Zur eindeutigen Lösbarkeit der potentialtheoretischen Randwertaufgaben bei nichtbeschränkten Randwerten.

Von

Karl Maruhn, Berlin.

I. Einleitung.

Bereits Plemelj [1]) gelang es, die Existenz von Lösungen der zweiten und dritten potentialtheoretischen Randwertaufgabe (nur mit diesen werden wir uns hier beschäftigen) mit Hilfe von Integralgleichungen für stetig gekrümmte Berandungen auch dann zu beweisen, wenn die Randfunktion f nicht notwendig beschränkt, aber absolut integrierbar ist; es war von dieser im übrigen lediglich zu verlangen, daß man mit ihr als Belegung ein überall auf dem Rand stetiges Potential der einfachen Schicht bilden kann. Ist diese Bedingung erfüllt, so nehmen im allgemeinen die Ausdrücke $\frac{\partial u}{\partial n}$ bzw. $\frac{\partial u}{\partial n} + hu$ mit u als gesuchter Lösung und h als bekannter, absolut integrierbarer, ebenfalls nicht notwendig beschränkter Funktion bei Annäherung an die Berandung in allen Endlichkeitspunkten von f und h die vorgeschriebenen Werte an.

Merkwürdigerweise wurde die Frage der Unität von Plemelj und später auch von Carleman [2]), der die Plemeljschen Betrachtungen auf Berandungen mit Ecken (bzw. Kanten) erweiterte, nur auf Grund der Greenschen Formeln behandelt, die aber im Falle nichtbeschränkter Randwerte keineswegs mehr gültig zu sein brauchen, so daß daher neben dem ansatzmäßig eingeführten Potential der einfachen Schicht noch weitere Lösungen existieren könnten [2a]). Soweit mir bekannt ist, sind auch später keine den Plemeljschen Existenzsätzen entsprechenden allgemeinen Einzigkeitsuntersuchungen durchgeführt worden [3]).

---

1) J. Plemelj, Über lineare Randwertaufgaben der Potentialtheorie I, II. Monatshefte für Math. u. Phys. **15** (1904), S. 337—411; **18** (1907), S. 180—211; ferner vgl. E. Picard, Rend. del Circ. Mat. di Palermo **22** (1906), S. 241—259.

2) T. Carleman, Über das Neumann-Poincarésche Problem für ein Gebiet mit Ecken. Inaug.-Diss. Upsala 1916.

2a) Vgl. K. Maruhn, Einige Bemerkungen zu den Randwertaufgaben der Potentialtheorie. Sitz.ber. d. Berliner Math. Ges. **40**. (Erscheint demnächst.) Dort wird an einem Beispiel gezeigt, daß dieser Fall tatsächlich eintreten kann.

3) Für die zweite Randwertaufgabe beim Kreis liegt eine noch unveröffentlichte Untersuchung von H. Söhngen vor; die Randwerte werden dort als quadratisch integrierbar angenommen.

Im folgenden soll ein Anfang damit gemacht werden, diese Lücke zu schließen, indem wir folgende Frage zu beantworten suchen: *Gegeben sei in der Ebene oder im Raume ein endlicher Bereich T, dessen Berandung S stetig gekrümmt sei*[4]). *Auf letzterer ist (spezieller als bei* PLEMELJ*) eine absolut integrierbare Funktion f gegeben, die an endlich vielen Stellen nicht notwendig beschränkt, im übrigen aber stetig ist und der die Ausdrücke $\frac{\partial u}{\partial n}$ bzw. $\frac{\partial u}{\partial n} + hu$ bei Annäherung an S zustreben sollen, unter h eine weitere, wie f beschaffene Randfunktion*[5]) *verstanden. Welchen zusätzlichen Bedingungen muß die Lösung u der zweiten und dritten potentialtheoretischen Randwertaufgabe unterworfen sein, damit es im Rahmen dieser Einschränkungen unter den obengenannten Voraussetzungen über die Randfunktionen f und h höchstens eine einzige Lösung geben kann?*

Es sollen hier zwei Wege beschritten werden, um zu solchen Bedingungen für u zu gelangen. Im Abschnitt II werden diese so gestaltet, daß die GREENschen Formeln auch jetzt noch gültig bleiben. In III, wo nur das zweidimensionale Problem behandelt wird, wird das zweite Randwertproblem auf das erste für die konjugierte Potentialfunktion $\bar{u}$ zurückgeführt, und es muß demgemäß u so beschaffen sein, daß letzteres in einer einzigen Weise lösbar ist; so ergibt sich für das zweite Randwertproblem und unter den gleichen Annahmen auch für das dritte zwangsläufig die Darstellbarkeit von u als Potential einer einfachen Schicht. — Der erste Weg führt auf Forderungen, denen u im Innern von T in der Nähe des Randes genügen muß, während der zweite im wesentlichen ein gewisses Randverhalten von u festlegt; gerade der letztere Fall ist für manche Anwendungen[6]) nützlich. In jedem Fall ist natürlich noch zu prüfen, ob die PLEMELJsche Lösung diesen Bedingungen genügt. — Im Abschnitt IV wird schließlich ein zweiter Beweis für eine wichtige, schon in III behandelte Stetigkeitseigenschaft des Potentials einer einfachen Schicht mit nichtbeschränkter Belegungsdichte gegeben, der sich aber diesmal ohne Mühe auch auf den Raum übertragen läßt. — Es sei bemerkt, daß allen Betrachtungen der RIEMANNsche Integralbegriff zugrunde liegt.

In diesem Zusammenhang will ich noch auf Einzigkeitsbetrachtungen hinweisen, die bei allgemeineren Problemstellungen durchgeführt wurden. Einem Hinweis PLEMELJs folgend [7]) verallgemeinerten EVANS, MILES und

---

[4]) Es kann auch eine endliche Anzahl Ecken bzw. Kanten zugelassen werden; ferner lassen sich die Betrachtungen auch auf nichtbeschränkte Bereiche T übertragen.

[5]) Um die Betrachtungen zu vereinfachen, nehmen wir in Teil II h als durchweg stetig an; doch bieten eine endliche Zahl von Unendlichkeitsstellen keine neuen methodischen Schwierigkeiten (vgl. II c).

[6]) Solche finden sich in meiner l. c. [2a]) genannten Arbeit.

[7]) J. PLEMELJ, Potentialtheoretische Untersuchungen, Leipzig 1911; insbesondere S. 43f.

GARRET[8]) das zweite Randwertproblem dahin, daß an Stelle der Randwerte von $\frac{\partial u}{\partial n}$ das Integral darüber (d. h. der Fluß) als Randfunktion eingeführt wurde: z. B. in der Ebene: $\int\limits_{s_0}^{s} \frac{\partial u}{\partial n}\, ds' =$ gegebene Funktion f. Die Lösung ergibt sich auch hier als ein Potential der einfachen Schicht, das jetzt aber als Stieltjes-Integral auftritt; sie ist unter gewissen, sehr allgemeinen Bedingungen, die weiter als die im folgenden von mir angegebenen reichen, auch die einzige. Bei diesen Betrachtungen mußte jedoch der RIEMANNsche Integralbegriff verlassen werden, und es zeigt sich demgemäß bei Zurückführung auf unser Problem, daß dessen Randbedingungen nur in ,,fast allen" Punkten erfüllt sind, wobei sich über die Lage der Ausnahmepunkte nichts aussagen läßt. Da gerade dieser Umstand bei Anwendungen störend ist, scheint es nützlich zu sein, die PLEMELJsche Problemstellung, nur vom RIEMANNschen Integral ausgehend, hinsichtlich der Einzigkeit zu behandeln, zumal die Betrachtungen wegen der speziellen Annahmen sehr einfach sind und sich leicht auch auf das bei den obengenannten Autoren nicht behandelte dritte Randwertproblem ausdehnen lassen. — Andere Verallgemeinerungen des zweiten Randwertproblems, die aber ebenfalls unser Problem nicht umfassen, betrachtet CIMMINO[9]), indem er gewisse Integralmittelwerte von $\left(\int\limits_{s_0}^{s} \frac{\partial u}{\partial n}\, ds' - f\right)$, erstreckt über geeignet definierte Nachbarflächen, bei Annäherung an den Rand verschwinden läßt.

II. Unitätssätze, die auf der Greenschen Formel beruhen.

a) Zweite Randwertaufgabe.

Vorgelegt sei im Raume ein von einer einzigen geschlossenen, stetig gekrümmten JORDANschen Fläche S berandetes endliches Gebiet T. Auf S sei eine Funktion $f(\sigma)$ gegeben, die an endlich vielen Stellen nicht notwendig beschränkt zu sein braucht, im übrigen aber stetig verläuft und in jedem

[8]) S. C. EVANS, The Logarithmic Potential, Discontinuous DIRICHLET and NEUMANN Problems. New York 1927. Ferner z. B. S. C. EVANS and E. R. C. MILES, Potentials of general masses in single and double layers. The relative boundery value problems. American Journal of Math. **53** (1931), S. 493—516. G. A. GARRET, Necessary and sufficient conditions for potentials of single and double layers. American Journal of Math. **58** (1936), S. 95—129.

[9]) G. CIMMINO, Nuovo tipo di condizione al contorno e nuovo metodo di trattazione per il problema generalizzato di DIRICHLET. Rend. Circ. matem. di Palermo **61** (1937), S. 177—220, insbes. S. 206.

abgeschlossenen Stetigkeitsintervall gleichmäßig eine Lipschitz-Bedingung[10]) (kurz L-Bedingung) befriedigt. Es existiere $\int\limits_S |f(\sigma)|\, d\sigma$ und es sei

$$\int\limits_S f(\sigma)\, d\sigma = 0 \quad (\sigma \text{ ein Punkt auf } S, d\sigma \text{ das Flächenelement}).$$

Weiterhin denken wir uns (vgl. Fig. 1) in T zu S die Schar der Parallelflächen S_δ (die die Bereiche T_δ beranden) gezogen, wobei δ den Abstand zwischen S und S_δ bedeutet ($S_0 = S$); für hinreichend kleine δ, etwa $\delta < \delta_0$, ist dies möglich. Ordnet man überdies diejenigen Punkte von S und S_δ, die auf der gleichen Normalen (n) zu S liegen, einander zu, so besteht eine umkehrbar eindeutige Abbildung zwischen S und S_δ. Es gilt nun der folgende

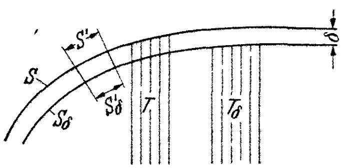

Fig. 1.

Unitätssatz: Es gibt (bis auf eine additive Konstante) höchstens eine in T reguläre, in $T+S$ dem Absolutbetrag nach beschränkte Lösung u der Gleichung $\Delta u = 0$, deren Ableitung in Richtung (n) der Innennormalen bei Annäherung an jedes abgeschlossene Stetigkeitsintervall von f auf S gleichmäßig gegen den vorgeschriebenen Wert $f(\sigma)$ konvergiert[11]) und für die bezüglich der Parallelkurven S_δ

$$\lim_{\delta \to 0} \int\limits_{S_\delta} \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right| d\sigma_\delta = \int\limits_S |f(\sigma)|\, d\sigma \tag{1}$$

ist, unter $d\sigma_\delta$ das Flächenelement auf S_δ verstanden.

Beweis. Der Einfachheit halber nehmen wir eine einzige Stelle der Nichtbeschränktheit von $f(\sigma)$ an. Es möge etwa zwei Lösungen u_1 und u_2 geben und es sei $u_1 - u_2 = v$ mit

$$|v| < A \tag{2}$$

gesetzt. Es liege nun die Parallelkurve S_δ so nahe bei S, $\delta < \delta_1$, daß

$$\left| \int\limits_{S_\delta} \left| \frac{\partial u_1}{\partial n} \right| d\sigma_\delta - \int\limits_S |f|\, d\sigma \right|, \quad \left| \int\limits_{S_\delta} \left| \frac{\partial u_2}{\partial n} \right| d\sigma_\delta - \int\limits_S |f|\, d\sigma \right| < \frac{\varepsilon}{8A} \tag{3}$$

---

[10]) D. h. für beliebige Punktepaare $(\sigma, \bar\sigma)$ eines solchen Intervalls mit dem (auf S gemessenen) kürzesten Abstand $\delta_{\sigma\bar\sigma} < h_0$ besteht eine Ungleichung der Form $|f(\sigma) - f(\bar\sigma)| < c\, \delta_{\sigma\bar\sigma}^{\varrho}$, ($c$, ϱ, h_0 konstant, $0 < \varrho < 1$).

[11]) Dann verhält sich $\frac{\partial u}{\partial n}$ beim Übergang auf ein solches Intervall stetig. Umgekehrt folgt aus dem stetigen Übergang auch die gleichmäßige Konvergenz.

ist, unter ε eine beliebig kleine, fest vorgegebene positive Zahl verstanden. Weiter grenzen wir um die Ausnahmestelle ein genügend kleines Intervall S' ab (vgl. Fig. 1), für das

$$\int\limits_{S'} |f|\, d\sigma < \frac{\varepsilon}{8A} \tag{4}$$

gilt; sodann wird noch, unter S'_δ das zu S' entsprechende, durch die Normalen in den Endpunkten ausgeschnittene Stück der Parallelkurve S_δ verstanden, ein $\delta_2 > 0$ so gewählt, daß für alle $\delta < \delta_2$

$$\left|\int\limits_{S_\delta - S'_\delta} \left|\frac{\partial u_1}{\partial n}\right| d\sigma_\delta - \int\limits_{S - S'} |f|\, d\sigma\right|, \quad \left|\int\limits_{S_\delta - S'_\delta} \left|\frac{\partial u_2}{\partial n}\right| d\sigma_\delta - \int\limits_{S - S'} |f|\, d\sigma\right| < \frac{\varepsilon}{8A} \tag{5}$$

ausfällt. Dann ist wegen (3), (4) und (5)

$$\int\limits_{S'_\delta} \left|\frac{\partial u_1}{\partial n}\right| d\sigma_\delta = \int\limits_{S_\delta} \left|\frac{\partial u_1}{\partial n}\right| d\sigma_\delta - \int\limits_{S} |f|\, d\sigma - \int\limits_{S_\delta - S'_\delta} \left|\frac{\partial u_1}{\partial n}\right| d\sigma_\delta + \int\limits_{S - S'} |f|\, d\sigma$$
$$+ \int\limits_{S'} |f|\, d\sigma < \frac{3\varepsilon}{8A}, \quad \int\limits_{S'_\delta} \left|\frac{\partial u_2}{\partial n}\right| d\sigma_\delta < \frac{3\varepsilon}{8A}. \tag{6}$$

Ist noch für alle $\delta < \delta_3$

$$\int\limits_{S_\delta - S'_\delta} \left|\frac{\partial v}{\partial n}\right| d\sigma_\delta < \frac{\varepsilon}{4A},$$

so bekommen wir wegen

$$\int\limits_{S_\delta} \left|\frac{\partial v}{\partial n}\right| d\sigma_\delta = \int\limits_{S'_\delta} + \int\limits_{S_\delta - S'_\delta} \leqq \int\limits_{S'_\delta} \left(\left|\frac{\partial u_1}{\partial n}\right| + \left|\frac{\partial u_2}{\partial n}\right|\right) d\sigma_\delta + \int\limits_{S_\delta - S'_\delta} \left|\frac{\partial v}{\partial n}\right| d\sigma_\delta \tag{7}$$

mit Rücksicht auf (2) schließlich

$$\left|\int\limits_{S_\delta} v \frac{\partial v}{\partial n}\, d\sigma_\delta\right| < \varepsilon, \qquad (\delta < \mathrm{Min}\,(\delta_1, \delta_2, \delta_3)), \tag{8}$$

woraus unter Beachtung der auf T_δ angewendeten GREENschen Formel

$$\int\limits_{T} \left\{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right\} d\tau = \lim_{\delta \to 0} \int\limits_{T_\delta} \left\{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right\} d\tau_\delta = 0 \tag{9}$$

($d\tau$, $d\tau_\delta$ die Volumenelemente in T, T_δ)

folgt; damit ist die Einzigkeit bewiesen[12]).

---

[12]) Die Anwendung von Parallelkurven bei Behandlung der GREENschen Formeln, allerdings für durchweg stetige Normalableitung auf dem Rande, findet sich meines Wissens zuerst bei A. LIAPOUNOFF, Journ. de Math. (5) 4 (1898), S. 241—311.

b) Dritte Randwertaufgabe.

Wie in IIa) sei wieder der Bereich $T + S$ vorgelegt und auf S eine absolut integrierbare Funktion $f(\sigma)$ gegeben, die an endlich vielen Stellen nicht beschränkt zu sein braucht, im übrigen aber stetig ist und in jedem abgeschlossenen Stetigkeitsintervall gleichmäßig einer L-Bedingung genügt; ferner möge auf S noch eine weitere, dort durchweg stetige und nirgends positive Funktion $h(\sigma)$ erklärt sein ($h \not\equiv 0$). Wir betrachten wieder für $\delta < \delta_0$ die Schar der Parallelflächen S_δ und erklären auf jeder von diesen eine Funktion $h_\delta(\sigma_\delta)$ durch die Festsetzung, daß in zusammengehörigen (d. h. auf der gleichen Normalen zu S liegenden) Punkten

$$h_\delta(\sigma_\delta) = h(\sigma) \tag{10}$$

sein soll. Nunmehr gilt der

Unitätssatz. Es gibt höchstens eine in T reguläre, in $T + S$ dem Absolutbetrag nach beschränkte Lösung der Gleichung $\Delta u = 0$, die so beschaffen ist, daß bei Annäherung an jedes abgeschlossene Stetigkeitsintervall von f auf S $\frac{\partial u}{\partial n} + h_\delta u$ gleichmäßig gegen den Wert $f(\sigma)$ konvergiert und daß

$$\lim_{\delta \to 0} \int\limits_{S_\delta} \left| \frac{\partial u}{\partial n} + h_\delta u \right| d\sigma_\delta = \int\limits_S |f(\sigma)|\, d\sigma \tag{11}$$

gilt[13]).

---

[13]) Die Existenz des Grenzwertes (11) ist z. B. gesichert, wenn

$$\lim_{\delta \to 0} \int\limits_{S_\delta} \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right| d\sigma_\delta = \int\limits_S \left| \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_S \right| d\sigma \quad \text{und} \quad \lim_{\delta \to 0} \int\limits_{S_\delta} |u| \cdot d\sigma_\delta = \int\limits_S |(u)_S|\, d\sigma \tag{11a}$$

ist, unter $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_S$ bzw. $(u)_S$ die Grenzwerte von $\frac{\partial u}{\partial n}$ bzw. u bei Annäherung an S verstanden, die in allen abgeschlossenen Stetigkeitsintervallen von $f(\sigma)$ gleichmäßig existieren und über S absolut integrierbar sein sollen. Man erkennt nämlich wie in IIa, daß sich $\int\limits_{S'_\delta} \left|\frac{\partial u}{\partial n}\right| d\sigma_\delta$ und $\int\limits_{S'_\delta} |u|\, d\sigma_\delta$ gleichmäßig für alle $\delta < \bar{\delta}$ beliebig klein machen lassen. Hieraus ergibt sich aber wegen

$$\int\limits_{S_\delta} \left| \frac{\partial u}{\partial n} + h_\delta u \right| d\sigma_\delta - \int\limits_S |f(\sigma)|\, d\sigma$$

$$= \int\limits_{S'_\delta} \left| \frac{\partial u}{\partial n} + h_\delta u \right| d\sigma_\delta + \int\limits_{S_\delta - S'_\delta} \left| \frac{\partial u}{\partial n} + h_\delta u \right| d\sigma_\delta - \int\limits_{S - S'} |f(\sigma)|\, d\sigma - \int\limits_{S'} |f(\sigma)|\, d\sigma$$

leicht die Gültigkeit von (11).

Beweis. In der Bezeichnungsweise von IIa) findet sich für genügend kleines δ, etwa $\delta < \delta_4$, entsprechend

$$(12) \qquad \int\limits_{S'_\delta} \left| \frac{\partial u_1}{\partial n} + h_\delta u_1 \right| d\sigma_\delta, \quad \int\limits_{S'_\delta} \left| \frac{\partial u_2}{\partial n} + h_\delta u_2 \right| d\sigma_\delta < \frac{3\varepsilon}{8A}.$$

Es sei jetzt δ_5 so klein gewählt, daß für alle $\delta < \delta_5$ mit $v = u_1 - u_2$

$$(13) \qquad \int\limits_{S_\delta - S'_\delta} \left| \frac{\partial v}{\partial n} + h_\delta v \right| d\sigma_\delta < \frac{\varepsilon}{4A}$$

ausfällt; somit ist

$$(14) \qquad \int\limits_{S_\delta} \left| \frac{\partial v}{\partial n} + h_\delta v \right| d\sigma_\delta < \frac{\varepsilon}{A}$$

und also mit $|v| < A$

$$(15) \qquad \int\limits_{S_\delta} |v| \left| \frac{\partial v}{\partial n} + h_\delta v \right| d\sigma_\delta < \varepsilon, \qquad (\delta < \mathrm{Min}\,(\delta_4, \delta_5)).$$

Hieraus ergibt sich

$$(16) \quad \left| \int\limits_{T_\delta} \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 \right\} d\tau_\delta - \int\limits_{S_\delta} h_\delta v^2 \, d\sigma_\delta \right| = \left| \int\limits_{S_\delta} v \left(\frac{\partial v}{\partial n} + h_\delta v \right) d\sigma \right| < \varepsilon$$

und daher wegen $h_\delta \leqq 0$

$$(17) \quad \int\limits_{T} \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 \right\} d\tau = \lim_{\delta \to 0} \int\limits_{T_\delta} \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 \right\} d\tau_\delta = 0,$$

$$\lim_{\delta \to 0} \int\limits_{S_\delta} h_\delta v^2 \, d\sigma_\delta = 0,$$

woraus die Behauptung folgt.

c) *Anwendung auf das Potential der einfachen Schicht. Erweiterungen.*

Aus den Untersuchungen von Carleman[14]) erkennt man leicht, daß die als Potential der einfachen Schicht dargestellte Lösung die unter a) und b) gestellten Forderungen erfüllt. Bezeichnet nämlich $U(x, y, z) = \int\limits_S \mu'(\sigma) \frac{1}{r} \, d\sigma$

[14]) Vgl. l. c. [2]), insbesondere S. 2ff., Gleichung (2) und (5), wobei die dortigen Betrachtungen sogar für Gebiete mit Kanten (in der Ebene mit Ecken) gelten.

dieses Potential, wobei nach PLEMELJ $\mu'(\sigma)$ die gleichen Eigenschaften wie $f(\sigma)$ aufweist, so ist in unserer Bezeichnungsweise für hinreichend kleine δ, etwa $\delta < \delta^*$,

$$\int\limits_{S'_\delta} \left|\frac{\partial U}{\partial n}\right| d\sigma_\delta < \varepsilon, \qquad \int\limits_{S'_\delta} |U|\, d\sigma_\delta < \varepsilon.$$

Hieraus folgt sogleich, daß die Voraussetzung (1) bzw. die in Fußnote [13]) erwähnten Forderungen (11a) und somit auch (11) erfüllt sind. Da ferner f und also auch μ' in jedem abgeschlossenen Stetigkeitsintervall gleichmäßig einer L-Bedingung genügen, so sind $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ beim Übergang auf ein solches Randintervall stetig[15]). Das Potential der einfachen Schicht ist also die einzige Lösung des Problems.

Es sei noch bemerkt, daß die Betrachtungen natürlich in gleicher Weise in der Ebene gelten, ferner auch im Raume für Gebiete mit Kanten, in der Ebene für Gebiete mit Ecken. In diesem Fall müssen die Betrachtungen, ähnlich wie bei CARLEMAN [l. c.[2])] durchgeführt werden; insbesondere ist es zweckmäßig, die Definition der Parallelflächen bzw. -kurven jetzt wie dort zu modifizieren. Ebenso gelten auch die Unitätssätze bei dem entsprechenden Problem für das Außengebiet von S, wenn man Regularität (im PLEMELJschen Sinne) im Unendlichen verlangt, da dann ja auch die GREENschen Formeln für T_δ gelten. — Besitzt schließlich beim dritten Randwertproblem die Funktion h eine endliche Anzahl von Unendlichkeitsstellen σ_ν, in deren Umgebung sie gleichmäßig Ungleichungen der Form $|h(\sigma)| < \frac{\text{konst}}{r_{\sigma\sigma_\nu}^{\lambda'}}$ $(0 < \lambda' < 1$, $r_{\sigma\sigma_\nu}$ Abstand der Punkte σ und $\sigma_\nu)$ genügt, so lassen sich die Betrachtungen ebenfalls ohne Mühe übertragen. Insbesondere genügt auch jetzt das Potential der einfachen Schicht den Voraussetzungen[16]).

---

[15]) Vgl. z. B. L. LICHTENSTEIN, Neuere Entwicklung der Potentialtheorie. Konforme Abbildung. Enzykl. d. math. Wiss., Bd. II 3, S. 177—377, insbes. S. 201; die dort aufgeführten Sätze gelten auch im Innern von Kurven- bzw. Flächenstücken. Dann sind auch [vgl. Fußnote [11])] die Voraussetzungen über die Konvergenz von $\frac{\partial u}{\partial n}$ bei Annäherung an S erfüllt.

[16]) An Stelle der 2. Bedingung in (11a) [Fußnote [11])] ist jetzt

$$\lim_{\delta \to 0} \int\limits_{S_\delta} |h_\delta|\,|u|\, d\sigma_\delta = \int\limits_{S} |h|\,|u|\, d\sigma$$

zu setzen. Es sei noch bemerkt, daß die Lösungs*existenz* beim Außenproblem der dritten Randwertaufgabe die stückweise Stetigkeit von h verlangt. Vgl. l. c.[2a]), wo dies gezeigt wird.

III. Einzigkeit in der Ebene mit Hilfe der konjugierten Potentialfunktion.

a) *Die zweite Randwertaufgabe.*

Es werde in der Ebene (x, y) ein endliches oder unendliches, von einer einzigen geschlossenen, stetig gekrümmten JORDANschen Kurve S begrenztes Gebiet T betrachtet[13a]); die Punkte von S sind durch ihre, von einem festen Punkt aus gemessene Bogenlänge s gekennzeichnet. Auf S sei eine, abgesehen von endlich vielen Stellen s_ν $(\nu = 1, \ldots, n)$, an denen sie nicht notwendig beschränkt zu sein braucht, stetige Funktion $f(s)$ gegeben, die in jedem abgeschlossenen, solche Stellen nicht enthaltenden Teilintervall gleichmäßig einer L-Bedingung genügt und die in der Umgebung einer jeden Ausnahmestelle s_ν eine Ungleichung der Form

$$|f(s)| < \frac{C}{|s - s_\nu|^\lambda} \tag{18}$$

$$(0 < \lambda < 1, \text{ konstant; } C \text{ konstant, wie später } C_1,\ C_2, \ldots)$$

befriedigt. Wird weiter $\int\limits_S f(s)\,ds = 0$ vorausgesetzt, so gilt für das zweite Randwertproblem der folgende

Unitätssatz. Es gibt (bis auf eine additive Konstante) höchstens eine in T reguläre, in $T + S$ stetige Lösung u der Gleichung $\Delta u = 0$, deren Normalableitung $\frac{\partial u}{\partial n}$ bei Annäherung an jedes abgeschlossene Stetigkeitsintervall von f gleichmäßig gegen die Wertefolge $f(s)$ konvergiert, wenn noch verlangt wird, daß u auf S, als Funktion von s betrachtet, gleichmäßig einer L-Bedingung genügt und daß, falls T nicht beschränkt ist, für $R \to \infty$

$$\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y} = O\left(\frac{1}{R^{1+\tau}}\right) \quad (R^2 = x^2 + y^2;\ \tau > 0, \text{ konstant})$$

gilt [17]).

Bevor wir dies beweisen, behaupten wir zunächst den

Hilfssatz. Genügt eine in T reguläre, in $T + S$ stetige Potentialfunktion $v(x, y)$ gleichmäßig auf der stetig gekrümmten Kurve S einer Lipschitz-Bedingung mit dem Exponenten ϱ $(0 < \varrho < 1)$, so erfüllt auch die

---

16a) Es können auch, ohne daß die folgenden Betrachtungen wesentlich geändert werden müßten, eine endliche Anzahl von Ecken oder einspringenden Spitzen zugelassen werden, falls im übrigen die Kurvenstücke von S analytisch sind. Hierin ist z. B. der für manche Anwendungen wichtige Spezialfall der längs einer Strecke aufgeschlitzten Ebene enthalten.

17) Die letzte Forderung, die die Existenz von $\lim\limits_{R \to \infty} u$ sicherstellt, geht über die PLEMELJsche Regularitätsdefinition [vgl. l. c.[7]), S. 4] hinaus, nach der für $R \to \infty$ nur $\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y} = o\left(\frac{1}{R}\right)$ sein soll.

zu v konjugierte Potentialfunktion $\bar{v}(x, y)$ auf S gleichmäßig eine L-Bedingung mit dem gleichen Exponenten ϱ.

Nach PRIWALOFF [18]) gilt dieser Satz, falls S eine Kreislinie ist; für Bereiche mit stetig gekrümmter Berandung ist er dann leicht zu beweisen:

Bildet nämlich die analytische Funktion $Z(z)$ den endlichen (bzw. unendlichen) Bereich T der Ebene $z = x + iy$ umkehrbar eindeutig und konform auf das Innere (bzw. Äußere) T des Einheitskreises Σ der Ebene $Z = X + iY$ ab, so verhält sich wegen der stetigen Krümmung von S $\frac{dZ}{dz}$ noch auf S stetig und es ist $\left|\frac{dZ}{dz}\right|$ in $T + S$ beschränkt und von Null verschieden [19]). Genügt daher auf S $v(x, y)$ gleichmäßig einer L-Bedingung mit dem Exponenten ϱ, so gilt das gleiche für $v^*(X, Y) = v[x(X, Y), y(X, Y)]$, also nach PRIWALOFF auch für die Konjugierte $\bar{v}^*(X,Y)$ und somit schließlich für $\bar{v}(x,y) = \bar{v}^*[X(x, y), Y(x, y)]$ [19a]).

Nun der Beweis des Unitätssatzes: Wir führen in bekannter Weise das zweite Randwertproblem auf das erste zurück. Die (bis auf eine additive Konstante festgelegte) konjugierte Potentialfunktion $\bar{u}$ einer jeden Lösung u unserer Randwertaufgabe genügt mit Rücksicht auf den eben bewiesenen Hilfssatz unter den Voraussetzungen des Unitätssatzes auf S gleichmäßig einer L-Bedingung, hat, falls T nicht beschränkt ist, unter unseren Annahmen das gleiche Unendlichkeitsverhalten wie u und muß in allen abgeschlossenen Stetigkeitsintervallen von f auf S wegen $\frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial \bar{u}}{\partial s}$ gleichmäßig die Vorgabe

$$\lim_{(x, y) \to s} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial s}\right) = -f(s)$$

erfüllen. Hieraus folgt, daß $\bar{u}(x, y)$ bei Annäherung an S stetig in die [wegen (18) überall existierende], wegen $\int\limits_S f(s)\, ds = 0$ bis auf eine additive Konstante C eindeutige Randfunktion

$$F(s) = -\int\limits_{s^*}^{s} f(t)\, dt \quad (s^* \text{ ein beliebiger fester Punkt auf } S)$$

übergehen muß, die tatsächlich mit Rücksicht auf (18) gleichmäßig auf S einer L-Bedingung mit dem Exponenten $1 - \lambda$ genügt [20]). Hierdurch ist

---

[18]) I. PRIWALOFF, Sur les fonctions conjuguées. Bull. soc. math. France 44 (1916), S. 100—103.

[19]) Vgl. l. c. [15]), S. 254.

[19a]) Unter den Annahmen der Fußnote [16a]) wird sich beim Übergang von $v(x, y)$ zu $\bar{v}(x, y)$ im allgemeinen der L-Exponent ändern, ohne zu verschwinden, Vgl. l. c. [15]), S. 255.

[20]) Das erkennt man leicht folgendermaßen: Wegen der in der Nachbarschaft jeder Stelle s_ν gültigen Ungleichheit $|F(s^{(1)}) - F(s^{(2)})| < C \int\limits_{s^{(1)}}^{s^{(2)}} \frac{ds}{|s - s_\nu|^\lambda}$ findet man

(bis auf eine additive Konstante) die in T (gegebenenfalls einschließlich des unendlich fernen Punktes) reguläre Potentialfunktion $\bar{u}(x, y)$ eindeutig festgelegt, woraus sogleich folgt, daß es (ebenfalls bis auf eine additive Konstante) höchstens eine Lösung u der zweiten Randwertaufgabe geben kann, die den Forderungen des Unitätssatzes genügt.

b) Erfüllung der Voraussetzungen des Unitätssatzes.

Aus den Plemeljschen Untersuchungen [l. c. [1])] folgt, daß eine Lösung der zweiten Randwertaufgabe sogar unter der Voraussetzung (18) existiert; sie läßt sich als Potential einer einfachen Schicht darstellen und erfüllt, falls T nicht beschränkt ist, unsere Voraussetzungen über das Verhalten für $R \to \infty$. Wie in IIc) erkennt man wieder, daß sich ihre Ableitungen erster Ordnung beim Übergang auf jedes auf S gelegene Stetigkeitsintervall von f stetig verhalten [vgl. Fußnote [15])].

Wir behaupten, daß diese Lösung, die bis auf eine additive Konstante

$$U(x, y) = \int_S \mu'(t) \log \frac{1}{r}\, dt$$

$$(t = (x_t, y_t) \text{ der Integrationspunkt auf } S,\ r^2 = (x - x_t)^2 + (y - y_t)^2)$$

lauten möge, auf S gleichmäßig einer L-Bedingung mit dem Exponenten $1 - \lambda$ genügt und daß somit sämtliche Voraussetzungen des Unitätssatzes erfüllt sind.

Wie Plemelj zeigte, hat $\mu'(s)$ die gleichen Stetigkeitseigenschaften wie $f(s)$; insbesondere gilt also in der Nachbarschaft der s_ν

$$|\mu'(s)| < \frac{C_1}{|s - s_\nu|^\lambda}. \tag{19}$$

---

z. B. für $s^{(1)} < s^{(2)} \leqq s_\nu$: $|F(s^{(1)}) - F(s^{(2)})| < \frac{C}{1-\lambda}[(s_\nu - s^{(1)})^{1-\lambda} - (s_\nu - s^{(2)})^{1-\lambda}]$, und es ist leicht zu sehen (etwa durch Betrachtung der Funktion $\varphi(\eta) = (1-\eta)^{1-\lambda} - (1 - \eta^{1-\lambda})$ mit $\eta = \frac{s^{(2)} - s^{(1)}}{s_\nu - s^{(1)}}$, $0 \leqq \eta \leqq 1$), daß durchweg

$$\frac{(s_\nu - s^{(1)})^{1-\lambda} - (s_\nu - s^{(2)})^{1-\lambda}}{(s^{(2)} - s^{(1)})^{1-\lambda}} \leqq 1$$

ist. Analoges gilt für $s_\nu \leqq s^{(1)} < s^{(2)}$. Ist $s^{(1)} \leqq s_\nu \leqq s^{(2)}$, so gilt wegen $\int_{s^{(1)}}^{s^{(2)}} = \int_{s^{(1)}}^{s_\nu} + \int_{s_\nu}^{s^{(2)}}$ die Abschätzung $|F(s^{(1)}) - F(s^{(2)})| < \frac{C}{1-\lambda}[(s_\nu - s^{(1)})^{1-\lambda} + (s^{(2)} - s_\nu)^{1-\lambda}]$ $\leqq \frac{2C}{1-\lambda}(s^{(2)} - s^{(1)})^{1-\lambda}$.

Die zu U konjugierte Potentialfunktion

$$\overline{U}(x, y) = -\int_S \mu'(t) \operatorname{arctg} \frac{y - y_t}{x - x_t} dt + C^* \quad (C^* \text{ eine beliebige Konstante})$$

läßt sich mit $\mu(s) = \int_{\bar{s}}^{s} \mu'(t)\, dt$ [$\bar{s} = (x_{\bar{s}}, y_{\bar{s}})$ ein fester Punkt auf S] und $m = \int_S \mu'(t)\, dt$ [21] nach einer Integration per partes in der Gestalt [22])

$$(20) \qquad \overline{U}(x, y) = -m \operatorname{arctg} \frac{y - y_{\bar{s}}}{x - x_{\bar{s}}} + \int_S \mu(t) \frac{d}{dt}\left(\operatorname{arctg} \frac{y - y_t}{x - x_t}\right) dt + C^*$$

schreiben. Der Integralausdruck in (20) stellt wegen $\frac{d}{dt}\left(\operatorname{arctg} \frac{y - y_t}{x - x_t}\right) = \frac{d}{d n_t} \log \frac{1}{r}$ das Potential einer Doppelschicht dar. Bei Annäherung des Punktes (x, y) aus T an einem beliebigen Randpunkt $s = (x_s, y_s)$ geht daher $\overline{U}(x, y)$ in den Ausdruck

$$(21) \quad [\overline{U}(x, y)]_{(x, y) \to s} = -m \operatorname{arctg} \frac{y_s - y_{\bar{s}}}{x_s - x_{\bar{s}}} \pm \pi \mu(s) + \int_S \mu(t) \frac{d}{d n_t} \log \frac{1}{r_{st}} dt + C^*$$

über, wobei die Normalenrichtung in das Innere des von S umschlossenen beschränkten Bereiches weist und das +- oder —-Zeichen zu nehmen ist, je nachdem T beschränkt ist oder nicht. Nun gilt wegen (19), wie man leicht [wie in Fußnote [20])] nachprüft, gleichmäßig auf S

$$(22) \qquad |\mu(s^{(1)}) - \mu(s^{(2)})| < C_2 |s^{(1)} - s^{(2)}|^{1-\lambda};$$

weiter ist auf S $\frac{d}{ds}\left(\operatorname{arctg} \frac{y_s - y_{\bar{s}}}{x_s - x_{\bar{s}}}\right)$ außer im Punkte $\bar{s}$ stetig und bleibt bei Annäherung an $\bar{s}$ beschränkt; der Ausdruck $\int_S \mu(t) \frac{d}{d n_t} \log \frac{1}{r_{st}} dt$ besitzt aber wegen (22) eine durchweg stetige Ableitung nach s [23]). Alles in allem ist daher mit Rücksicht auf (21) gleichmäßig auf S

$$|[\overline{U}(x, y)]_{(x, y) \to s^{(1)}} - [\overline{U}(x, y)]_{(x, y) \to s^{(2)}}| < C_3 |s^{(1)} - s^{(2)}|^{1-\lambda}.$$

Hieraus folgt nach dem zu Beginn von IIIa angeführten Hilfssatze, daß gleichmäßig auf S auch

$$(23) \qquad |U(s^{(1)}) - U(s^{(2)})| < C_4 |s^{(1)} - s^{(2)}|^{1-\lambda}$$

gilt, wobei zur Abkürzung $[U(x, y)]_{(x, y) \to s^{(1)}} = U(s^{(1)})$, $[U(x, y)]_{(x, y) \to s^{(2)}} = U(s^{(2)})$ gesetzt ist.

---

[21]) Enthält T den unendlich fernen Punkt, so ist $m = 0$.
[22]) Vgl. z. B. J. Plemelj, l. c. [7]), S. 24.
[23]) Vgl. l. c. [15]), S. 205.

Damit ist gezeigt, daß die in Gestalt eines Potentials einer einfachen Schicht darstellbare Plemelj-Lösung der zweiten Randwertaufgabe die Voraussetzungen des Unitätssatzes erfüllt und somit auch die einzige Lösung ist.

c) Die dritte Randwertaufgabe.

Es sei $h(s)$ eine weitere auf S gegebene und, falls es sich im folgenden um das Innenproblem handelt, wie $f(s)$ beschaffene Funktion, für die insbesondere in der Umgebung der Unendlichkeitsstellen $\bar{s}_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, m)$, die nicht mit den zu $f(s)$ gehörigen s_ν zusammenfallen brauchen, eine zu (18) analoge Ungleichung gilt; beim Außenproblem soll $h(s)$ beschränkt und stückweise stetig sein (vgl. die letzte Bemerkung in Fußnote [16])). Wir nehmen ferner an, daß die homogene Integralgleichung für die Belegungsdichte der als Potential einer einfachen Schicht angesetzten Lösung der dritten Randwertaufgabe keine nichttriviale Lösung hat [24]). Dann haben wir für das dritte Randwertproblem den folgenden

Unitätssatz. Es gibt höchstens eine in T reguläre, in $T + S$ stetige Lösung u der Gleichung $\Delta u = 0$, die auf S an allen Stetigkeitsstellen von f und h der Bedingung $\frac{\partial u}{\partial n} + h(s)\, u = f(s)$ genügt, falls noch verlangt wird, daß $\frac{\partial u}{\partial n}$ bei Annäherung an jedes auf S gelegene abgeschlossene Stetigkeitsintervall von f und h gleichmäßig konvergiert, daß ferner u auf S gleichmäßig einer L-Bedingung genügt und daß, wenn T nicht beschränkt ist, ür $R \to \infty$ $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} = O\left(\frac{1}{R^{1+\tau}}\right)$ $(R^2 = x^2 + y^2,\ \tau > 0$, konstant) gilt.

Beweis. Wegen der Randbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -\,h(s)\, u + f(s)$$

geht bei Annäherung an jedes abgeschlossene, keine der s_ν und $\bar{s}_\nu$ enthaltende Teilintervall $\frac{\partial u}{\partial n}$ gleichmäßig gegen eine dort gleichmäßig einer L-Bedingung genügende Randfunktion, für die in der Nachbarschaft der s_ν und $\bar{s}_\nu$ eine zu (18) analoge Ungleichung gilt.

Gäbe es nun mehrere, den Voraussetzungen des Unitätssatzes genügende Lösungen des dritten Randwertproblems, so müßte sich eine jede, wie unter III a und III b gezeigt wurde, notwendig in der Gestalt

$$u(x, y) = \int_S \mu'(t) \log \frac{1}{r}\, dt + N \qquad (N \text{ konstant}) \tag{24}$$

darstellen lassen.

---

[24]) Das ist z. B. gewiß für stetiges $h \leqq 0$ $(h \not\equiv 0)$ der Fall, falls es auf S keine Belegung $\varkappa(s)$ gibt, derart, daß $\int_S \varkappa(t) \log \frac{1}{r}\, dt$ identisch in T verschwindet.

Ist T beschränkt, so läßt sich bekanntlich die Konstante N als Potential einer einfachen Schicht schreiben; hieraus folgt, daß sich auch $u(x, y)$ insgesamt als Potential einer einfachen Schicht darstellen lassen muß. Unter unseren Voraussetzungen zeigt aber die Theorie der linearen Integralgleichungen[25]), daß es genau ein einziges solches, der Randbedingung genügendes Potential gibt, womit in diesem Fall die Einzigkeit bewiesen ist.

Ist T nicht beschränkt, so folgt aus der Existenz einer und nur einer Lösung von der Gestalt (24), für die überdies $\int\limits_S \mu'(t)\,dt = 0$ ist[26]), und aus der Zwangsläufigkeit dieser Darstellung, daß auch diese Lösung im Rahmen unserer Voraussetzungen die einzige ist.

IV. Ein zweiter Beweis für das in IIIb dargestellte Verhalten eines Potentials der einfachen Schicht auf der belegten Kurve.

Im folgenden wird ein zweiter Beweis[27]) dafür gegeben, daß unter der Annahme, daß $\mu'(s)$ in einer gewissen Umgebung der Stellen s_ν,

$$|s - s_\nu| \leqq D_1,$$

gleichmäßig für alle ν einer Ungleichung der Form

$$\mu'(s) < \frac{C_1}{|s - s_\nu|^\lambda} \tag{25}$$

genügt, die Funktion

$$U(x, y) = \int\limits_S \mu'(t) \log \frac{1}{r}\, dt$$

auf S gleichmäßig eine L-Bedingung befriedigt. Obwohl sich jetzt für den L-Exponenten ein kleinerer Wert als $1 - \lambda$ ergibt, ist die folgende Betrachtung doch nützlich, da sie sich ohne Mühe auf den Raum übertragen läßt, was natürlich auf dem in III b beschrittenen Wege unmöglich ist.

Wir betrachten den Ausdruck

$$U(s^{(1)}) - U(s^{(2)}) = \int\limits_S \mu'(t) \left(\log \frac{1}{r_1} - \log \frac{1}{r_2}\right) dt, \tag{26}$$

$$r_1^2 = (x_1 - x_t)^2 + (y_1 - y_t)^2, \qquad r_2^2 = (x_2 - x_t)^2 + (y_2 - y_t)^2,$$

---

[25]) Vgl. J. Plemelj, l. c.[1]), S. 199 f.

[26]) Vgl. hierzu l. c.[2a]), wo der Existenzbeweis durchgeführt wird.

[27]) Wir bedienen uns hier einer ähnlichen Methode, wie sie Korn im Falle beschränkter Belegung anwendete. Vgl. A. Korn, Lehrbuch der Potentialtheorie, Bd. I, Berlin 1899, S. 388 f.; ferner: Untersuchungen zur allgemeinen Theorie der Potentiale von Flächen und Räumen. Sitz.ber. d. math.-phys. Klasse der Bayer. Akad. d. Wiss. 36 (1906), S. 3—36.

unter $s^{(1)} = (x_1, y_1)$ und $s^{(2)} = (x_2, y_2)$ zwei feste Punkte auf S mit dem Abstand $d_{12} = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$ und unter (x_t, y_t) den Integrationspunkt t verstanden.

Es sei $2\,D_2$ der kleinste, längs S gemessene Abstand zwischen zwei Unendlichkeitsstellen s_ν; innerhalb des Intervalls

$$|s - s_\nu| \leqq D_2 \tag{27}$$

liegt daher keine weitere Ausnahmestelle.

Es sei weiter $B > 1$ eine feste Konstante. Dann definieren wir eine Zahl $\delta_0 = \delta_0(B)$ wie folgt: Für alle Punktepaare σ_1 und σ_2 auf S, deren geradliniger Abstand δ_{12} der Ungleichung

$$\delta_{12} < \delta_0 \tag{28}$$

genügt, bestehe (man beachte die stetige Krümmung von S) zwischen der absolut kleinsten Bogenlängendifferenz $\sigma_2 - \sigma_1$ und δ_{12} gleichmäßig die Ungleichung

$$1 \leqq \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{\delta_{12}} \leqq B. \tag{29}$$

Insbesondere befinden sich die Punktepaare, deren Bogenlängendifferenzen der Ungleichung

$$|\sigma_1 - \sigma_2| < \delta_0 \tag{30}$$

genügen, unter den Punktepaaren (28).

Ist jetzt

$$D = \operatorname{Min}(D_1, D_2, \tfrac{1}{2}\delta_0), \tag{31}$$

so liegt in dem Intervall $|s - s_\nu| \leqq D$ keine weitere Ausnahmestelle; ferner gilt dort (25) und (29).

Wir betrachten weiter alle auf S gelegenen Punktepaare $(s^{(1)}, s^{(2)})$, deren geradlinige Abstände d_{12} der Beschränkung

$$d_{12} \leqq \frac{D}{4\,B} \tag{32}$$

genügen. Wegen (29) und $\frac{D}{4\,B} \leqq \frac{\delta_0}{8}$ gilt für diese gewiß

$$|s^{(1)} - s^{(2)}| \leqq \frac{D}{4}. \tag{33}$$

Jetzt werde um den Halbierungspunkt von d_{12} ein Kreis K mit dem Radius

$$\mathsf{P} = a\, d_{12}^{\bar{\lambda}} \qquad (0 < \bar{\lambda} < 1,\ \text{konstant}) \tag{34}$$

geschlagen; setzen wir die Konstante

$$a = \left(\frac{D}{4\,B}\right)^{1-\bar{\lambda}}, \tag{35}$$

so ist für die durch (32) erfaßten Punktepaare der Durchmesser von K

$$2\,\mathsf{P} < \frac{D}{2B}.$$

Wegen $\frac{D}{2B} \leqq \frac{\delta_0}{4}$ ist (29) auf den durch K ausgeschnittenen Bogen $S^*(\sigma', \sigma'')$ (vgl. Fig. 2) und auf die zugehörige Sehne anwendbar, und es ergibt sich

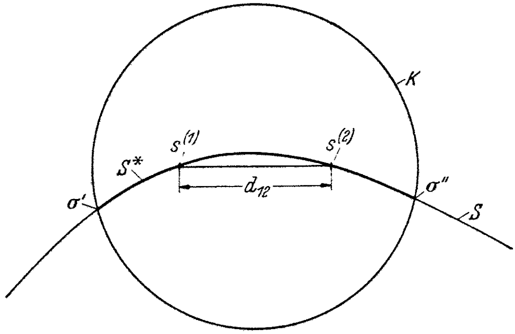

Fig. 2.

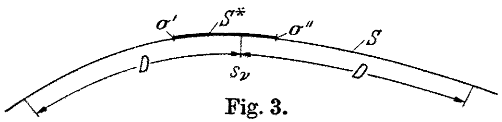

Fig. 3.

(36) $|\sigma' - \sigma''| \leqq \frac{D}{2B} \cdot B = \frac{D}{2}.$

Für die Punktepaare mit (32) ist wegen $\mathsf{P} = \left(\frac{D}{4Bd_{12}}\right)^{1-\bar{\lambda}} d_{12}$

(37) $\mathsf{P} \geqq d_{12}$,

d. h. die Punkte $s^{(1)}$, $s^{(2)}$ liegen im Innern von K.

Auf dem von K ausgeschnittenen Bogen S^* liege jetzt (vgl. Fig. 3) eine der Unendlichkeitsstellen s_ν; wegen (36) ist diese gewiß die einzige. Dann gilt zunächst wegen (26) mit Rücksicht auf (25) und (29)

$$(38) \quad \left|\int\limits_{S^*} \mu'(t)\left(\log\frac{1}{r_1} - \log\frac{1}{r_2}\right) dt\right|$$
$$< C_5 \int\limits_{S^*} \frac{1}{|t-s_\nu|^\lambda}\left(\frac{1}{|t-s^{(1)}|^\vartheta} + \frac{1}{|t-s^{(2)}|^\vartheta}\right) dt, \quad (\vartheta \text{ beliebig in } 0 < \vartheta < 1-\lambda).$$

Es bezeichne S_1^* den Teil von S^*, für dessen mit t bezeichnete Punkte $|t - s_\nu| \leqq |t - s^{(1)}|$, S_2^* den Teil, für den $|t - s_\nu| > |t - s^{(1)}|$ gilt. Dann ist wegen (29) und (34)

$$(39) \quad \int\limits_{S^*} \frac{1}{|t-s_\nu|^\lambda} \cdot \frac{1}{|t-s_1^{(1)}|^\vartheta} dt = \int\limits_{S_1^*} + \int\limits_{S_2^*} \leqq \int\limits_{S^*} \frac{dt}{|t-s_\nu|^{\lambda+\vartheta}} + \int\limits_{S^*} \frac{dt}{|t-s^{(1)}|^{\lambda+\vartheta}}$$
$$< C_6\,\mathsf{P}^{1-\lambda-\vartheta} < C_7\, d_{12}^{\bar{\lambda}(1-\lambda-\vartheta)}.$$

Eine entsprechende Ungleichung gilt für $\int\limits_{S^*} \frac{1}{|t-s_\nu|^\lambda} \cdot \frac{1}{|t-s^{(2)}|^\vartheta} dt.$

Liegt weiter s_ν zwar nicht auf S^*, ist aber die Bogenlänge zwischen s_ν und dem nächstgelegenen Endpunkte σ' oder σ'' von S^* kleiner als $\frac{1}{2} D$ (gilt also $|t - s_\nu| < \frac{1}{2} D$ für alle t auf S^*) (vgl. Fig. 4), so liegt S^* noch in dem Intervall $|s - s_\nu| \leqq D$, und man gelangt durch eine völlig analoge Betrachtung ebenfalls zu zwei Ungleichungen der Form (39), indem man $|t - s_\nu| \geqq |t - \sigma'|$ bzw. $\geqq |t - \sigma''|$ beachtet. — Liegt schließlich kein Ausnahmepunkt s_ν auf S^* und in der eben genannten Nachbarschaft mit der Bogenlänge $\frac{1}{2} D$, so ist μ' auf S^* gleichmäßig für jede Lage dieses Flächenstückes mit $|t - s_\nu| \geqq \frac{1}{2} D$ für alle t auf S beschränkt. Für die linke Seite von (38) finden sich jetzt erst recht entsprechende Ungleichungen und wir bekommen, alles in allem,

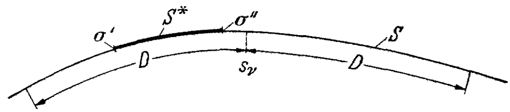

Fig. 4.

$$(40) \qquad \left| \int_{S^*} \mu'(t) \left(\log \frac{1}{r_1} - \log \frac{1}{r_2} \right) dt \right| < C_8 \, d_{12}^{\bar{\lambda}(1-\lambda-\vartheta)} ;$$

dabei ist C_8 eine von der Lage der Punkte $s^{(1)}$ und $s^{(2)}$ und von d_{12} unabhängige Konstante, vorausgesetzt, daß d_{12} der Ungleichung (32) genügt.

Der kleinstmögliche Abstand $r_{\min}$ der Punkte $s^{(1)}$ oder $s^{(2)}$ von der Kreislinie K ist mit Rücksicht auf (37) und (34)

$$(41) \qquad r_{\min} = \mathsf{P} - \frac{d_{12}}{2} \geqq \frac{\mathsf{P}}{2} = C_9 \, d_{12}^{\bar{\lambda}} \text{ [28]}.$$

Für jede Lage des Integrationspunktes $(x_t, y_t) = t$ auf $S - S^*$ ist somit für $d_{12} \leqq \frac{D}{4B}$

$$(42) \qquad \left| \log \frac{1}{r_1} - \log \frac{1}{r_2} \right| < C_{10} \frac{d_{12}}{r_{\min}} < C_{11} \, d_{12}^{1-\bar{\lambda}},$$

und es gilt daher

$$(43) \qquad \left| \int_{S-S^*} \mu'(t) \left(\log \frac{1}{r_1} - \log \frac{1}{r_2} \right) dt \right| < C_{12} \, d_{12}^{1-\bar{\lambda}} \int_S |\mu'(t)| \, dt = C_{13} \, d_{12}^{1-\bar{\lambda}}.$$

Wird jetzt noch

$$(44) \qquad \operatorname{Min} [1 - \bar{\lambda}, \; \bar{\lambda}(1 - \lambda - \vartheta)] = \lambda^* \qquad (0 < \lambda^* < 1)$$

gesetzt, so folgt aus (40) und (43) schließlich

$$(45) \qquad \left| \int_S \mu'(t) \left(\log \frac{1}{r_1} - \log \frac{1}{r_2} \right) dt \right| < C_{14} \, d_{12}^{\lambda^*}.$$

Dies gilt zunächst gleichmäßig für alle Punktepaare, die die Ungleichung (32) erfüllen; bei geeigneter Wahl von C_{14} gilt (45) schließlich ganz allgemein.

[28]) Im räumlichen Falle ist von jetzt ab $0 < \bar{\lambda} < \frac{1}{2}$ anzunehmen.

(Eingegangen am 13. Dezember 1941.)