $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ sein sollen; in entsprechender Weise kann die rhombische Struktur des Netzes durch die Forderung erklärt werden, daß in jedem Knotenpunkt des Netzes die Elementenpaare der Fadenzlängen einander gleich, also $s_1 = s_2 = s$ sein sollen.

Für $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ und $s_1 = s_2 = s$ lauten die Gleichgewichtsbedingungen (I 1) und (I 2):

$$(II\ 1) \quad \sigma_u s - s_u \sigma + (\sigma s \cos \omega)_v = 0, \quad \sigma_v s - s_v \sigma + (\sigma s \cos \omega)_u = 0,$$

$$(II\ 2) \quad n_1 = -n_2 = n;$$

und die Grundgleichungen (I 3) und (I 4):

$$(II\ 3) \quad \left\{ \begin{array}{l} n_v - m_u = \left\{ -\frac{s_v}{s} \sin^2 \omega + \frac{1}{2} (\cos \omega)_u \right\} \frac{2n}{\sin^2 \omega} + \\ \quad + \left\{ \frac{s_u}{s} - \frac{s_v}{s} \cos \omega + \frac{1}{4} (\cos^2 \omega)_u \right\} \frac{2m}{\sin^2 \omega}, \\ n_u + m_v = \left\{ -\frac{s_u}{s} \sin^2 \omega + \frac{1}{2} (\cos \omega)_v \right\} \frac{2n}{\sin^2 \omega} - \\ \quad - \left\{ \frac{s_v}{s} - \frac{s_u}{s} \cos \omega + \frac{1}{4} (\cos^2 \omega)_v \right\} \frac{2m}{\sin^2 \omega}, \end{array} \right.$$

$$(II\ 4) \quad K = -\frac{n^2 + m^2}{\sin^2 \omega} = \frac{\omega_u v + (s g_2)_u + (s g_1)_v}{s^2 \sin \omega};$$

dabei hat man für die geodätischen Krümmungen der Netzkurven:

$$(II\ 5) \quad g_1 = \frac{(s \cos \omega)_u - s_v}{s^2 \sin \omega}, \quad g_2 = \frac{(s \cos \omega)_v - s_u}{s^2 \sin \omega}.$$

Ferner erhält man wegen $n_1 = -n_2$ jetzt für die mittlere Krümmung:

$$(II\ 6) \quad H = -\frac{\cos \omega}{\sin^2 \omega} m.$$

Zum Schluß dieses Kapitels wollen wir die Gleichgewichtsbedingungen (II 1) durch drei Beziehungen ersetzen, die abwechselnd den Schnittwinkel ω , die

Spannungsfunktion σ und die Bogenlängenfunktion s nicht mehr enthalten. Die Elimination von ω — partielle Ableitung der Gleichungen (II 1) nach u bzw. v und anschließende Subtraktion — liefert:

$$(II\ 7) \quad \frac{s_{uu} - s_{vv}}{s} = \frac{\sigma_{uu} - \sigma_{vv}}{\sigma}.$$

Die Elimination von σ — Auflösung der Gleichungen (II 1) nach $\frac{\sigma_u}{\sigma}$ und $\frac{\sigma_v}{\sigma}$:

$$\frac{\sigma_u}{\sigma} = \left\{ \frac{s_u}{s} (\cos^2 \omega + 1) - 2 \frac{s_v}{s} \cos \omega + \frac{1}{2} (\cos^2 \omega)_u - (\cos \omega)_v \right\} \frac{1}{\sin^2 \omega},$$

$$\frac{\sigma_v}{\sigma} = \left\{ \frac{s_v}{s} (\cos^2 \omega + 1) - 2 \frac{s_u}{s} \cos \omega + \frac{1}{2} (\cos^2 \omega)_v - (\cos \omega)_u \right\} \frac{1}{\sin^2 \omega},$$

partielle Ableitung dieser neuen Gleichungen nach v bzw. u und anschließende Subtraktion — liefert:

$$(II\ 8) \quad \left\{ \ln \frac{1 - \cos \omega}{1 + \cos \omega} \right\}_{uu} + 4 \left\{ \frac{(\ln s)_v - (\ln s)_u \cos \omega}{\sin^2 \omega} \right\}_u$$

$$= \left\{ \ln \frac{1 - \cos \omega}{1 + \cos \omega} \right\}_{vv} + 4 \left\{ \frac{(\ln s)_u - (\ln s)_v \cos \omega}{\sin^2 \omega} \right\}_v.$$

Die Elimination von s — völlig analog der von σ — liefert:

$$(II\ 9) \quad \left\{ \ln \frac{1 + \cos \omega}{1 - \cos \omega} \right\}_{uu} + 4 \left\{ \frac{(\ln \sigma)_v + (\ln \sigma)_u \cos \omega}{\sin^2 \omega} \right\}_u$$

$$= \left\{ \ln \frac{1 + \cos \omega}{1 - \cos \omega} \right\}_{vv} + 4 \left\{ \frac{(\ln \sigma)_u + (\ln \sigma)_v \cos \omega}{\sin^2 \omega} \right\}_v.$$

Zusammenfassung. Für Fadennetze mit isotroper Spannungsverteilung und rhombischer Netzstruktur gelten statt der allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen (I 1) und (I 2) jetzt die Gleichgewichtsbedingungen (II 1) und (II 2), an deren Stelle auch je zwei der hieraus abgeleiteten Beziehungen (II 7), (II 8) und (II 9) treten können. Die Trägerfläche genügt statt den allgemeinen Grundgleichungen (I 3) und (I 4) jetzt den Grundgleichungen (II 3) und (II 4).

III. Vier besondere Klassen von Fadennetzen mit isotroper Spannungsverteilung und rhombischer Netzstruktur.

Von unseren infinitesimalen Fadennetzen mit isotroper Spannungsverteilung und rhombischer Netzstruktur, die unter dem Einfluß von Randkräften im Gleichgewicht sind, betrachten wir in diesem Kapitel vier besondere Klassen. Bei jeder Klasse ist an das Netz noch je eine zusätzliche Forderung gestellt.

a) Geodätische Fadennetze, d. h. Fadennetze, bei denen die Netzkurven geodätische Linien der Trägerfläche sind. Sie genügen der zusätzlichen Bedingung $g_1 = g_2 = 0$.

Aus $g_1 = g_2 = 0$ folgt auf Grund der Gleichungen (II 5):

$$(s \cos \omega)_u - s_v = 0, \quad (s \cos \omega)_v - s_u = 0.$$

Mit Rücksicht hierauf lauten die Gleichgewichtsbedingungen (II 1):

$$s(\sigma_u + \sigma_v \cos \omega) = 0, \quad s(\sigma_v + \sigma_u \cos \omega) = 0,$$

woraus sich wegen $s \neq 0 \neq \sin \omega$ sofort σ als eine Konstante, etwa $= 1$, ergibt. Umgekehrt lauten für $\sigma = \text{konst.} \neq 0$ die Gleichgewichtsbedingungen (II 1):

$$(s \cos \omega)_u - s_v = 0, \quad (s \cos \omega)_v - s_u = 0;$$

hieraus ergibt sich auf Grund der Gleichungen (II 5) und wegen $s \neq 0 \neq \sin \omega$ wieder $g_1 = g_2 = 0$.

Bei geodätischen Fadennetzen⁵⁾ mit isotroper Spannungsverteilung haben also alle Fäden überall die gleiche Spannung. Umgekehrt haben Fadennetze mit überall gleicher, nicht verschwindender Fadenspannung stets geodätische Netzlinien.

Um nunmehr auch den Schnittwinkel ω und die Bogenlängenfunktion s der Netzkurven zu bestimmen, setzen wir zunächst in der Gleichgewichtsbedingung (II 9) $\sigma = 1$ und erhalten die Differentialgleichung:

$$\left\{ \ln \frac{1 + \cos \omega}{1 - \cos \omega} \right\}_{uu} = \left\{ \ln \frac{1 + \cos \omega}{1 - \cos \omega} \right\}_{vv},$$

in deren allgemeiner Lösung

$$\ln \frac{1 + \cos \omega}{1 - \cos \omega} = \ln P - \ln Q, \quad \text{d. h.} \quad \cos \omega = \frac{P - Q}{P + Q}$$

$P(u+v)$ und $Q(u-v)$ willkürliche, nicht verschwindende Funktionen der angegebenen Argumente sind. Trägt man schließlich die für σ und ω gewonnenen Ergebnisse in die Gleichgewichtsbedingungen (II 1) ein und bezeichnet mit ' die Ableitungen nach dem jeweiligen Argument, so erhält man:

$$\frac{s_u}{s} = \frac{P' + Q'}{P + Q}, \quad \frac{s_v}{s} = \frac{P' - Q'}{P + Q}, \quad \text{d. h.} \quad s = P + Q.$$

⁵⁾ Dabei braucht die Netzstruktur nicht notwendig rhombisch zu sein; denn der angegebene Satz läßt sich für $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ auch aus den allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen (I 1) und den Gleichungen (I 5) herleiten. — Bei geodätischen Fadennetzen kann auch an Stelle der Verknotung ein passendes Übereinanderlagern der idealen (also reibungslos übereinander gleitenden) Fäden treten. Solche Fadennetze sind, sofern ihre Trägerflächen Dreh-, Schrauben- bzw. Minimalflächen sind, bereits untersucht worden. Vgl. H. THOMAS, Über Flächen, auf denen sich besondere Arten von Netzen geodätischer Linien ausbreiten lassen. *Math. Zeitschr.* 44 (1938), S. 257.

Für geodätische Fadennetze mit isotroper Spannungsverteilung und rhombischer Netzstruktur ergeben sich somit die folgenden Gleichgewichtsbedingungen:

$$(III a 1) \quad s = P(u+v) + Q(u-v), \quad \sigma = 1, \quad \omega = \arccos \frac{P(u+v) - Q(u-v)}{P(u+v) + Q(u-v)}$$

$$(III a 2) \quad n_1 = -n_2 = n.$$

Die Trägerfläche des Netzes bestimmt sich aus diesen Gleichungen und den Grundgleichungen, welche jetzt lauten:

$$(III a 3) \quad \begin{cases} n_v - m_u = \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{P'}{P} - \frac{Q'}{Q} \right) - 2 \frac{P' - Q'}{P + Q} \right\} n + \\ \quad + \left\{ \frac{P'}{P} + \frac{Q'}{Q} + \frac{1}{2} \left(\frac{P'}{P} - \frac{Q'}{Q} \right) \frac{P - Q}{P + Q} \right\} m, \\ n_u + m_v = \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{P'}{P} + \frac{Q'}{Q} \right) - 2 \frac{P' + Q'}{P + Q} \right\} n - \\ \quad - \left\{ \frac{P'}{P} - \frac{Q'}{Q} + \frac{1}{2} \left(\frac{P'}{P} + \frac{Q'}{Q} \right) \frac{P - Q}{P + Q} \right\} m, \end{cases}$$

$$(III a 4) \quad K = -\frac{(P+Q)^2}{4PQ} (n^2 + m^2) \\ = -\frac{1}{4(P+Q)^3} \left\{ P \left(2 \frac{Q''}{Q} - \frac{Q'^2}{Q^2} \right) + P \left(2 \frac{P''}{P} - 3 \frac{P'^2}{P^2} \right) + \right. \\ \left. + Q \left(2 \frac{P''}{P} - \frac{P'^2}{P^2} \right) + Q \left(2 \frac{Q''}{Q} - 3 \frac{Q'^2}{Q^2} \right) \right\}.$$

Die erste Grundform

$$s^2(u'^2 + 2u'v' \cos \omega + v'^2)$$

der Trägerfläche schreibt sich, wenn wir gemäß den Gleichungen (III a 1) die Funktionen s und ω durch $P(u+v)$ und $Q(u-v)$ ersetzen, in der Form:

$$(P+Q)^2 \left(u'^2 + 2u'v' \frac{P-Q}{P+Q} + v'^2 \right).$$

Durch eine geeignete Parametertransformation kann nun das infinitesimal-rhombische u/v -Netz aus den geodätischen Netzlinien übergeführt werden in ein infinitesimal-quadratisches (isothermes) \bar{u}/\bar{v} -Netz aus den winkelhalbierenden Kurven der Netzlinien: wir setzen $A(u+v) = \bar{u}$, $B(u-v) = \bar{v}$, wobei $A'^2 = P$, $B'^2 = Q$ sein soll, und schreiben für $P(u+v) = \bar{P}(\bar{u})$, $Q(u-v) = \bar{Q}(\bar{v})$. Nach einer einfachen Umrechnung erscheint dann die erste Grundform unserer Trägerfläche in der LIOUVILLESCHEN Form⁶⁾:

$$(\bar{P} + \bar{Q}) (\bar{u}'^2 + \bar{v}'^2).$$

⁶⁾ Vgl. A. VOSS, Über diejenigen Flächen, welche durch zwei Scharen von Kurven konstanter geodätischer Krümmung in infinitesimale Rhomben zerlegt werden. Sitzungsberichte der Bayr. Akademie 36 (1906), S. 247.

Ergebnis. *Ein geodätisches Fadennetz mit isotroper Spannungsverteilung und rhombischer Netzstruktur besitzt als Trägerfläche stets eine LIOUVILLESche Fläche. Die beiden (orthogonalen) Scharen der winkelhalbierenden Kurven unserer geodätischen Netzlinien bestehen aus den konfokalen Ellipsen und Hyperbeln der LIOUVILLESchen Fläche.*

b) **Äquidistante Fadennetze**, d. h. Fadennetze mit infinitesimalen Rhomben konstanter Seitenlänge (Tschebyscheff-Netze). Sie genügen der zusätzlichen Bedingung $s = \text{konst.}$; wir setzen $s = 1$ und verfügen damit über den Größenmaßstab.

Für $s = 1$ vereinfacht sich die Gleichgewichtsbedingung (II 8) und wir erhalten die Differentialgleichung:

$$\left\{ \ln \frac{1 - \cos \omega}{1 + \cos \omega} \right\}_{uu} = \left\{ \ln \frac{1 - \cos \omega}{1 + \cos \omega} \right\}_{vv};$$

ihre allgemeine Lösung lautet

$$\ln \frac{1 - \cos \omega}{1 + \cos \omega} = \ln P - \ln Q, \quad \text{d. h. } \cos \omega = \frac{Q - P}{Q + P},$$

wobei $P(u+v)$ und $Q(u-v)$ wieder willkürliche, nicht verschwindende Funktionen der angegebenen Argumente sind. Trägt man schließlich diese Ausdrücke für s und ω in die Gleichgewichtsbedingungen (II 1) ein, so erhält man:

$$\frac{\sigma_u}{\sigma} = \frac{P' + Q'}{P + Q}, \quad \frac{\sigma_v}{\sigma} = \frac{P' - Q'}{P + Q}, \quad \text{d. h. } \sigma = P + Q.$$

Für äquidistante Fadennetze mit isotroper Spannungsverteilung und rhombischer Netzstruktur ergeben sich somit die folgenden Gleichgewichtsbedingungen:

$$\text{(III b 1)} \quad s = 1, \quad \sigma = P(u+v) + Q(u-v), \quad \omega = \arccos \frac{Q(u-v) - P(u+v)}{Q(u-v) + P(u+v)},$$

$$\text{(III b 2)} \quad n_1 = -n_2 = n.$$

Die Trägerfläche des Netzes bestimmt sich aus diesen Gleichungen und den Grundgleichungen, welche jetzt lauten:

$$\text{(III b 3)} \quad \begin{cases} n_v - m_u = -\frac{1}{2} \left(\frac{P'}{P} - \frac{Q'}{Q} \right) n - \frac{1}{2} \left(\frac{P'}{P} - \frac{Q'}{Q} \right) \frac{Q - P}{Q + P} m, \\ n_u + m_v = -\frac{1}{2} \left(\frac{P'}{P} + \frac{Q'}{Q} \right) n + \frac{1}{2} \left(\frac{P'}{P} + \frac{Q'}{Q} \right) \frac{Q - P}{Q + P} m, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{(III b 4)} \quad K &= -\frac{(P+Q)^2}{4PQ} (n^2 + m^2) \\ &= -\frac{1}{4(P+Q)} \left\{ P \left(2 \frac{Q''}{Q} - \frac{Q'^2}{Q^2} \right) + P \left(2 \frac{P''}{P} - 3 \frac{P'^2}{P^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + Q \left(2 \frac{P''}{P} - \frac{P'^2}{P^2} \right) + Q \left(2 \frac{Q''}{Q} - 3 \frac{Q'^2}{Q^2} \right) \right\}. \end{aligned}$$

c) **Konjugierte Fadennetze**, d. h. Fadennetze, bei denen die Netzkurven aus zwei konjugierten Kurvenscharen der Trägerfläche bestehen. Sie genügen der zusätzlichen Bedingung $m = 0$.

Für $m = 0$ lauten die Grundgleichungen (II 3):

$$\frac{n_v}{n} = -2 \frac{s_v}{s} + \frac{(\cos \omega)_u}{\sin^2 \omega}, \quad \frac{n_u}{n} = -2 \frac{s_u}{s} + \frac{(\cos \omega)_v}{\sin^2 \omega}.$$

Durch partielle Ableitung dieser Gleichungen nach u bzw. v und anschließende Subtraktion erhält man:

$$\left\{ \frac{(\cos \omega)_u}{\sin^2 \omega} \right\}_u = \left\{ \frac{(\cos \omega)_v}{\sin^2 \omega} \right\}_v,$$

d. h.

$$\left\{ \ln \frac{1 + \cos \omega}{1 - \cos \omega} \right\}_{uu} = \left\{ \ln \frac{1 + \cos \omega}{1 - \cos \omega} \right\}_{vv};$$

hieraus folgt genau wie im Abschnitt a):

$$\cos \omega = \frac{P - Q}{P + Q},$$

wobei $P(u+v)$ und $Q(u-v)$ wieder willkürliche, nicht verschwindende Funktionen der angegebenen Argumente sind.

Für konjugierte Fadennetze mit isotroper Spannungsverteilung und rhombischer Netzstruktur ergeben sich somit die folgenden Gleichgewichtsbedingungen:

$$(III \text{ c } 1) \quad \begin{cases} \sigma_u s - s_u \sigma + (\sigma s \cos \omega)_v = 0, & \sigma_v s - s_v \sigma + (\sigma s \cos \omega)_u = 0, \\ \text{wobei } \cos \omega = \frac{P(u+v) - Q(u-v)}{P(u+v) + Q(u-v)} \text{ ist,} \end{cases}$$

$$(III \text{ c } 2) \quad n_1 = -n_2 = n, \quad m = 0.$$

Die Trägerfläche des Netzes bestimmt sich aus diesen Gleichungen und den Grundgleichungen, welche jetzt lauten:

$$(III \text{ c } 3) \quad \frac{n_v}{n} = -2 \frac{s_v}{s} + \frac{1}{2} \left(\frac{P'}{P} - \frac{Q'}{Q} \right), \quad \frac{n_u}{n} = -2 \frac{s_u}{s} + \frac{1}{2} \left(\frac{P'}{P} + \frac{Q'}{Q} \right),$$

$$(III \text{ c } 4) \quad K = -\frac{(P+Q)^2}{4PQ} n^2 \\ = -\frac{(P+Q)^2}{4s^2 P Q} \left\{ \left(\frac{s_u}{s} \right)_u - \left(\frac{s_u}{s} \right)_v \frac{P-Q}{P+Q} - \frac{s_u}{s} \frac{1}{P+Q} \left(Q \frac{P'}{P} + P \frac{Q'}{Q} \right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{s_v}{s} \right)_v - \left(\frac{s_v}{s} \right)_u \frac{P-Q}{P+Q} - \frac{s_v}{s} \frac{1}{P+Q} \left(Q \frac{P'}{P} - P \frac{Q'}{Q} \right) \right\} + \\ + \frac{1}{4s^2 (P+Q)} \left\{ P \left(2 \frac{Q''}{Q} - \frac{Q'^2}{Q^2} \right) + P \left(2 \frac{P''}{P} - 3 \frac{P'^2}{P^2} \right) + \right. \\ \left. + Q \left(2 \frac{P''}{P} - \frac{P'^2}{P^2} \right) + Q \left(2 \frac{Q''}{Q} - 3 \frac{Q'^2}{Q^2} \right) \right\}.$$

Da nach Gleichung (II 6) für $m = 0$ die mittlere Krümmung H verschwindet, ist die Trägerfläche hier stets eine *Minimalfläche*.

Die zweite Grundform

$$s^2 (n_1 u'^2 + 2 m u' v' + n_2 v'^2)$$

der Trägerfläche schreibt sich mit Rücksicht auf die Gleichungen (III c 2) in der Form:

$$n s^2 (u'^2 - v'^2).$$

Durch die Parametertransformation $u + v = \bar{u}$, $u - v = \bar{v}$ führen wir das rhombische u/v -Netz aus den konjugierten Netzlinien in das orthogonale \bar{u}/\bar{v} -Netz aus den winkelhalbierenden Diagonalkurven der Netzlinien über. Die zweite Grundform der Trägerfläche erscheint dann in der Form:

$$n s^2 \bar{u}' \bar{v}',$$

d. h. die winkelhalbierenden Diagonalkurven des konjugierten Fadennetzes sind die Schmiegtangentenkurven der Trägerfläche.

Ergebnis. *Ein konjugiertes Fadennetz mit isotroper Spannungsverteilung und rhombischer Netzstruktur besitzt als Trägerfläche stets eine Minimalfläche. Die beiden (orthogonalen) Scharen der winkelhalbierenden Kurven unserer konjugierten Netzlinien bestehen aus den Schmiegtangentenkurven der Minimalfläche.*

d) Schmiegtangenten-Fadennetze, d. h. Fadennetze, bei denen die Netzkurven von den Schmiegtangentenkurven der Trägerfläche gebildet werden. Sie genügen der zusätzlichen Forderung $n_1 = -n_2 = n = 0$.

Für $n = 0$ lauten die Grundgleichungen (II 3):

$$\begin{aligned} -\frac{m_u}{m} &= \left\{ \frac{s_u}{s} - \frac{s_v}{s} \cos \omega + \frac{1}{4} (\cos^2 \omega)_u \right\} \frac{2}{\sin^2 \omega}, \\ -\frac{m_v}{m} &= \left\{ \frac{s_v}{s} - \frac{s_u}{s} \cos \omega + \frac{1}{4} (\cos^2 \omega)_v \right\} \frac{2}{\sin^2 \omega}. \end{aligned}$$

Durch partielle Ableitung dieser Gleichungen nach v bzw. u und anschließende Subtraktion erhält man die Gleichung

$$\left\{ \frac{(\ln s)_v - (\ln s)_u \cos \omega}{\sin^2 \omega} \right\}_u = \left\{ \frac{(\ln s)_u - (\ln s)_v \cos \omega}{\sin^2 \omega} \right\}_v,$$

welche mit der Gleichung (II 8) kombiniert schließlich liefert:

$$\left\{ \ln \frac{1 - \cos \omega}{1 + \cos \omega} \right\}_{uu} = \left\{ \ln \frac{1 - \cos \omega}{1 + \cos \omega} \right\}_{vv};$$

hieraus folgt genau wie im Abschnitt b):

$$\cos \omega = \frac{Q - P}{Q + P},$$

wobei $P(u+v)$ und $Q(u-v)$ wieder willkürliche, nicht verschwindende Funktionen der angegebenen Argumente sind.

Für Schmiegtangenten-Fadennetze mit isotroper Spannungsverteilung und rhombischer Netzstruktur ergeben sich somit die folgenden Gleichgewichtsbedingungen:

$$(III \text{ d } 1) \left\{ \begin{aligned} \sigma_u s - s_u \sigma + (\sigma s \cos \omega)_v &= 0, & \sigma_v s - s_v \sigma + (\sigma s \cos \omega)_u &= 0, \\ \text{wobei } \cos \omega &= \frac{Q(u-v) - P(u+v)}{Q(u-v) + P(u+v)} \text{ ist,} \end{aligned} \right.$$

$$(III \text{ d } 2) \quad n_1 = -n_2 = n = 0.$$

Die Trägerfläche des Netzes bestimmt sich aus diesen Gleichungen und den Grundgleichungen, welche jetzt lauten:

$$(III\ d\ 3) \quad \begin{cases} \frac{m_u}{m} = -\frac{s_u}{s} \frac{(P+Q)^2}{2PQ} - \frac{s_v}{s} \frac{P^2-Q^2}{2PQ} + \frac{1}{2} \left(\frac{P'}{P} - \frac{Q'}{Q} \right) \frac{Q-P}{Q+P}, \\ \frac{m_v}{m} = -\frac{s_v}{s} \frac{(P+Q)^2}{2PQ} - \frac{s_u}{s} \frac{P^2-Q^2}{2PQ} + \frac{1}{2} \left(\frac{P'}{P} + \frac{Q'}{Q} \right) \frac{Q-P}{Q+P}, \end{cases}$$

$$(III\ d\ 4) \quad K = -\frac{(P+Q)^2}{4PQ} m^2 \\ = -\frac{(P+Q)^2}{4s^2PQ} \left\{ \left(\frac{s_u}{s} \right)_u - \left(\frac{s_u}{s} \right)_v \frac{Q-P}{Q+P} + \frac{s_u}{s} \frac{P'+Q'}{P+Q} + \right. \\ \left. + \left(\frac{s_v}{s} \right)_v - \left(\frac{s_v}{s} \right)_u \frac{Q-P}{Q+P} + \frac{s_v}{s} \frac{P'-Q'}{P+Q} \right\} - \\ - \frac{1}{4s^2(P+Q)} \left\{ P \left(2 \frac{Q''}{Q} - \frac{Q'^2}{Q^2} \right) + P \left(2 \frac{P''}{P} - 3 \frac{P'^2}{P^2} \right) + \right. \\ \left. + Q \left(2 \frac{P''}{P} - \frac{P'^2}{P^2} \right) + Q \left(2 \frac{Q''}{Q} - 3 \frac{Q'^2}{Q^2} \right) \right\}.$$

IV. Vier Sonderklassen der in Kapitel III betrachteten vier Klassen von Fadennetzen mit isotroper Spannungsverteilung und rhombischer Netzstruktur.

Es werden in diesem Kapitel Fadennetze, die jeweils zwei der im vorangehenden Kapitel III betrachteten vier Netzklassen zugleich angehören, zu Sonderklassen zusammengefaßt und ihre Haupteigenschaften besprochen. Von den sechs Möglichkeiten zur Bildung solcher Sonderklassen führen nur vier zu Netzen im Sinne unserer Problemstellung [Abschnitte α) bis δ)]. Zwei Möglichkeiten scheiden aus; es sind dies: Fadennetze, die geodätische und äquidistante Netze zugleich sind, und Fadennetze, die konjugierte und Schmiegtangenten-Netze zugleich sind. Denn im ersten Fall ergeben die Gleichungen (II 5) für $g_1 = g_2 = 0$ und $s = 1$ unmittelbar $\omega = \text{konst.}$; im zweiten Fall ist $n = m = 0$. Beide Fälle liefern daher nach Gleichung (II 4) Trägerflächen mit verschwindendem GAUSS'schen Krümmungsmaß K , scheidet also gemäß der am Schluß von Kapitel I gemachten Voraussetzung aus.

α) Geodätische Fadennetze, die zugleich konjugierte Fadennetze sind. Gemäß der Forderung, daß jetzt die Gleichungen (III a 1 bis 4) und zugleich (III c 1 bis 4) erfüllt sein müssen, ergeben sich als Gleichgewichtsbedingungen für das Netz:

$$(IV\ \alpha\ 1) \quad s = P(u+v) + Q(u-v), \quad \sigma = 1, \quad \omega = \arccos \frac{P(u+v) - Q(u-v)}{P(u+v) + Q(u-v)},$$

$$(IV\ \alpha\ 2) \quad n_1 = -n_2 = n, \quad m = 0,$$

und als Grundgleichungen für die Trägerfläche:

$$(IV \alpha 3) \quad \frac{n_v}{n} = \frac{1}{2} \left(\frac{P'}{P} - \frac{Q'}{Q} \right) - 2 \frac{P' - Q'}{P + Q}, \quad \frac{n_u}{n} = \frac{1}{2} \left(\frac{P'}{P} + \frac{Q'}{Q} \right) - 2 \frac{P' + Q'}{P + Q},$$

$$(IV \alpha 4) \quad K = - \frac{(P+Q)^2}{4 P Q} n^2 \\ = - \frac{1}{4 (P+Q)^3} \left\{ P \left(2 \frac{Q''}{Q} - \frac{Q'^2}{Q^2} \right) + P \left(2 \frac{P''}{P} - 3 \frac{P'^2}{P^2} \right) + \right. \\ \left. + Q \left(2 \frac{P''}{P} - \frac{P'^2}{P^2} \right) + Q \left(2 \frac{Q''}{Q} - 3 \frac{Q'^2}{Q^2} \right) \right\}.$$

Aus den Grundgleichungen (IV α 3) folgt durch Integration

$$(IV \alpha 5) \quad n = 2k \frac{\sqrt{PQ}}{(P+Q)^2}$$

mit der Integrationskonstanten $k \neq 0$ (im Fall $k = 0$ wäre $n = 0 = m$, also die Trägerfläche entgegen unserer Voraussetzung eben), so daß das GAUSSsche Theorema egregium (IV α 4) lautet:

$$(IV \alpha 6) \quad P \left(2 \frac{Q''}{Q} - \frac{Q'^2}{Q^2} \right) + P \left(2 \frac{P''}{P} - 3 \frac{P'^2}{P^2} - 4k^2 \right) + \\ + Q \left(2 \frac{P''}{P} - \frac{P'^2}{P^2} \right) + Q \left(2 \frac{Q''}{Q} - 3 \frac{Q'^2}{Q^2} - 4k^2 \right) = 0.$$

Unser geodätisches und zugleich konjugiertes Fadennetz muß — als konjugiertes Fadennetz — stets auf einer *Minimalfläche* liegen und zwar so, daß die winkelhalbierenden Diagonalkurven des rhombischen u/v -Fadennetzes ein orthogonales \bar{u}/\bar{v} -Netz aus den Schmiegtangentenkurven der Trägerfläche darstellen [vgl. Abschnitt III c)]. Da aber unser Fadennetz auch geodätisch sein soll, werden sich für Netz und Trägerfläche noch zusätzliche Eigenschaften ergeben, die jetzt ermittelt werden sollen. Die erste bzw. zweite Grundform der Trägerfläche

$$s^2(u'^2 + 2u'v' \cos \omega + v'^2) \quad \text{bzw.} \quad s^2(n_1 u'^2 + 2m u'v' + n_2 v'^2)$$

schreibt sich mit Rücksicht auf die Gleichungen (IV α 1), (IV α 2) und (IV α 5):

$$(P + Q)^2 \left(u'^2 + 2u'v' \frac{P-Q}{P+Q} + v'^2 \right) \quad \text{bzw.} \quad 2k \sqrt{PQ} (u'^2 - v'^2).$$

Bei der Parametertransformation $u + v = \bar{u}$, $u - v = \bar{v}$ vom u/v -Fadennetz auf das \bar{u}/\bar{v} -Diagonalmnetz erhalten wir demgemäß für die beiden Grundformen der Trägerfläche:

$$(IV \alpha 7) \quad (P + Q) (P \bar{u}'^2 + Q \bar{v}'^2) \quad \text{bzw.} \quad 2k \sqrt{PQ} \bar{u}' \bar{v}',$$

wobei die Funktionen $P(\bar{u})$ und $Q(\bar{v})$, jetzt nur noch von jeweils einem Parameter abhängig, nach wie vor der Funktionalgleichung (IV α 6) genügen.

Wie in einer früheren Arbeit gezeigt wurde⁷⁾, kann diese Funktionalgleichung aber für $k \neq 0$ nur in folgenden beiden Fällen bestehen:

1. $P = -Q = \text{konst.}$ Da hierfür nach Gleichung (IV α 7) die erste Grundform verschwindet, scheidet dieser Fall aus.

2. $P = \text{konst.}$ oder $Q = \text{konst.}$; von diesen beiden gleichberechtigten Möglichkeiten wählen wir $P = C = \text{konst.}$, $Q(\bar{v}) \neq \text{konst.}$ Wie aus (IV α 7) ersichtlich ist, enthält jetzt keine der sechs Grundgrößen mehr den Parameter \bar{u} , d. h. die Trägerfläche muß eine Schraubenfläche (oder Drehfläche) mit den \bar{u} -Linien als Bahnschraubenlinien (bzw. Breitenkreisen) sein. Da diese \bar{u} -Linien aber zugleich Schmiegtangentenkurven sind, ist unsere gesuchte Trägerfläche notwendig die *Wendelschraubenfläche*. Ihre geradlinigen Erzeugenden und ihre Bahnschraubenlinien müssen also die winkelhalbierenden Diagonalkurven unseres u/v -Fadennetzes sein, schneiden also dessen Netzlinien unter den Winkeln

$$\pm \frac{\omega}{2} = \frac{1}{2} \arccos \frac{C - Q(\bar{v})}{C + Q(\bar{v})} \quad \text{bzw.} \quad \pm \frac{\pi - \omega}{2}.$$

Da diese Winkel längs einer Schraubenlinie $\bar{v} = \text{konst.}$ stets konstant sind, müssen die geodätischen Netzlinien unseres u/v -Fadennetzes durch Verschraubung irgendeines Paares sich schneidender geodätischer Netzlinien auseinander hervorgehen. Weiter ist jetzt ersichtlich, daß es auf einer Wendelschraubenfläche mit Rücksicht auf die einfache Mannigfaltigkeit aller Winkel $\omega(\bar{v})$, die zu irgendeiner Schraubenlinie $\bar{v} = \text{konst.}$ gehören, auch ∞^1 verschiedene geodätische und zugleich konjugierte u/v -Netze geben muß.

Daß diese ∞^1 u/v -Netze der Wendelschraubenfläche, welche sämtlich das \bar{u}/\bar{v} -Netz der Schmiegtangentenkurven als Diagonalnetz besitzen, tatsächlich im Gleichgewicht befindliche Fadennetze darstellen, wurde bereits in einer früheren Untersuchung⁸⁾ durch direkten Ansatz nachgewiesen.

Wir zeigen jetzt noch, daß es insgesamt ∞^1 formverschiedene, d. h. nicht zueinander ähnliche, geodätische und zugleich konjugierte Fadennetze gibt, und daß wir dabei drei verschiedene Typen unterscheiden können. Da alle Wendelschraubenflächen zueinander ähnlich sind, können wir allen unseren Fadennetzen eine einzige Wendelschraubenfläche mit der reduzierten Ganghöhe $h = 1$ zugrunde legen. Zwei beliebige geodätische Netzlinien, welche irgendein u/v -Fadennetz der Wendelschraubenfläche festlegen, schneiden sich unter dem Winkel $\omega(\bar{v})$ in einem Punkt, dessen Abstand von der Schraubungs-

⁷⁾ H. THOMAS, Zur Frage des Gleichgewichts von Tschebyscheff-Netzen aus verknoteten und gespannten Fäden. Math. Zeitschr. 47 (1940), S. 73.

⁸⁾ H. THOMAS, Über Flächen, auf denen sich besondere Arten von Netzen geodätischer Linien ausbreiten lassen. Math. Zeitschr. 44 (1938), S. 262.

achse mit $r(\bar{v})$ bezeichnet sei. Für diese beiden geodätischen Linien und folglich für alle Netzlinsen überhaupt gilt dann der verallgemeinerte CLAIRAUTSche Satz:

$$(r^2 + 1) \sin^2 \frac{\omega}{2} = a^2 > 0.$$

Den ∞^1 Werten der Konstanten a^2 entsprechen ∞^1 Fadennetze, und zwar lassen sich je nach dem Betrag von a^2 drei Netztypen unterscheiden:

Erster Netztyp: $a^2 < 1$; dann ist $0 \leq r < \infty$. Die geodätischen Netzlinsen schneiden die Schraubungsachse $r = 0$ unter dem Winkel $\frac{\omega}{2} = \arcsin a$; das Netz erstreckt sich also über die ganze Wendelschraubenfläche.

Zweiter Netztyp: $a^2 > 1$; dann ist $\sqrt{a^2 - 1} < r < \infty$. Die geodätischen Netzlinsen berühren die Schraubenlinie vom Radius $r = \sqrt{a^2 - 1}$ (denn für diesen r -Wert wird der Schnittwinkel $\omega = \pi$); das Netz erstreckt sich also über den ganzen Bereich auf der Wendelschraubenfläche außerhalb dieser Schraubenlinie.

Dritter Netztyp: $a^2 = 1$; dann ist $0 < r < \infty$. Die geodätischen Netzlinsen berühren asymptotisch die Schraubungsachse $r = 0$ (denn für diesen r -Wert wird der Schnittwinkel $\omega = \pi$); das Netz erstreckt sich also über die ganze Wendelschraubenfläche mit Ausnahme der Schraubungsachse selbst.

Zusammenfassend hat man also folgendes Ergebnis:

Ein Fadennetz mit isotroper Spannungsverteilung und rhombischer Netzstruktur, das geodätisches und konjugiertes Netz zugleich ist, besitzt als Trägerfläche stets eine Wendelschraubenfläche. Es gibt ∞^1 formverschiedene derartige Netze, wobei sich drei Netztypen unterscheiden lassen. Die beiden Scharen der winkelhalbierenden Kurven unserer Netzlinsen bestehen stets aus den geradlinigen Erzeugenden und den Bahnschraubenlinien der Wendelschraubenfläche.

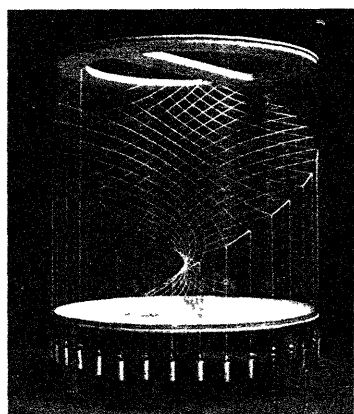


Fig. 1.

Zur Veranschaulichung dieser Fadennetze dient das abgebildete Modell der Wendelschraubenfläche; die Netzform entspricht dabei dem ersten Typ.

β) Äquidistante Fadennetze, die zugleich Schmiegtangenten-Fadennetze sind. Gemäß der Forderung, daß jetzt die Gleichungen (III b 1 bis 4)

und (III d 1 bis 4) zugleich erfüllt sein müssen, ergeben sich als Gleichgewichtsbedingungen für das Netz:

$$(IV \beta 1) \quad s = 1, \quad \sigma = P(u+v) + Q(u-v), \quad \omega = \arccos \frac{Q(u-v) - P(u+v)}{Q(u-v) + P(u+v)},$$

$$(IV \beta 2) \quad n = 0,$$

und als Grundgleichungen für die Trägerfläche:

$$(IV \beta 3) \quad \frac{m_u}{m} = \frac{1}{2} \left(\frac{P'}{P} - \frac{Q'}{Q} \right) \frac{Q-P}{Q+P}, \quad \frac{m_v}{m} = \frac{1}{2} \left(\frac{P'}{P} + \frac{Q'}{Q} \right) \frac{Q-P}{Q+P},$$

$$(IV \beta 4) \quad K = - \frac{(P+Q)^2}{4PQ} m^2 \\ = - \frac{1}{4(P+Q)} \left\{ P \left(2 \frac{Q''}{Q} - \frac{Q'^2}{Q^2} \right) + P \left(2 \frac{P''}{P} - 3 \frac{P'^2}{P^2} \right) + \right. \\ \left. + Q \left(2 \frac{P''}{P} - \frac{P'^2}{P^2} \right) + Q \left(2 \frac{Q''}{Q} - 3 \frac{Q'^2}{Q^2} \right) \right\}.$$

Aus den Gleichungen (IV β 3) folgt durch Integration

$$(IV \beta 5) \quad m = 2k \frac{\sqrt{PQ}}{P+Q}$$

mit der Integrationskonstanten $k \neq 0$ (im Fall $k = 0$ wäre $m = 0 = n$, also die Trägerfläche entgegen unserer Voraussetzung eben), so daß wir für das GAUSSsche Theorema egregium (IV β 4) jetzt

$$(IV \beta 6) \quad P \left(2 \frac{Q''}{Q} - \frac{Q'^2}{Q^2} \right) + P \left(2 \frac{P''}{P} - 3 \frac{P'^2}{P^2} - 4k^2 \right) + \\ + Q \left(2 \frac{P''}{P} - \frac{P'^2}{P^2} \right) + Q \left(2 \frac{Q''}{Q} - 3 \frac{Q'^2}{Q^2} - 4k^2 \right) = 0$$

und für das GAUSSsche Krümmungsmaß

$$K = -k^2 = \text{konst.}$$

erhalten. Die Trägerfläche unseres Fadennetzes ist also eine *Fläche konstanter negativer Krümmung*. Zu ihrer genaueren Bestimmung führen wir durch die Parametertransformation $u+v = \bar{u}$, $u-v = \bar{v}$ unser rhombisches u/v -Fadennetz aus den Schmiegtangentenkurven in sein orthogonales \bar{u}/\bar{v} -Diagonaletz aus den Krümmungslinien der Trägerfläche über. Hierbei gehen die beiden Grundformen der Trägerfläche [vgl. die Gleichungen (IV β 1), (IV β 2) und (IV β 5)]

$$u'^2 + 2u'v' \frac{Q-P}{Q+P} + v'^2 \quad \text{bzw.} \quad 4k \frac{\sqrt{PQ}}{P+Q} u'v'$$

über in

$$(IV \beta 7) \quad \frac{1}{P+Q} (Q \bar{u}'^2 + P \bar{v}'^2) \quad \text{bzw.} \quad k \frac{\sqrt{PQ}}{P+Q} (\bar{u}'^2 - \bar{v}'^2),$$

wobei die Funktionen $P(\bar{u})$ und $Q(\bar{v})$, jetzt nur noch von jeweils einem Parameter abhängig, nach wie vor der Funktionalgleichung (IV β 6) genügen. Diese Funktionalgleichung ist identisch mit der im vorangehenden Abschnitt betrachteten Funktionalgleichung (IV α 6), kann also für $k \neq 0$ wieder nur in den folgenden beiden Fällen bestehen:

1. $P = -Q = \text{konst.}$ Da hierfür nach Gleichung (IV β 7) die erste Grundform unendlich wird, scheidet dieser Fall aus.

2. $P = \text{konst.}$ oder $Q = \text{konst.}$; von diesen beiden gleichberechtigten Möglichkeiten wählen wir wieder $P = C = \text{konst.}$, $Q(\bar{v}) \neq \text{konst.}$ Wie aus (IV β 7) ersichtlich ist, enthält jetzt keine der sechs Grundgrößen mehr den Parameter \bar{u} , d. h. die Trägerfläche muß eine Drehfläche (oder Schraubfläche) mit den \bar{u} -Linien als Breitenkreisen (bzw. Bahnschraubelinien) sein. Da diese \bar{u} -Linien aber zugleich Krümmungslinien sind, ist unsere gesuchte Fläche notwendig eine *Drehfläche*.

Daß tatsächlich die Schmiegtangentennetze *aller* Drehflächen konstanter negativer Krümmung im Gleichgewicht befindliche Fadennetze darstellen, wurde bereits in einer früheren Untersuchung⁷⁾ durch direkten Ansatz nachgewiesen.

Wir haben somit folgendes Ergebnis:

Ein Fadennetz mit isotroper Spannungsverteilung und rhombischer Netzstruktur, das äquidistantes und Schmiegtangenten-Netz zugleich ist, besitzt als Trägerfläche stets eine Drehfläche konstanter negativer Krümmung. Entsprechend den ∞^1 formverschiedenen Trägerflächen gibt es ∞^1 formverschiedene derartige Netze, wobei sich entsprechend den drei Typen der Trägerfläche auch drei Netztypen unterscheiden lassen. Die beiden Scharen der winkelhalbierenden Kurven unserer Netzlinien bestehen stets aus den Meridiankurven und Breitenkreisen der Drehfläche.

Modelle zur Veranschaulichung dieser Fadennetze sind in der erwähnten Arbeit⁷⁾ abgebildet.

γ) Geodätische Fadennetze, die zugleich Schmiegtangenten-Fadennetze sind. Da geodätische Schmiegtangentenkurven stets Gerade sein müssen, und da Netze aus zwei Geradenscharen nur auf den negativ gekrümmten Flächen zweiter Ordnung existieren, hat man hier nur das triviale Ergebnis:

Ein Fadennetz mit isotroper Spannungsverteilung und rhombischer Netzstruktur, das geodätisches und Schmiegtangenten-Netz zugleich ist, besteht stets aus den beiden Geradenscharen einer negativ gekrümmten Fläche zweiter Ordnung⁹⁾.

δ) Äquidistante Fadennetze, die zugleich konjugierte Fadennetze sind. Gemäß der Forderung, daß jetzt die Gleichungen (III b 1 bis 4) und (III c 2) zugleich erfüllt sein müssen, ergeben sich als Gleichgewichtsbedingungen für das Netz:

$$(IV \delta 1) \quad s = 1, \quad \sigma = P(u+v) + Q(u-v), \quad \omega = \arccos \frac{Q(u-v) - P(u+v)}{Q(u-v) + P(u+v)}$$

$$(IV \delta 2) \quad n_1 = -n_2 = n, \quad m = 0,$$

⁹⁾ Dieser Satz gilt natürlich auch für Netze mit allgemeiner Spannungsverteilung und allgemeiner Netzstruktur.

und als Grundgleichungen für die Trägerfläche:

$$(IV \delta 3) \quad \frac{n_v}{n} = -\frac{1}{2} \left(\frac{P'}{P} - \frac{Q'}{Q} \right), \quad \frac{n_u}{n} = -\frac{1}{2} \left(\frac{P'}{P} + \frac{Q'}{Q} \right),$$

$$(IV \delta 4) \quad K = -\frac{(P+Q)^2}{4PQ} n^2 \\ = -\frac{1}{4(P+Q)} \left\{ P \left(2 \frac{Q''}{Q} - \frac{Q'^2}{Q^2} \right) + P \left(2 \frac{P''}{P} - 3 \frac{P'^2}{P^2} \right) + \right. \\ \left. + Q \left(2 \frac{P''}{P} - \frac{P'^2}{P^2} \right) + Q \left(2 \frac{Q''}{Q} - 3 \frac{Q'^2}{Q^2} \right) \right\}.$$

Unser äquidistantes und zugleich konjugiertes Fadennetz muß — als konjugiertes Fadennetz — stets auf einer *Minimalfläche* liegen und zwar so, daß die winkelhalbierenden Diagonalkurven des rhombischen Fadennetzes ein orthogonales Netz aus den Schmiegtangentenkurven der Trägerfläche darstellen. Da aber unser Fadennetz auch äquidistant sein soll, werden sich für Netz und Trägerfläche noch zusätzliche Eigenschaften ergeben, von denen einige grundlegende jetzt angegeben werden sollen. Aus den Gleichungen $s^2 = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = 1$ ergibt sich durch partielle Ableitung: $\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_u = 0$ und $\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_v = 0$. Aus den beiden letzten Gleichungen und der Beziehung $m s^4 \sin \omega = \mathbf{x}_{uv} \cdot (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) = 0$ folgt dann $\mathbf{x}_{uv} = 0$, d. h. $\mathbf{x} = \mathfrak{A}(u) + \mathfrak{B}(v)$, wobei die beiden Vektoren $\mathfrak{A}(u)$ und $\mathfrak{B}(v)$ willkürliche, nicht konstante Funktionen der angegebenen Parameter sind. In unserem äquidistanten und zugleich konjugierten Fadennetz müssen demgemäß die Kurven jeder Schar durch Rückung (Translation) längs der Kurven der anderen Schar auseinander hervorgehen, d. h. die Trägerfläche muß eine *Rückungsfläche* (Translationsfläche) sein.

Wir haben somit folgendes vorläufige Ergebnis:

Ein Fadennetz mit isotroper Spannungsverteilung und rhombischer Netzstruktur, das äquidistantes und konjugiertes Netz zugleich ist, muß eine Trägerfläche besitzen, die Rückungsfläche und Minimalfläche zugleich ist, d. h. die Wendelschraubenfläche oder eine SCHERKSche Minimalfläche¹⁰⁾. Dabei müssen die beiden (orthogonalen) Scharen der winkelhalbierenden Kurven unserer Netzlinsen aus den Schmiegtangentenkurven dieser Flächen bestehen.

Daß die Wendelschraubenfläche und die SCHERKSchen Minimalflächen tatsächlich stets Trägerflächen von äquidistanten und zugleich konjugierten Fadennetzen sind, soll in einer weiteren Arbeit: „Zur Frage des Gleichgewichts von Vierecksnetzen aus verknoteten und gespannten Fäden (Zweiter Teil)“ gezeigt werden, in der dann auch weitere Eigenschaften dieser äquidistanten und zugleich konjugierten Fadennetze (Tschebyscheff-Rückungsnetze) untersucht werden sollen.

¹⁰⁾ Vgl. SOPHUS LIE, Weitere Untersuchungen über Minimalflächen. Arch. for Mathematik og Naturvidenskab, Band IV (1880), S. 477.