Einschließungssatz für die charakteristischen Zahlen von Matrizen.

Von

L. Collatz in Karlsruhe.

1. Einleitung.

Es sei $\mathfrak{A}$ eine gegebene quadratische n-reihige Matrix mit reellen Elementen

$$\mathfrak{A} = (a_{ik}).$$

Mit $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ seien die charakteristischen Zahlen der Matrix $\mathfrak{A}$ bezeichnet, d. h. die n Wurzeln der algebraischen Gleichung

$$\det |\mathfrak{A} - \varkappa \mathfrak{E}| = 0,$$

wobei $\mathfrak{E}$ die Einheitsmatrix ist.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Gültigkeit des folgenden Einschließungssatzes, der für die Berechnung der charakteristischen Zahlen wichtig ist: Ausgehend von einem beliebigen Vektor $\mathfrak{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ mit den reellen von Null verschiedenen Komponenten u_i bildet man den Vektor $\mathfrak{v} = \mathfrak{A}\mathfrak{u}$ mit den Komponenten

$$v_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} u_k. \tag{1}$$

Von den n Quotienten

$$\mu_i = \frac{v_i}{u_i} \tag{2}$$

sucht man das Minimum m und das Maximum M heraus: $m \leqq \mu_i \leqq M$. Es interessiert, unter welchen Voraussetzungen die beiden Zahlen m und M mindestens eine charakteristische Zahl $\varkappa_j$ von $\mathfrak{A}$ einschließen.

Diese Einschließungsaussage gilt nicht allgemein; bei nicht symmetrischer Matrix $\mathfrak{A}$ brauchen die charakteristischen Zahlen nicht reell zu sein; aber selbst wenn die charakteristischen Zahlen reell sind, braucht zwischen m und M keine charakteristische Zahl zu liegen, wie das folgende Beispiel zeigt: Die Matrix

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a+2 & -1 \\ 1 & a-2 \end{pmatrix}$$

hat die charakteristischen Zahlen $\varkappa_{1,2} = a \pm \sqrt{3}$. Geht man vom Vektor $\mathfrak{u} = (1, 1)$ aus, so wird $\mathfrak{v} = (a+1, a-1)$, und im Intervall von $a-1$ bis $a+1$ liegt keine der beiden charakteristischen Zahlen.

Der Einschließungssatz gilt jedoch, wenn die Matrix $\mathfrak{A}$ reell und symmetrisch ist, ferner wenn alle a_{ik} und alle u_i positiv sind. Vielleicht gelingt es, noch weitere allgemeine Fälle zu finden, bei denen der Einschließungssatz ebenfalls gültig ist. Ferner werden unter den gleichen Voraussetzungen für die Matrix $\mathfrak{A}$ Einschließungsaussagen gemacht für die Wurzeln der algebraischen Gleichung

$$\det|\mathfrak{A} - \varkappa\mathfrak{D}| = 0,$$

die auch als charakteristische Zahlen der Vektorgleichung

$$\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \varkappa\mathfrak{D}\mathfrak{x}$$

bezeichnet seien. Dabei sei $\mathfrak{D}$ eine Diagonalmatrix mit positiven Elementen[1]).

Die Gedankengänge sind teilweise ähnlich denen für die Einschließungssätze bei Differentialgleichungen und Integralgleichungen[2]).

2. Matrizen mit nichtnegativen Elementen.

Die Matrix $\mathfrak{A}$ habe jetzt positive oder nichtnegative Elemente ($a_{ik} \geqq 0$). Ist $\varkappa$ der größte Betrag der charakteristischen Zahlen von $\mathfrak{A}$, so ist nach den Sätzen von Frobenius[3]) $\varkappa$ eine charakteristische Zahl von $\mathfrak{A}$, die sogenannte Maximalwurzel von $\mathfrak{A}$. Zu dieser Zahl $\varkappa$ gibt es einen Eigenvektor $\mathfrak{x}$ (Lösung von $\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \varkappa\mathfrak{x}$), dessen Komponenten x_i sämtlich nichtnegativ und nicht alle Null sind.

Mit $\mathfrak{A}$ ist auch die transponierte Matrix $\mathfrak{A}' = (a_{ki})$ eine nichtnegative Matrix; $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ haben dieselben charakteristischen Zahlen und dieselbe Maximalwurzel $\varkappa$. Es sei $\mathfrak{z}$ ein zur Maximalwurzel von $\mathfrak{A}'$ gehöriger Eigenvektor mit den Komponenten $z_i \geqq 0$:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}\, z_k = \varkappa\, z_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Nun wird ein Ausgangsvektor mit nur positiven Elementen $u_i > 0$ betrachtet und wie früher werden die Größen v_i, μ_i nach (1), (2) gebildet. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{n} (\mu_i - \varkappa)\, u_i\, z_i = \sum_{i}\sum_{k} (a_{ik}\, u_k\, z_i - a_{ki}\, z_k\, u_i) = 0.$$

---

[1]) Gleichungen der Form $\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \varkappa\mathfrak{D}\mathfrak{x}$ treten verschiedentlich auf, z. B. Biezeno-Grammel, Technische Dynamik, Berlin 1939, S. 148, 252, 511, 809.

[2]) Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. 19 (1939), S. 241; Math. Zeitschr. 47 (1941), S. 395—398.

[3]) G. Frobenius, Sitzungsber. Preuß. Akad. d. Wissenschaften, Math.-phys. Klasse, Berlin 1912, 1. Halbband, S. 456—477, insbes. S. 457.

Da die $u_i z_i \geqq 0$ und nicht alle $u_i z_i = 0$ sind, könnte die Summe nicht verschwinden, wenn für alle i die Größen $\mu_i - \varkappa$ sämtlich positiv oder sämtlich negativ wären; daher ist

$$m = \operatorname*{Min}_i \mu_i \leqq \varkappa \leqq M = \operatorname*{Max}_i \mu_i,$$

und es gilt der

Satz. *Ist die Matrix $\mathfrak{A}$ positiv oder nichtnegativ, und sind $u_1, u_2, \ldots, u_n$ irgendwelche positiven Zahlen, so liegt in dem Intervall, welches von der größten und der kleinsten der n Zahlen $\frac{1}{u_i} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} u_k$ begrenzt wird, die Maximalwurzel von $\mathfrak{A}$.*

3. Reelle symmetrische Matrizen.

Für reelle symmetrische Matrizen besteht für die charakteristischen Zahlen die bekannte Minimum-Maximumeigenschaft[4]).

Die h-te charakteristische Zahl $\varkappa_h$ von $\mathfrak{A}$ ist der kleinste Wert, den das Maximum des Quotienten

$$Q = \frac{\sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$$

annehmen kann, wenn zwischen den (reellen, nicht sämtlich verschwindenden) x_i noch $h-1$ beliebige homogene lineare Gleichungen vorgeschrieben sind.

Für den Beweis des Einschließungssatzes ist es notwendig, die etwas erweiterte Gleichung zu betrachten

$$\mathfrak{B}\mathfrak{y} = \varrho \mathfrak{D} \mathfrak{y}; \tag{3}$$

dabei sei $\mathfrak{B}$ reell symmetrisch und $\mathfrak{D}$ eine Diagonalmatrix mit positiven Elementen d_i:

$$\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} d_1 & & & 0 \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n \end{pmatrix}.$$

Setzt man in dem Courantschen Satz $x_i = \sqrt{d_i}\, y_i$ und $a_{ik} \sqrt{d_i d_k} = b_{ik}$, so erhält man die Aussage:

[4]) R. Courant-D. Hilbert, Methoden der mathematischen Physik, Bd. I, 2. Aufl. (1931), S. 27.

Die h-te charakteristische Zahl ϱ_h von (3) ist der kleinste Wert, den das Maximum des Quotienten

$$Q^* = \frac{\sum\limits_{i,k=1}^{n} b_{ik}\, y_i\, y_k}{\sum\limits_{i=1}^{n} d_i\, y_i^2} \tag{4}$$

annehmen kann, wenn zwischen den y_i noch $h-1$ beliebige homogene lineare Gleichungen vorgeschrieben sind.

Nun kann man Probleme mit verschiedenen Matrizen $\mathfrak{D}$ miteinander vergleichen. Liegen die Probleme $\mathfrak{B}\mathfrak{y} = \varrho\,\mathfrak{D}_1\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{B}\mathfrak{y} = \sigma\,\mathfrak{D}_2\mathfrak{y}$ vor und ist $\mathfrak{D}_1 \geqq \mathfrak{D}_2$ (jedes Element von $\mathfrak{D}_1$ sei $\geqq$ entsprechendes Element von $\mathfrak{D}_2$), so ist bei beliebigem Vektor $\mathfrak{y}$

$$|Q_1^*| \leqq |Q_2^*|,$$

wenn Q_1^* und Q_2^* die zugehörigen Quotienten (4) bedeuten. Daher folgt:

Werden bei $\mathfrak{B}\mathfrak{y} = \varrho\,\mathfrak{D}\mathfrak{y}$ alle d_i unter Beibehalten des Vorzeichens verkleinert (oder jedenfalls nicht vergrößert), so behält jede charakteristische Zahl ihr Vorzeichen bei und der Betrag jeder charakteristischen Zahl wird nicht kleiner.

Nun folgt der Einschließungssatz leicht. Es werden zwei Fälle unterschieden.

1. Fall. Es sind alle nach (2) gebildeten Quotienten μ_i positiv. Bei Einführung der Diagonalmatrix

$$\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} \mu_1 & & & 0 \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mu_n \end{pmatrix}$$

gilt $\mathfrak{M}\mathfrak{u} = \mathfrak{v}$ und $M\mathfrak{E} \geqq \mathfrak{M} \geqq m\mathfrak{E}$.

Der Vergleichungssatz ist also anwendbar auf die drei Gleichungen $\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \varrho M\mathfrak{E}\mathfrak{x}$; $\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \varrho\mathfrak{M}\mathfrak{x}$; $\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \varrho m\mathfrak{E}\mathfrak{x}$, von denen die erste und die dritte die charakteristischen Zahlen $\frac{\varkappa_i}{M}$ bzw. $\frac{\varkappa_i}{m}$ haben und von denen die zweite als eine charakteristische Zahl die Zahl 1 mit dem dazugehörigen Eigenvektor $\mathfrak{u}$ hat, und zwar sei 1 die ν-te charakteristische Zahl dieser Gleichung. Nach den vorangehenden Bemerkungen über das Wandern der charakteristischen Zahlen folgt die Behauptung

$$\frac{\varkappa_\nu}{m} \geqq 1 \geqq \frac{\varkappa_\nu}{M}$$

($\varkappa_\nu$ kann dann nicht negativ sein).

2. Fall. Es sind nicht alle μ_i positiv; dann ist $m \leqq 0$. Man kann eine Zahl N so angeben, daß alle $\mu_i + N > 0$ sind. Die Matrix $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A} + N\mathfrak{E}$

hat die charakteristischen Zahlen $\varkappa_i + N$. Für die Matrix $\mathfrak{A}^*$ führt der Vektor $\mathfrak{u}$ zu einem Vektor $\mathfrak{v}^* = \mathfrak{A}^*\mathfrak{u} = \mathfrak{v} + N\mathfrak{u}$ und die zugehörigen Quotienten $\mu_i^* = \frac{v_i^*}{u_i} = \mu_i + N$ schließen, da jetzt der 1. Fall anwendbar ist, eine charakteristische Zahl $\varkappa_\nu + N$ von $\mathfrak{A}^*$ ein, also schließt das Intervall der μ_i eine charakteristische Zahl $\varkappa_\nu$ von $\mathfrak{A}$ ein.

Somit gilt der

Satz. *Ist $\mathfrak{A}$ eine symmetrische Matrix mit reellen Elementen und sind $u_1, \ldots, u_n$ von Null verschiedene reelle Zahlen, so liegt in dem Intervall, das von der größten und der kleinsten der n Zahlen $\frac{1}{u_i}\sum_{k=1}^{n} a_{ik} u_k$ begrenzt wird, mindestens eine charakteristische Zahl der Matrix $\mathfrak{A}$.*

4. Einschließungssatz für die Wurzeln von $\det|\mathfrak{A} - \varkappa\mathfrak{D}| = 0$.

Ist $\mathfrak{D}$ wie in Nr. 3 eine Diagonalmatrix mit positiven Elementen d_i, so kann man die Aussagen von Nr. 2 und 3 durch Einführung der Größen

$$a_{ik}^* = \frac{a_{ik}}{\sqrt{d_i d_k}}, \quad x_i^* = x_i\sqrt{d_i}, \quad u_i^* = u_i\sqrt{d_i}, \quad v_i^* = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^* u_k^*,$$

$$\mathfrak{A}^* = (a_{ik}^*), \qquad \mathfrak{x}^* = (x_i^*), \qquad \mathfrak{u}^* = (u_i^*), \qquad \mathfrak{v}^* = (v_i^*)$$

auf die erweiterte Gleichung $\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \varkappa\mathfrak{D}\mathfrak{x}$ übertragen, die bei Einführung der mit Stern versehenen Größen in $\mathfrak{A}^*\mathfrak{x}^* = \varkappa\mathfrak{x}^*$ übergeht.

Ist $\mathfrak{A}$ symmetrisch, so ist es auch $\mathfrak{A}^*$; hat $\mathfrak{A}$ nur nichtnegative Elemente, so auch $\mathfrak{A}^*$, mit u_i sind auch die u_i^* positiv. Unter den Voraussetzungen der Nr. 2 und 3 schließen daher die Zahlen

$$\mu_i^* = \frac{v_i^*}{u_i^*} = \frac{v_i}{d_i u_i}$$

mindestens eine charakteristische Zahl von $\mathfrak{A}^*$, d. h. eine charakteristische Zahl von $\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \varkappa\mathfrak{D}\mathfrak{x}$ ein. Es gilt also der

Satz. *Erfüllen die von Null verschiedenen reellen Zahlen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ und die reelle Matrix $\mathfrak{A}$ eine der beiden Voraussetzungen*

$$\text{a) } u_i > 0; \quad a_{ik} \geqq 0,$$

$$\text{b) } a_{ik} = a_{ki},$$

ist ferner $\mathfrak{D}$ eine Diagonalmatrix mit positiven Elementen d_i, so liegt in dem Intervall, das von der größten und der kleinsten der n Zahlen $\frac{1}{d_i u_i}\sum_{k=1}^{n} a_{ik} u_k$ begrenzt wird, mindestens eine charakteristische Zahl der Gleichung $\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \varkappa\mathfrak{D}\mathfrak{x}$.

5. Zahlenbeispiel.

Vorgelegt sei die symmetrische Matrix

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Durch einfaches Probieren und Variieren der Komponenten u_i (Überlegung, ob Vergrößerung oder Verkleinerung einer bestimmten Komponente die Grenzen $\operatorname*{Min}_i \mu_i$ und $\operatorname*{Max}_i \mu_i$ zusammenrücken läßt) kann man sehr schnell die charakteristischen Zahlen in grobe Schranken einschließen.

So erhält man z. B.

$$\begin{array}{lllll} \text{aus } \mathfrak{u} = (& 1, \ 1, \ -1, & -2) & \text{die Schranken} & 1 \leqq \varkappa_3 \leqq 2 \\ \text{,,} \quad \mathfrak{u} = (& 3, \ 4, \quad 5, & 1) & \text{,,} \qquad \text{,,} & 3{,}5 \leqq \varkappa_2 \leqq 4 \\ \text{,,} \quad \mathfrak{u} = (& 3, \ 1, \ -3, & 3) & \text{,,} \qquad \text{,,} & 5 \leqq \varkappa_1 \leqq 6 \\ \text{,,} \quad \mathfrak{u} = (& -4, \ 4, \ -1, & 1) & \text{,,} \qquad \text{,,} & -4 \leqq \varkappa_4 \leqq -2{,}75. \end{array}$$

Damit hat man alle 4 charakteristischen Zahlen in Intervalle eingegrenzt, die sich gegenseitig nicht überschneiden. Engere Intervalle erhält man, indem man feststellt, wo Änderung einer Komponente etwa um 0,1 das Maximum der μ_i herabdrückt usw. So erhält man z. B. für die an letzter Stelle genannte charakteristische Zahl den besseren Vektor:

$$\begin{array}{rlllll} \mathfrak{u} = & (-3{,}5; & 3{,}8; & -0{,}9; & 1) \\ \mathfrak{v} = \mathfrak{A}\mathfrak{u} = & (10{,}8; & -11{,}4; & 2{,}7; & -3{,}1) \\ \text{Quotienten} = & (-3{,}08; & -3; & -3; & -3{,}1), \end{array}$$

man weiß jetzt also $-3{,}1 \leqq \varkappa_4 \leqq -3$.

(Eingegangen am 11. November 1941.)