Über Lösungen linearer Differentialgleichungen mit Asymptoten.

Von

Otto Haupt in Erlangen.

1.1. In einer kürzlich erschienenen Arbeit[1]) gibt Herr BITTERLICH-WILLMANN je eine hinreichende Bedingung an dafür, daß die Lösungen der Differentialgleichung

$$(\mathrm{L}_0) \qquad y'' + f(x)\, y = 0 \quad \text{mit stetigem } f(x) \text{ in } [a, +\infty)$$

entweder (**I.**) sämtlich Asymptoten besitzen oder daß, soweit überhaupt Asymptoten vorhanden sind, diese (**II.**) stets parallel zur x-Achse sind bzw. (**III.**) stets in die x-Achse selbst fallen. Als kennzeichnend dafür, daß eine in $[a, +\infty)$ eindeutige, stetig differenzierbare Funktion $y = y(x)$ eine Asymptote, genauer: asymptotische Gerade, besitzt, wird dabei erklärt: Es sollen

$$(\mathrm{B}_0) \qquad \lim_{x \to +\infty} (y(x) - x y'(x))$$

und

$$(\mathrm{B}_1) \qquad \lim_{x \to +\infty} y'(x)$$

beide existieren (und endlich sein).

1.2. In einer früheren Note[2]) wurde gezeigt, daß (B_1) eine Folge von (B_0) ist und daß für die Gültigkeit von (B_0) folgendes notwendig und hinreichend ist:

(A) Es gibt eine in $[a, +\infty)$ stetige Funktion $\varphi(x)$, für welche

$$(\mathrm{A}_1) \qquad \lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = C_0 \text{ existiert und endlich ist;}$$

ferner (für beliebiges b mit $b \geqq a > 0$) die Darstellung gilt:

$$(\mathrm{A}_2) \qquad y(x) = x \cdot \Big(C + \int_x^{+\infty} \varphi(\tau)\, \tau^{-2}\, d\tau\Big) = x \cdot \Big(c - \int_b^x \varphi(\tau)\, \tau^{-2}\, d\tau\Big),$$

unter

$$C = c - \int_b^{+\infty} \varphi(\tau)\, \tau^{-2}\, d\tau$$

eine geeignet gewählte Konstante verstanden.

[1]) J. BITTERLICH-WILLMANN, Über die Asymptoten der Lösungen einer Differentialgleichung. Monatsh. f. Math. u. Phys. **50** (1941), S. 35–39.

[2]) HAUPT, Über Asymptoten ebener Kurven. Journ. f. d. r. u. angew. Math. **152** (1922), S. 6–10 und S. 239.

Übrigens hat die asymptotische Gerade von $y(x)$ dann die Gleichung

$$(\mathrm{A}_3) \qquad Y = CX + C_0$$

mit

$$C_0 = \lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \to +\infty} x \cdot \Big(\int_x^{+\infty} \varphi(\tau)\, \tau^{-2}\, d\tau \Big).$$

Mittels (A_2) erhält man nun eine notwendige und zugleich hinreichende Bedingung dafür, daß z. B. Lösungen y der allgemeinen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(\mathrm{L}) \qquad y'' + g(x)\, y' + f(x)\, y = h(x)$$

mit in $[a, +\infty)$ eindeutigen stetigen $g(x)$, $f(x)$ und $h(x)$

Asymptoten besitzen; genauer gesagt: Man erhält eine lineare Integralgleichung für $\varphi(x)$ (vgl. Nr. 2. 1.), durch deren stetige, (A_1) erfüllende Lösungen $\varphi(x)$ vermittelst (A_2) alle und nur diejenigen Lösungen y von (L) geliefert werden, welche Asymptoten besitzen.

Aus dieser Integralgleichung ergeben sich dann sehr einfach *hinreichende* Bedingungen z. B. für das Vorhandensein von Lösungen von (L), welche Asymptoten besitzen. Und zwar sind die von uns erhaltenen Bedingungen Verallgemeinerungen der von Herrn Bitterlich-Willmann angegebenen Kriterien; dabei ergibt sich noch, daß sein Kriterium II. durch eine Existenz- und Eindeutigkeitsaussage ergänzt werden kann (vgl. dazu Nr. 2. 3. 1., Bemerkung, sowie Nr. 2. 3., Anmerkung; für die beiden anderen Kriterien vgl. auch Nr. 2. 2., Anmerkung 2, und Nr. 2. 4., Anmerkung)[2a].

1. 3. Auf folgende Verallgemeinerungsmöglichkeiten sei noch hingewiesen:

Zunächst läßt sich mit Hilfe von (A) (Nr. 1. 2.) analog die Frage in Angriff nehmen nach den Lösungen einer linearen Differentialgleichung k-ter Ordnung ($k \geqq 1$), welche asymptotische Geraden besitzen. Man gelangt dabei zu einer linearen Integro-Differentialgleichung für φ, auf deren Auflösung das Problem zurückgeführt wird.

[2a]) Bemerkung bei der Korrektur. Wie in einer inzwischen zu unserer Kenntnis gelangten Arbeit von D. Caligo (Comportamento asintotico degli integrali usw., Boll. Un. Mat. Ital., Ser. II, Anno III, Nr. 4 (1941), S. 286 ff.) u. a. erwähnt wird, existiert nach U. Dini bzw. G. Sansone für (L) im Spezialfall $h(x) = 0$, $f(x) = O(x^{-3-\beta})$, $\beta > 0$, und $g(x) = O(x^{-2-\alpha})$, $\alpha > 0$, bzw. $g(x) = 0$ für jede Lösung y eine Darstellung $y = c_1 x + c_2 + \eta(x)$ mit konstanten c_1, c_2 und mit $\eta \to 0$ für $x \to +\infty$. Dies besagt, sogar zusammen mit der Existenz von $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{-1} y = \lim\limits_{x \to +\infty} y'$ (vgl. Caligo, a. a. O.), weniger als die (aus Nr. 2. 2. bzw. 1. 1. oben im Text folgende) Gültigkeit von (B_0).

Darüber hinaus läßt sich die Darstellung (A) von y in Nr. 1. 2. auf den Fall von Asymptoten höherer Ordnung, genauer gesagt: auf den Fall asymptotischer Parabeln n-ten Grades ($n \geqq 1$) verallgemeinern[3]). Es werden nämlich alle und nur die n-mal stetig differenzierbaren ebenen Kurven $y = y(x)$, welche eine asymptotische Parabel n-ten Grades besitzen, geliefert durch

$$y(x) = x \cdot \left[\sum_{\nu=0}^{n-1} C_\nu x^\nu - \frac{1}{(n-1)!}\int_b^x (x-\tau)^{n-1}\,\varphi(\tau)\,\tau^{-(n+1)}\,d\tau\right],$$

wo $\varphi(x)$ stetig ist in $[a, +\infty)$ und der Bedingung (A_1) genügt, wobei ferner $C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}$ beliebig wählbare Konstanten sind. Damit ergibt sich die Frage nach all denjenigen Lösungen linearer Differentialgleichungen sowie linearer Differentialgleichungensysteme, welche asymptotische Parabeln vorgegebenen Grades besitzen.

Ein näheres Eingehen auf diese Fragen sowie auf die genauere Untersuchung der auftretenden Integro-Differentialgleichungen[4]) sei späterer Gelegenheit vorbehalten.

2. Wir gehen zur Ausführung der in Nr. 1. 2. angedeuteten Sätze und ihrer Beweise über. Die hierbei auftretenden eigentlichen bzw. uneigentlichen Integrale sind ausnahmslos RIEMANNsche, erstreckt über ein Intervall, bzw. Limiten[5]) solcher Integrale, wenn die eine Integrationsgrenze gegen $+\infty$ geht. Eine Funktion $F(x)$ wird als integrierbar bzw. als absolut integrierbar, genauer als uneigentlich bzw. als absolut uneigentlich integrierbar bezeichnet, wenn das betreffende uneigentliche Integral von $F(x)$ bzw. von $|F(x)|$ existiert.

2. 1. Es sei also gegeben

$$\text{(L)} \qquad y'' + g(x)y' + f(x)y = h(x),$$

wo die g, f, h eindeutig und *stetig* sein sollen in $[a, +\infty)$. Jede Lösung y von (L) ist daher zweimal stetig differenzierbar. Ferner sei im folgenden stets $a > 0$.

Alle und nur diejenigen Lösungen y von (L), welche den Bedingungen (A_1), (A_2) in Nr. 1. 2. genügen, besitzen eine Asymptote. Daraus ergibt sich der

Satz: *Vermittelst der Darstellung* (A_2) *in Nr.* 1. 2. *erhält man alle Lösungen y von* (L), *welche eine Asymptote besitzen, indem man (nach beliebiger*

---

[3]) A. a. O. [2]), S. 8ff.

[4]) Vgl. dazu auch Enzykl. math. Wiss. II, 3, 2 (= II C 13), S. 1494.

[5]) *Alle* in vorliegender Arbeit auftretenden *Limiten* sind als *eigentlich* (endlich) vorausgesetzt.

Wahl einer Zahl b mit $b \geqq a > 0$) alle Konstanten c und c_1 sowie alle stetigen $\varphi(x)$ bestimmt, die den folgenden beiden Bedingungen (V) *und* (A_1) *genügen:*

$$\text{(V)} \quad \varphi(x) + \int_b^x g(\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi + \int_b^x [\xi g(\xi) + \xi^2 f(\xi)]\left(\int_b^\xi \varphi(\tau)\,\tau^{-2}\,d\tau - c\right)d\xi$$
$$= c_1 - \int_b^x \xi\, h(\xi)\,d\xi,$$

$$(A_1) \qquad \lim_{x \to +\infty} \varphi(x) \textit{ existiert.}$$

Beweis I. Es sei y eine Lösung von (L) mit Asymptote, also gemäß (A_2) (Nr. 1. 2.) darstellbar, wobei noch (A_1) erfüllt sein muß. Aus (A_2) folgt dann, daß

$$(2.\,1.) \qquad y' = (y - \varphi)\cdot x^{-1}, \quad y'' = -\,\varphi' \cdot x^{-1},$$

wobei φ' (wegen der Existenz und Stetigkeit von y'') existiert und stetig ist. Setzt man jetzt für y, y', y'' die Ausdrücke aus (A_2) und (2. 1.) in (L) ein und integriert von b bis x, so ergibt sich (V); dabei ist $c_1 = \varphi(b)$.

II. Umgekehrt: Es sei $\varphi(x)$ stetig in $[b, +\infty)$ und Lösung der Integralgleichung (V). Dann ist φ auch stetig differenzierbar. Führt man nun in die durch Differentiation von (V) nach x sich ergebende Beziehung wieder y, y' und y'' vermöge (A_2) bzw. (2. 1.) ein, so ergibt sich (L). Ist also für eine stetige Lösung φ von (V) noch (A_1) erfüllt, so liefert φ durch (A_2) eine Lösung y von (L) mit Asymptote.

2. 1. 1. *Die in* (V) *auftretenden Konstanten c und c_1 sind mit den Werten von y und y' in $x = b$ folgendermaßen verknüpft:*

$$(2.\,1.\,1.) \qquad \begin{aligned} y(b) &= c \cdot b \\ y'(b) &= \big(y(b) - c_1\big)\cdot b^{-1}. \end{aligned}$$

Die c, c_1 und die $y(b)$, $y'(b)$ bestimmen sich also insbesondere gegenseitig eindeutig.

In der Tat: Aus (V) folgt $\varphi(b) = c_1$ und daraus in Verbindung mit (2. 1.) die zweite Gleichung (2. 1. 1.). Die erste Gleichung ergibt sich aus (A_2) (Nr. 1. 2.).

2. 1. 2. Zur Abkürzung späterer Beweise möge der Hinweis auf folgende bekannte Tatsachen dienen:

I. Ist $\varphi(x)$ stetig in $[b, +\infty)$ und ist (A_1) (Nr. 2. 1.) erfüllt, d. h. existiert $\lim_{x \to \infty} \varphi(x)$, so ist $\varphi(x)$ in $[b, +\infty)$ beschränkt.

II. Ist $F(x)$ absolut integrierbar, ist ferner $\varphi(x)$ stetig und beschränkt in $[b, +\infty)$, so ist auch $F(x)\,\varphi(x)$ absolut integrierbar.

III. Ist $F(x)$ absolut integrierbar, so existiert $\lim\limits_{x \to +\infty} \int\limits_b^x F(\xi)\, d\xi$.

IV. Ist $\varphi(x)$ stetig und beschränkt, etwa $|\varphi(x)| \leqq M$, in $[b, +\infty)$, so gilt, falls $0 < b < x$,

$$\left|\int\limits_b^x \varphi(\tau)\, \tau^{-2}\, d\tau\right| < M \cdot b^{-1} \quad \text{und} \quad \left|\int\limits_x^{+\infty} \varphi(\tau)\, \tau^{-2}\, d\tau\right| \leqq M \cdot x^{-1}.$$

2. 2. Zunächst beweisen wir den

Satz. *Damit jede Lösung von* (L) *eine Asymptote besitze, ist hinreichend, daß* $r(x) = xg(x) + x^2 f(x)$, $g(x)$ *und* $xh(x)$ *(stetig in* $[a, +\infty)$ *und) absolut integrierbar*[6]) *sind.*

1. Anmerkung. Der vorstehende Satz läßt sich auch so aussprechen: Unter den angegebenen Voraussetzungen ist für den Grundbereich $[a, +\infty)$ *eindeutig lösbar die* Randwertaufgabe *für* (L), *der gemäß* $y'(x)$ *und* $(y(x) - xy'(x))$ *für* $x = a$ *(beliebig) gegebene Werte annehmen und für* $x \to +\infty$ *beide konvergieren.*

2. Anmerkung. Das in Nr. 1. 1. erwähnte Kriterium I. von Herrn Bitterlich-Willmann entspricht dem Falle, daß $g(x) = h(x) = 0$ in $[a, +\infty)$ und daß $f(x) = O(x^{-3-\alpha})$ mit $\alpha > 0$. Dieses Kriterium ist ein Spezialfall unseres vorstehenden Satzes.

Beweis 1. Es genügt, folgendes zu zeigen: Ist b geeignet gewählt und dann festgehalten, so besitzt (V) für beliebig vorgegebene c, c_1 eine Lösung, welche (A_1) genügt. Denn durch jede solche Lösung wird eine Lösung von (L) mit Asymptote geliefert (Nr. 2. 1.), und zwar können, wenn die c, c_1 frei wählbar sind, die $y(b)$, $y'(b)$ beliebig vorgeschrieben werden (gemäß Nr. 2. 1. 1.); man erhält also tatsächlich *alle* Lösungen von (L).

2. Daß (V) für beliebige c, c_1 eine, der Bedingung (A_1) genügende Lösung φ besitzt, ergibt sich in bekannter Weise durch schrittweise Näherung folgendermaßen.

Nach Voraussetzung existieren, wenn wieder $r(x) = xg(x) + x^2 f(x)$ gesetzt wird,

$$G(b) = \int\limits_b^{+\infty} |g(\xi)|\, d\xi, \quad F(b) = a^{-1} \cdot \int\limits_b^{+\infty} |r(\xi)|\, d\xi$$

für jedes b mit $a \leqq b$ und konvergieren mit $b \to +\infty$ gegen Null. Wir können und wollen daher b so (groß) wählen, daß

(b) $\qquad q = G(b) + F(b) \leqq 2^{-1}$ und gleichzeitig $a \leqq b$ ist.

---

[6]) Die Behauptung bleibt — unter im übrigen unveränderten Voraussetzungen — richtig, wenn $xh(x)$ nur als integrierbar angenommen wird (*nicht* als *absolut* integrierbar).

Von jetzt ab *halten wir b fest* und schreiben (V) in der Gestalt

$$(\mathrm{V}_{22}) \qquad \varphi(x) = J(x;\, \varphi) + H(x;\, c, c_1),$$

wobei $b \leqq x$ und

$$J(x;\, \varphi) = -\int_b^x g(\xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi - \int_b^x r(\xi) \Bigl(\int_b^\xi \varphi(\tau)\, \tau^{-2}\, d\tau\Bigr) d\xi,$$

$$H(x;\, c, c_1) = c_1 + c \int_b^x r(\xi)\, d\xi - \int_b^x \xi\, h(\xi)\, d\xi.$$

Für jede in $[b, +\infty)$ stetige (und (A_1) genügende) Funktion $\varphi(x)$ gilt die Abschätzung

$$(\mathrm{J}) \qquad |J(x;\, \varphi)| \leqq p \cdot q \text{ für jedes } x \text{ in } [b, +\infty),$$

wobei

$$|\varphi(x)| \leqq p \text{ in } [b, +\infty);$$

dies folgt aus den Voraussetzungen unter Berücksichtigung von (b), insbesondere $b \geqq a > 0$, mit Hilfe von Nr. 2. 1. 2., insbesondere IV.

Nunmehr setzen wir

$$\varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_\nu(x) = J(x;\, \varphi_{\nu-1}) + H(x;\, c, c_1) \text{ in } [b, +\infty), \quad \nu = 1, 2, \ldots.$$

Mittels vollständiger Induktion nach ν folgt, in Rücksicht auf die Voraussetzungen bei dem zu beweisenden Satz sowie auf Nr. 2. 1. 2.: Die $\varphi_\nu(x)$ sind sämtlich stetig differenzierbar in $[b, +\infty)$ und es ist (A_1) für sie erfüllt, es ist also insbesondere $\varphi_\nu(x)$ beschränkt in $[b, +\infty)$. All dies gilt auch für

$$\psi_\nu(x) = \varphi_\nu(x) - \varphi_{\nu-1}(x), \qquad \nu = 1, 2, \ldots,$$

so daß insbesondere

$$(\mathrm{p}) \qquad 0 \leqq p_\nu < +\infty, \text{ wenn } p_\nu = \overline{\underset{b \leqq x}{\text{Grenze}}}\, |\psi_\nu(x)|, \qquad \nu = 1, 2, \ldots.$$

Wegen der Linearität von $J(x;\, \varphi)$ bezüglich φ gilt

$$\psi_\nu(x) = J(x;\, \psi_{\nu-1}), \qquad \nu = 2, 3, \ldots.$$

Aus (J) und (p) ergibt sich mithin $p_\nu \leqq p_{\nu-1} \cdot q$, $\nu = 2, 3, \ldots$, also

$$p_n \leqq p_1 \cdot q^{n-1}, \qquad n = 2, 3, \ldots.$$

Wegen $q \leqq 2^{-1}$ (vgl. (b)) sind daher die

$$\varphi_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{\nu=1}^n \psi_\nu(x), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

in $[b, +\infty)$ gleichmäßig beschränkt und sie konvergieren dort gleichmäßig. Insbesondere ist also

$$\varphi(x) = \lim_{n \to \infty} \varphi_n(x)$$

stetig und beschränkt in $[b, +\infty)$ und es ist (A_1) für $\varphi(x)$ erfüllt. Zufolge der gleichmäßigen Konvergenz ist überdies

$$J(x;\,\varphi) = \lim_{n \to \infty} J(x;\,\varphi_n).$$

Daher ist $\varphi(x)$ eine stetige Lösung von (V_{22}), für welche (A_1) gilt. Weil c und c_1 beliebig gegeben waren, ist alles bewiesen.

2. 3. Wir lassen jetzt die Voraussetzung der (absoluten) Integrierbarkeit von $r(x)$ fallen und zeigen zunächst:

Es seien $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ stetig in $[a, +\infty)$. Ferner sei $r(x) = xg(x) + x^2 f(x)$ nicht-negativ oder nicht-positiv für alle hinreichend großen x. Schließlich seien $g(x)$ und $xh(x)$ absolut integrierbar [6]*, hingegen sei $r(x)$ nicht integrierbar.*

Besitzt dann eine Lösung y von (L) *eine Asymptote, so muß diese Asymptote parallel zur x-Achse sein.*

Anmerkung. Das in Nr. 1. 1. erwähnte Kriterium II. von Herrn Bitterlich-Willmann entspricht dem Falle, daß $g(x) = h(x) = 0$ in $[a, +\infty)$ und daß $D_1 x^{-3} < |f(x)| < D_2 x^{-2-\beta}$ für alle genügend großen x, wobei $\beta > 0$ und D_1, D_2 positive Konstanten. Dieses Kriterium ist Spezialfall unseres vorstehend angegebenen (vgl. auch Nr. 2. 3. 1., Bemerkung).

Beweis. Ist $\varphi(x)$ stetig und ist (A_1) für $\varphi(x)$ erfüllt, so ist $\Phi(x)$ stetig und es existiert

$$\Phi_0 = \lim_{x \to \infty} \Phi(x), \quad \text{wobei } \Phi(x) = c - \int_b^x \varphi(\tau)\,\tau^{-2}\,d\tau\,.$$

Ist $\varphi(x)$ überdies Lösung von (V) (vgl. Nr. 2. 1.), so muß $r(x)\,\Phi(x)$ integrierbar sein, weil zufolge unserer Voraussetzungen alle übrigen, in (V) auftretenden Glieder für $x \to +\infty$ konvergieren. Da aber $r(x)$ nach Voraussetzung nicht integrierbar ist und nicht zweierlei Vorzeichen annimmt, so folgt aus der Integrabilität von $r(x)\,\Phi(x)$, daß $\Phi_0 = 0$ ist. Zufolge Nr. 1. 2., (A_2) und (A_3) ist daher $Y = C_0$ die Gleichung der Asymptote, w. z. b. w.

2. 3. 1. Die in Nr. 2. 3. gemachte Feststellung läßt sich zu einer Existenz- und Eindeutigkeitsaussage verschärfen, wenn man noch absolute Integrierbarkeit von $s(x) = x^{-1} r(x) = g(x) + xf(x)$ fordert. Es gilt nämlich der

Satz. *Es seien $g(x)$, $xh(x)$ und $s(x) = g(x) + xf(x)$ (stetig und) absolut integrierbar* [6]*. Hingegen sei $r(x) = xs(x)$ nicht integrierbar und es sei $s(x) \geqq 0$ oder $s(x) \leqq 0$ für alle hinreichend großen x.*

Dann existiert zu beliebig vorgegebenem $\big(y(b) - by'(b)\big)$ genau eine Lösung von (L) *mit Asymptote; und diese Asymptote ist parallel zur x-Achse. Dabei ist b hinreichend groß, im übrigen aber beliebig gewählt.*

Anmerkung. Der vorstehende Satz läßt sich dahin aussprechen: Unter den angegebenen Voraussetzungen ist *für* (L) *in* $[b, +\infty)$ *eindeutig* *lösbar die* Randwertaufgabe, *der gemäß* $(y(x) - xy'(x))$ *für* $x = b$ *einen beliebig vorgegebenen Wert annimmt und für* $x \to +\infty$ *konvergiert.*

Beweis. Zufolge der über $g(x)$ und $s(x) = g(x) + xf(x)$ gemachten Voraussetzungen existieren

$$G^*(b) = \int_b^{+\infty} |g(\xi)|\, d\xi \quad \text{und} \quad F^*(b) = \int_b^{+\infty} |s(\xi)|\, d\xi,$$

und es läßt sich durch Wahl eines hinreichend großen b stets erreichen, daß

(b) $$q = G^*(b) + F^*(b) \leqq 2^{-1}, \quad \text{wobei } a \leqq b.$$

Da zufolge Nr. 2. 3. für jede stetige Lösung $\varphi(x)$ von (V), für welche (A_1) erfüllt ist, jetzt $C = 0$ (vgl. Nr. 1. 2., (A_3)) sein muß, so können wir, in Rücksicht auf Nr. 1. 2., (A_2), die Integralgleichung (V) so schreiben:

(V_{231}) $$\varphi(x) = J_1(x;\varphi) + H(x; c_1),$$

wobei

$$J_1(x;\varphi) = -\int_b^x g(\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi + \int_b^x \xi s(\xi)\Big(\int_\xi^{+\infty} \varphi(\tau)\,\tau^{-2}\,d\tau\Big)\,d\xi,$$

$$H(x; c_1) = c_1 - \int_b^x \xi\, h(\xi)\,d\xi.$$

Für jede in $[b, +\infty)$ stetige und (A_1) genügende Funktion $\varphi(x)$ haben wir wieder, wie in Nr. 2. 2., die Abschätzung (J), wenn dort $J(x;\varphi)$ durch $J_1(x;\varphi)$ ersetzt wird; denn für solche $\varphi(x)$ ist jetzt $\Big|xs(x)\Big(\int_x^{+\infty}\varphi(\tau)\,\tau^{-2}\,d\tau\Big)\Big| \leqq p\cdot|s(x)|$. Bei beliebig vorgegebenem $c_1 = y(b) - by'(b)$ (vgl. Nr. 2. 1. 1.) kann man daher, genau wie in Nr. 2. 2. für (V), hier für (V_{231}), die Existenz der gesuchten Lösung φ mittels schrittweiser Näherung, ausgehend von $\varphi_0(x) = 1$, beweisen.

Die *Eindeutigkeit* dieser Lösung ergibt sich in bekannter Weise so: Sind $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ zwei Lösungen von (V_{231}), welche zum gleichen c_1 gehören und für welche (A_1) erfüllt ist, so gilt für $d(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ neben (A_1) die Beziehung $d(x) = J_1(x, d)$. Da $M = \overline{\text{Grenze}}_{b \leqq x}\, |d(x)| < +\infty$ (wegen (A_1)), so folgt aus (J), daß $0 \leqq M \leqq M\cdot q$ und, wegen $q \leqq 2^{-1}$, daß $M = 0$, also $d(x) = 0$ in $[b, +\infty)$, w. z. b. w.

Bemerkung. Bei dem in Nr. 2. 3., angegebenen Kriterium II. von Herrn Bitterlich-Willmann sind die Voraussetzungen des vorstehenden Satzes erfüllt. Dieser Satz geht (durch die Existenz- und Eindeutigkeitsbehauptung) über die Aussage jenes Kriteriums hinaus.

2. 4. Schließlich zeigen wir noch:

Es seien $g(x)$, $h(x)$, $f(x)$ stetig in $[a, +\infty)$. Ferner sei $s(x) = g(x) + + xf(x)$ nicht-negativ oder nicht-positiv für alle hinreichend großen x. Schließlich seien $g(x)$ und $xh(x)$ absolut integrierbar[6]*, aber $s(x)$ sei nicht integrierbar.*

Besitzt dann eine Lösung y von (L) *eine Asymptote, so kann diese nur die x-Achse sein.*

Anmerkung. Das in Nr. 1. 1. erwähnte Kriterium III. von Herrn Bitterlich-Willmann wird aus dem vorstehenden erhalten, wenn speziell $g(x) = h(x) = 0$ in $[a, +\infty)$ und $|x^2 f(x)| > Q > 0$ für alle hinreichend großen x, wobei Q eine Konstante ist.

Beweis. Aus den Voraussetzungen folgt, daß $r(x) = xs(x)$ nicht integrierbar ist. Mithin sind die Voraussetzungen von Nr. 2. 3. erfüllt. Angenommen, es existiere eine Lösung y von (L) mit Asymptote, also (Nr. 2. 1.) eine in $[b, +\infty)$ stetig differenzierbare, (A_1) erfüllende Lösung $\varphi(x)$ von (V). Dann muß, wie in Nr. 2. 3., Beweis, gezeigt, $C = \Phi_0 = 0$ sein; wegen $C = 0$ und Nr. 1. 2., (A_2), kann daher (V) in der Gestalt (V_{231}) (Nr. 2. 3. 1.) geschrieben werden. Da $\varphi(x)$ Lösung von (V_{231}) sein soll, welche (A_1) erfüllt, muß $xs(x)\,\Phi(x)$ integrierbar sein, wobei $\Phi(x) = \int\limits_x^{+\infty} \varphi(\tau)\,\tau^{-2}\,d\tau$ ist; denn alle übrigen Glieder in (V_{231}) besitzen für $x \to +\infty$ einen Limes. Da andererseits $\lim\limits_{x \to +\infty} x\,\Phi(x) = C_0$ existiert (Nr. 1. 2., (A_3)), da $s(x)$ für hinreichend große x sein Vorzeichen nicht wechselt und da $s(x)$ nach Voraussetzung nicht integrierbar ist, so muß $C_0 = 0$ sein. Die als existierend vorausgesetzte Asymptote besitzt daher (Nr. 1. 2., (A_3)) die Gleichung $Y = 0$, w. z. b. w.

(Eingegangen am 15. Januar 1942.)