Eine Ungleichung für Vektorlängen.

Von

Hans Hornich in Wien.

In dieser Arbeit soll eine weitgehende Verallgemeinerung der Dreiecksungleichung gezeigt werden, die trotz ihrer Einfachheit und Allgemeinheit nicht bekannt zu sein scheint. Ihr hier gegebener Beweis erfordert einige Umwege und Hilfssätze.

Sind $\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_n$, $\mathfrak{b}_1 \ldots \mathfrak{b}_m$ *beliebige* $n + m$ *Vektoren mit* $m \geqq 1$ *und mit*

$$\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i = \sum_{j=1}^{m} \mathfrak{b}_j \tag{1}$$

und ist $\mathfrak{c}$ *ein Einheitsvektor eines* R_k, *so gilt die folgende Ungleichung*:

$$\sum_{i=1}^{n} (|\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}| - |\mathfrak{a}_i|) \leqq \sum_{j=1}^{m} (|\mathfrak{b}_j + \mathfrak{c}| - |\mathfrak{b}_j|) + n + m - 2. \tag{2}$$

Als einfachster Spezialfall ergibt sich für $m = 1$ und $n = 2$ mit drei beliebigen Vektoren $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ die Ungleichung:

$$|\mathfrak{a}| + |\mathfrak{b}| + |\mathfrak{c}| + |\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c}| \geqq |\mathfrak{a} + \mathfrak{b}| + |\mathfrak{b} + \mathfrak{c}| + |\mathfrak{c} + \mathfrak{a}|,$$

welche wieder die Dreiecksungleichung als Spezialfall enthält.

Zum Beweis von (2) setzen wir

$$\sum_{i=1}^{n} |\mathfrak{a}_i| + \sum_{j=1}^{m} |\mathfrak{b}_j| = R$$

und zeigen den Hilfssatz:

Es ist gleichmäßig für alle $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{b}_j$, welche (1) erfüllen:

$$\limsup_{R \to \infty} \Big(\sum_{i=1}^{n} (|\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}| - |\mathfrak{a}_i|) - \sum_{j=1}^{m} (|\mathfrak{b}_j + \mathfrak{c}| - |\mathfrak{b}_j|)\Big) \leqq n + m - 2. \tag{3}$$

Zunächst ist:

$$|\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}| - |\mathfrak{a}_i| = \frac{2\,\mathfrak{a}_i\,\mathfrak{c} + 1}{|\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}| + |\mathfrak{a}_i|}$$

und analog für die $\mathfrak{b}_j$, so daß wir (3) auch schreiben können:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{2\,\mathfrak{a}_i\,\mathfrak{c} + 1}{|\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}| + |\mathfrak{a}_i|} - \sum_{j=1}^{m} \frac{2\,\mathfrak{b}_j\,\mathfrak{c} + 1}{|\mathfrak{b}_j + \mathfrak{c}| + |\mathfrak{b}_j|} \leqq m + n - 2 + o(1) \tag{4}$$

Wir betrachten zunächst den Fall, daß für ein festes $R > 0$ alle $|\mathfrak{a}_i|$ und $|\mathfrak{b}_j| > \frac{R}{2(m+n)}$ sind. Dann können wir $|\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}| = |\mathfrak{a}_i|\,(1 + \varepsilon_i)$ setzen, wo ε_i absolut unterhalb einer nur von R abhängigen und mit $R \to \infty$ gegen Null strebenden Schranke liegt; analoges gilt für die $|\mathfrak{b}_j + \mathfrak{c}|$. Es ist also:

$$(5) \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{2\mathfrak{a}_i\mathfrak{c} + 1}{|\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}| + |\mathfrak{a}_i|} - \sum_{j=1}^{m} \frac{2\mathfrak{b}_j\mathfrak{c} + 1}{|\mathfrak{b}_j + \mathfrak{c}| + |\mathfrak{b}_j|} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathfrak{a}_i\mathfrak{c}}{|\mathfrak{a}_i|} - \sum_{j=1}^{m} \frac{\mathfrak{b}_j\mathfrak{c}}{|\mathfrak{b}_j|} + o(1).$$

$$\leqq \left| \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathfrak{a}_i}{|\mathfrak{a}_i|} - \sum_{j=1}^{m} \frac{\mathfrak{b}_j}{|\mathfrak{b}_j|} \right| + o(1).$$

Wir bestimmen nun das Maximum der Größe $\left|\sum_{i=1}^{m+n} \mathfrak{e}_i\right|$, wo die $\mathfrak{e}_i$ Einheitsvektoren sind und eine Relation

$$\sum_{i=1}^{m+n} \alpha_i \mathfrak{e}_i = 0$$

mit $\alpha_i \geqq 0$ bestehen soll. Sei etwa $\alpha_1 = \operatorname*{Max}_i \alpha_i = 1$; dann ist:

$$\left|\sum_{i=1}^{n+m} \mathfrak{e}_i\right| = \left|\sum_{i=2}^{n+m} (1-\alpha_i)\,\mathfrak{e}_i\right| \leqq \sum_{i=2}^{n+m} (1-\alpha_i);$$

wegen $\mathfrak{e}_1 = -\sum_{i=2}^{n+m} \alpha_i \mathfrak{e}_i$ ist aber $\sum_{i=2}^{n+m} \alpha_i \geqq 1$ und $\left|\sum_{i=1}^{n+m} \mathfrak{e}_i\right| \leqq n + m - 2$. Diese Zahl ist natürlich auch das Maximum.

Es ist also stets:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathfrak{a}_i}{|\mathfrak{a}_i|} - \sum_{j=1}^{m} \frac{\mathfrak{b}_j}{|\mathfrak{b}_j|} \right| \leqq n + m - 2,$$

und da alle $|\mathfrak{a}_i|$, $|\mathfrak{b}_j| > \dfrac{R}{2\,(m+n)}$ sind, so ist

$$(6) \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{2\,\mathfrak{a}_i\mathfrak{c} + 1}{|\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}| + |\mathfrak{a}_i|} - \sum_{j=1}^{m} \frac{2\,\mathfrak{b}_j\mathfrak{c} + 1}{|\mathfrak{b}_j + \mathfrak{c}| + |\mathfrak{b}_j|} \leqq n + m - 2 + o(1).$$

Seien nun einige der $|\mathfrak{a}_i|$ oder $|\mathfrak{b}_j| \leqq \dfrac{R}{2\,(m+n)}$; es muß stets eines der $|\mathfrak{a}_i|$ oder eines der $|\mathfrak{b}_j| > \dfrac{R}{2\,(m+n)}$ sein. Wir beachten weiter, daß für ein λ mit $0 \leqq \lambda \leqq 1$ und einem beliebigen Vektor $\mathfrak{a}$ gilt:

$$\frac{(\mathfrak{a} - \lambda\,\mathfrak{c})\,\mathfrak{c}}{|\mathfrak{a} - \lambda\,\mathfrak{c}|} \leqq \frac{(\mathfrak{a} + \mathfrak{c})\,\mathfrak{c} + \mathfrak{a}\,\mathfrak{c}}{|\mathfrak{a} + \mathfrak{c}| + |\mathfrak{a}|} \leqq \frac{(\mathfrak{a} + \mathfrak{c} + \lambda\,\mathfrak{c})\,\mathfrak{c}}{|\mathfrak{a} + \mathfrak{c} + \lambda\,\mathfrak{c}|}.$$

Für alle $|\mathfrak{a}_i| \leqq \dfrac{R}{2\,(m+n)}$ ersetzen wir $\dfrac{2\,\mathfrak{a}_i\mathfrak{c} + 1}{|\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}| + |\mathfrak{a}_i|}$ auf der linken Seite von (4) durch die größeren Werte $\dfrac{(\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c} + \lambda\,\mathfrak{c})\,\mathfrak{c}}{|\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c} + \lambda\,\mathfrak{c}|}$; es seien deren etwa insgesamt n'. Ist nun ein Glied $|\mathfrak{a}_i|$, etwa $|\mathfrak{a}_n| > \dfrac{R}{2\,(m+n)}$, so ersetzen wir das entsprechende Glied auf der linken Seite von (4) durch $\dfrac{(\mathfrak{a}_n - n'\,\mathfrak{c} - n'\,\lambda\,\mathfrak{c})\,\mathfrak{c}}{|\mathfrak{a}_n - n'\,\mathfrak{c} - n'\,\lambda\,\mathfrak{c}|}$, was für dieses Glied nur eine Änderung $o(1)$ — und zwar gleichmäßig für alle $\mathfrak{a}_i$ — ergibt. Gibt es aber kein Glied $|\mathfrak{a}_i| > \frac{R}{2(m+n)}$, so muß es ein $\mathfrak{b}_j$, etwa $|\mathfrak{b}_m| > \frac{R}{2(m+n)}$ geben; dann ersetzen wir das entsprechende Glied auf der linken Seite von (4) durch $\frac{(\mathfrak{b}_m + n'\mathfrak{c} + n'\lambda\mathfrak{c})\mathfrak{c}}{|\mathfrak{b}_m + n'\mathfrak{c} + n'\lambda\mathfrak{c}|}$, was für dieses Glied wieder nur eine Änderung $o(1)$ bedeutet.

Analog ist mit den $\mathfrak{b}_j$ zu verfahren, für welche $|\mathfrak{b}_j| \leqq \frac{R}{2(m+n)}$ ist: wir ersetzen $\frac{2\mathfrak{b}_j\mathfrak{c}+1}{|\mathfrak{b}_j+\mathfrak{c}|+|\mathfrak{b}_j|}$ auf der linken Seite von (4) durch die kleineren Werte $\frac{(\mathfrak{b}_j - \lambda\mathfrak{c})\mathfrak{c}}{|\mathfrak{b}_j - \lambda\mathfrak{c}|}$; es seien derer etwa m'. Gibt es ein $\mathfrak{b}_j$ mit $|\mathfrak{b}_j| > \frac{R}{2(m+n)}$, so ersetzen wir das entsprechende Glied auf der linken Seite von (4) durch $\frac{(\mathfrak{b}_j + m'\lambda\mathfrak{c})\mathfrak{c}}{|\mathfrak{b}_j + m'\lambda\mathfrak{c}|}$, was für dieses Glied nur eine Änderung $o(1)$ ergibt. Gibt es aber kein $|\mathfrak{b}_j| > \frac{R}{2(m+n)}$, so gibt es ein $|\mathfrak{a}_i| > \frac{R}{2(m+n)}$ und wir ersetzen das entsprechende Glied auf der linken Seite von (4) durch $\frac{(\mathfrak{a}_i - m'\lambda\mathfrak{c})\mathfrak{c}}{|\mathfrak{a}_i - m'\lambda\mathfrak{c}|}$, was wieder nur eine Änderung $o(1)$ gibt.

Für die so abgeänderte und — abgesehen von Größen $o(1)$ — vergrößerte linke Seite von (4) ist dieselbe Überlegung wie oben anzuwenden: es ist dann wieder

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{2\mathfrak{a}_i\mathfrak{c}+1}{|\mathfrak{a}_i+\mathfrak{c}|+|\mathfrak{a}_i|} - \sum_{j=1}^{m} \frac{2\mathfrak{b}_j\mathfrak{c}+1}{|\mathfrak{b}_j+\mathfrak{c}|+|\mathfrak{b}_j|} \leqq m+n-2+o(1).$$

Damit ist (3) vollständig nachgewiesen.

Dem weiteren Beweis von (2) schicken wir folgende Bemerkung voraus: Wir können für diesen Beweis alle Vektoren $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{b}_j$, $\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}$, $\mathfrak{b}_j + \mathfrak{c} \neq 0$ voraussetzen. Ist ein $\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c} = 0$ oder ein $\mathfrak{b}_j = 0$, so reduziert sich (2) auf eine Summe von Dreiecksungleichungen. Die beiden anderen Fälle erledigen sich durch Rekursion:

Ist ein $\mathfrak{a}_i = 0$, so kommt man auf den Fall von $m+n-1$ Vektoren, indem man den betreffenden $\mathfrak{a}$-Vektor streicht.

Ist ein $\mathfrak{b}_j + \mathfrak{c} = 0$, etwa $\mathfrak{b}_m = -\mathfrak{c}$, so lassen wir das Glied mit $\mathfrak{b}_m$ fort, und da dadurch $\sum \mathfrak{b}_j$ um $\mathfrak{c}$ vermehrt wird, fügen wir zu den $\mathfrak{a}$-Vektoren noch $\mathfrak{a}_{n+1} = \mathfrak{c}$ hinzu; die Gesamtzahl der $\mathfrak{a}$- und $\mathfrak{b}$-Vektoren bleibt $m+n$. Es ist dann:

$$\sum_{i=1}^{n+1} (|\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}| - |\mathfrak{a}_i|) - \sum_{j=1}^{m-1} (|\mathfrak{b}_j + \mathfrak{c}| - |\mathfrak{b}_j|)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (|\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}| - |\mathfrak{a}_i|) - \sum_{j=1}^{m} (|\mathfrak{b}_j + \mathfrak{c}| - |\mathfrak{b}_j|).$$

Es bleibt dann noch der Fall, daß alle m $\mathfrak{b}$-Vektoren $= -\mathfrak{c}$ sind. Führt man den angegebenen Vorgang m-mal durch, so erhalten wir die zu beweisende Ungleichung:

$$\sum_{i=1}^{n+m} (|\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}| - |\mathfrak{a}_i|) \leqq n + m - 2,$$

wo $\sum\limits_{i=1}^{n+m} \mathfrak{a}_i = 0$ und $\mathfrak{a}_{n+m} = \mathfrak{c}$ ist.

Es ist dann $\mathfrak{a}_{n+m-1} = -\mathfrak{c} - \mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_2 - \cdots - \mathfrak{a}_{n+m-2}$ und die zu beweisende Ungleichung:

$$\sum_{i=1}^{n+m-2} (|\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}| - |\mathfrak{a}_i|) - (|\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \cdots + \mathfrak{a}_{n+m-2} + \mathfrak{c}| - \\ - |\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \cdots + \mathfrak{a}_{n+m-2}|) \leqq n + m - 3,$$

also die Ungleichung (2) mit einem $\mathfrak{b}$- und $n + m - 2$ $\mathfrak{a}$-Vektoren.

Für $n + m = 2$ ist die Ungleichung (2) ohne weiteres zu verifizieren; sonst wird an keiner Stelle des Beweises Rekursion verwendet. Wir können daher fortan die Ungleichung (2) für die genannten Fälle als bewiesen annehmen.

Aus unserer Ungleichung (3) ergibt sich:

Soll die Funktion

$$f(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}_j) = \sum_{i=1}^{n} (|\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}| - |\mathfrak{a}_i|) - \sum_{j=1}^{m} (|\mathfrak{b}_j + \mathfrak{c}| - |\mathfrak{b}_j|)$$

auch Werte $> m + n - 2$ annehmen, so müßten auch Extremwerte $> m + n - 2$ auftreten; wir gehen also daran, die Extreme von $f(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}_j)$ aufzusuchen. Wir ersetzen dabei $\mathfrak{b}_m = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i - \sum\limits_{j=1}^{m-1} \mathfrak{b}_j$; wir bemerken ferner, daß mit Ausnahme der Stellen, an denen einer der Vektoren $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}$, $\mathfrak{b}_j$, $\mathfrak{b}_j + \mathfrak{c}$ verschwindet, f stets differenzierbar ist; in den ausgeschlossenen Fällen konnten wir (2) als bewiesen annehmen.

Für die Extreme von f gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_i} = \frac{\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}}{|\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}|} - \frac{\mathfrak{a}_i}{|\mathfrak{a}_i|} - \frac{\mathfrak{b}_m + \mathfrak{c}}{|\mathfrak{b}_m + \mathfrak{c}|} + \frac{\mathfrak{b}_m}{|\mathfrak{b}_m|} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$-\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{b}_j} = \frac{\mathfrak{b}_j + \mathfrak{c}}{|\mathfrak{b}_j + \mathfrak{c}|} - \frac{\mathfrak{b}_j}{|\mathfrak{b}_j|} - \frac{\mathfrak{b}_m + \mathfrak{c}}{|\mathfrak{b}_m + \mathfrak{c}|} + \frac{\mathfrak{b}_m}{|\mathfrak{b}_m|} = 0 \qquad (j = 1, \ldots, m - 1)$$

oder es ist für $i = 1 \ldots n$, $j = 1 \ldots m$:

$$\frac{\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}}{|\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}|} - \frac{\mathfrak{a}_i}{|\mathfrak{a}_i|} = \frac{\mathfrak{b}_j + \mathfrak{c}}{|\mathfrak{b}_j + \mathfrak{c}|} - \frac{\mathfrak{b}_j}{|\mathfrak{b}_j|} = \mathfrak{A}. \tag{7}$$

Wir können annehmen, daß für höchstens einen der $\mathfrak{a}$- und $\mathfrak{b}$-Vektoren

$$|\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}| = |\mathfrak{a}_i| \quad \text{bzw.} \quad |\mathfrak{b}_j + \mathfrak{c}| = |\mathfrak{b}_j| \tag{8}$$

gilt: andernfalls folgte (2) schon aus Dreiecksungleichungen. Gibt es einen

$\mathfrak{a}$- oder $\mathfrak{b}$-Vektor, für den (8) gilt, so ist der Vektor $\mathfrak{A} = \mathfrak{c} \cdot \alpha$ ($\alpha \neq 0$) und alle $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{b}_j$, für welche (8) nicht gilt, sind linear von $\mathfrak{c}$ abhängig: unter den Vektoren $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{b}_j$ sind also höchstens zwei linear unabhängig. Gibt es endlich keinen Vektor, für den (8) gilt, so sind alle Vektoren $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{b}_j$ linear aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{c}$ zusammenzusetzen.

Die Vektoren $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{b}_j$ liegen also auf einer ebenen Vektormannigfaltigkeit $\mathfrak{E}$. Bezeichnet man mit $(\mathfrak{v}, \mathfrak{w})$ den orientierten Winkel zweier Vektoren $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ aus $\mathfrak{E}$, so folgt mit einem beliebigen Vektor $\mathfrak{e} \neq 0$ aus $\mathfrak{E}$ aus (7):

$$(9) \qquad \begin{aligned} &\sin\frac{(\mathfrak{a}_i+\mathfrak{c},\mathfrak{e})+(\mathfrak{a}_i,\mathfrak{e})}{2}\sin\frac{(\mathfrak{a}_i+\mathfrak{c},\mathfrak{e})-(\mathfrak{a}_i,\mathfrak{e})}{2} \\ &= \sin\frac{(\mathfrak{b}_j+\mathfrak{c},\mathfrak{e})+(\mathfrak{b}_j,\mathfrak{e})}{2}\sin\frac{(\mathfrak{b}_j+\mathfrak{c},\mathfrak{e})-(\mathfrak{b}_j,\mathfrak{e})}{2}. \end{aligned}$$

Denkt man sich den Vektor $\mathfrak{e}$ um $\frac{\pi}{2}$ gedreht, quadriert und addiert die so entstehenden Gleichungen (9), so wird für alle i und j:

$$(10) \qquad \sin^2\frac{(\mathfrak{a}_i+\mathfrak{c},\mathfrak{e})-(\mathfrak{a}_i,\mathfrak{e})}{2} = \sin^2\frac{(\mathfrak{b}_j+\mathfrak{c},\mathfrak{e})-(\mathfrak{b}_j,\mathfrak{e})}{2} = \varrho.$$

Ist $\varrho = 0$, so ist $(\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}, \mathfrak{e}) - (\mathfrak{a}_i \mathfrak{e}) = (\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}, \mathfrak{a}_i) \equiv 0\ (2\pi)$, also alle $\mathfrak{a}_i$ und ebenso alle $\mathfrak{b}_j$ sind linear von $\mathfrak{c}$ abhängig: dieser Fall wird am Ende des Beweises behandelt.

Ist $\varrho \neq 0$, so folgt aus (9) weiter:

$$(11) \qquad \sin[(\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}, \mathfrak{e}) + (\mathfrak{a}_i, \mathfrak{e})] = \sin[(\mathfrak{b}_j + \mathfrak{c}, \mathfrak{e}) + (\mathfrak{b}_j, \mathfrak{e})]$$

und wegen der Willkür von $\mathfrak{e}$:

$$(12) \qquad (\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}, \mathfrak{e}) + (\mathfrak{a}_i, \mathfrak{e}) \equiv (\mathfrak{b}_j + \mathfrak{c}, \mathfrak{e}) + (\mathfrak{b}_j, \mathfrak{e})\ (2\pi).$$

Aus (10) folgt wieder entweder

$$(13\,\mathrm{a}) \qquad (\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}, \mathfrak{e}) - (\mathfrak{a}_i, \mathfrak{e}) \equiv (\mathfrak{b}_j + \mathfrak{c}, \mathfrak{e}) - (\mathfrak{b}_j, \mathfrak{e})\ (2\pi)$$

oder

$$(13\,\mathrm{b}) \qquad (\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}, \mathfrak{e}) - (\mathfrak{a}_i, \mathfrak{e}) \equiv (\mathfrak{b}_j, \mathfrak{e}) - (\mathfrak{b}_j + \mathfrak{c}, \mathfrak{e})\ (2\pi).$$

Aus (12) und (13a) folgt

$$(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{e}) \equiv (\mathfrak{b}_j, \mathfrak{e})\ (\pi),$$
$$(\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}, \mathfrak{e}) \equiv (\mathfrak{b}_j + \mathfrak{c}, \mathfrak{e})\ (\pi).$$

Es sind also $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{b}_j$ linear abhängig und ebenso $\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}$ und $\mathfrak{b}_j + \mathfrak{c}$. Dann ist entweder $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{b}_j$ oder es sind sowohl $\mathfrak{a}_i$ als $\mathfrak{b}_j$ linear von $\mathfrak{c}$ abhängig. Den ersteren Fall können wir gleich ausscheiden, da dann (2) sofort aus Dreiecksungleichungen folgt.

Aus (12) und (13b) folgt

$$(\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}, \mathfrak{e}) \equiv (\mathfrak{b}_j, \mathfrak{e})\ (\pi),$$
$$(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{e}) \equiv (\mathfrak{b}_j + \mathfrak{c}, \mathfrak{e})\ (\pi).$$

Es sind also $\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}$ und $\mathfrak{b}_j$ linear abhängig und ebenso $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{b}_j + \mathfrak{c}$. Dann sind entweder sowohl $\mathfrak{a}_i$ als $\mathfrak{b}_j$ von $\mathfrak{c}$ linear abhängig, oder wenn weder $\mathfrak{a}_i$ noch $\mathfrak{b}_j$ linear von $\mathfrak{c}$ abhängen, muß $\mathfrak{a}_i + \mathfrak{b}_j + \mathfrak{c} = 0$ gelten. Wir zeigen, daß dieser letztere Fall nicht eintreten kann, sondern daß alle $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{b}_j$ linear von $\mathfrak{c}$ abhängig sein müssen. Wäre etwa $\mathfrak{a}_1$ nicht von $\mathfrak{c}$ linear abhängig, so müßte, und zwar mit jedem $\mathfrak{b}_j$ gelten: $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b}_j + \mathfrak{c} = 0$, d. h. alle $\mathfrak{b}_j$ wären einander gleich und nicht von $\mathfrak{c}$ linear abhängig; dann müßten aber auch wieder alle $\mathfrak{a}_i$ der Gleichung genügen $\mathfrak{a}_i + \mathfrak{b}_j + \mathfrak{c} = 0$ und ebenfalls alle $\mathfrak{a}_i$ einander gleich und nicht von $\mathfrak{c}$ linear abhängig sein. Es wäre aber dann:

$$\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i = \sum_{j=1}^{m} \mathfrak{b}_j = n\,\mathfrak{a}_1 = m\mathfrak{b}_1 .$$

Weiter müßte gelten $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{c} = 0$, also $\mathfrak{a}_1 = -\dfrac{m}{m+n}\,\mathfrak{c}$, also $\mathfrak{a}_1$ entgegen der Voraussetzung von $\mathfrak{c}$ linear abhängig.

Es ist also schließlich nur der Fall zu untersuchen, daß alle $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{b}_j$ linear von $\mathfrak{c}$ abhängig sind.

Sei also $\mathfrak{a}_i = \alpha_i \mathfrak{c}$ und $\mathfrak{b}_j = \beta_j \mathfrak{c}$; dann ist die Ungleichung zu zeigen:

$$\sum_{i=1}^{n} (|\alpha_i + 1| - |\alpha_i|) - \sum_{j=1}^{m} (|\beta_j + 1| - |\beta_j|) \leqq n + m - 2,$$

wo also die α_i und β_j beliebige reelle Zahlen mit $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \sum_{j=1}^{m} \beta_j$ und $m \geqq 1$ sei.

Wir zerlegen die n Zahlen α_i in drei Klassen: mit α_i' bezeichnen wir die Zahlen α_i mit $\alpha_i' > 0$, mit α_i'' die mit $-1 \leqq \alpha_i'' \leqq 0$ und mit α_i''' die mit $\alpha_i''' < -1$; die Anzahlen der α_i in diesen drei Kla sen seien n', n'', n''', also $n' + n'' + n''' = n$. Analog zerlegen wir die m Zahlen β_j; deren Anzahlen seien m', m'', m''' und $m' + m'' + m''' = m$. Je nachdem α_i der ersten, zweiten oder dritten Klasse angehört, ist dann $|\alpha_i + 1| - |\alpha_i| = 1$, $1 - 2|\alpha_i''|$, -1; ebenso für die β_j.

Die zu beweisende Ungleichung hat dann die folgende Gestalt:

$$-\Sigma|\alpha_i''| + \Sigma|\beta_i''| \leqq n''' + m' + m'' - 1.$$

Wegen $\Sigma|\beta_i''| \leqq m''$ ist diese Ungleichung sicher erfüllt, wenn n''' oder $m' > 0$ sind. Wir nehmen also weiterhin $n''' = m' = 0$ an und hätten dann zu zeigen:

$$\Sigma|\beta_i''| \leqq \Sigma|\alpha_i''| + m'' - 1.$$

Nun ist

$$-\Sigma|\beta_i''| + \Sigma\beta_i''' = \Sigma\alpha' - \Sigma|\alpha_i''|,$$

also ist zu zeigen

$$-\Sigma\alpha_i' + \Sigma\beta_i''' \leqq m'' - 1;$$

wäre nun

$$-\Sigma\alpha_i' + \Sigma\beta_i''' > m'' - 1,$$

so müßte, weil links eine Zahl $\leqq 0$ steht, $m'' = 0$ sein und weiter

$$\left|- \Sigma \alpha_i' + \Sigma \beta_i'''\right| < 1$$

und

$$\Sigma \left|\beta_i'''\right| < 1$$

und wegen $|\beta_i'''| > 1$ ist auch $m''' = 0$. Also wäre $m = m' + m'' + m''' = 0$ entgegen unserer Voraussetzung.

Bemerkenswert ist die Voraussetzung $m \geqq 1$, während die Anzahl der $\mathfrak{a}$-Vektoren nicht beschränkt ist.

Für den Spezialfall $m = 1$, $n = 2$ hat Herr Hlawka mir einen rein algebraischen Beweis angegeben:

Es ist, wenn man die Relation

$$|\mathfrak{a}|^2 + |\mathfrak{b}|^2 + |\mathfrak{c}|^2 + |\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c}|^2 = |\mathfrak{a} + \mathfrak{b}|^2 + |\mathfrak{b} + \mathfrak{c}|^2 + |\mathfrak{c} + \mathfrak{a}|^2$$

berücksichtigt:

$$\begin{aligned} &|\mathfrak{a}| + |\mathfrak{b}| + |\mathfrak{c}| - |\mathfrak{a} + \mathfrak{b}| - |\mathfrak{b} + \mathfrak{c}| - |\mathfrak{c} + \mathfrak{a}| + |\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c}| \\ &\quad = (|\mathfrak{a}| + |\mathfrak{b}| - |\mathfrak{a} + \mathfrak{b}|)\left(1 - \frac{|\mathfrak{a}| + |\mathfrak{b}| + |\mathfrak{a} + \mathfrak{b}|}{|\mathfrak{a}| + |\mathfrak{b}| + |\mathfrak{c}| + |\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c}|}\right) \\ &\quad + (|\mathfrak{b}| + |\mathfrak{c}| - |\mathfrak{b} + \mathfrak{c}|)\left(1 - \frac{|\mathfrak{b}| + |\mathfrak{c}| + |\mathfrak{b} + \mathfrak{c}|}{|\mathfrak{a}| + |\mathfrak{b}| + |\mathfrak{c}| + |\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c}|}\right) \\ &\quad + (|\mathfrak{c}| + |\mathfrak{a}| - |\mathfrak{c} + \mathfrak{a}|)\left(1 - \frac{|\mathfrak{c}| + |\mathfrak{a}| + |\mathfrak{c} + \mathfrak{a}|}{|\mathfrak{a}| + |\mathfrak{b}| + |\mathfrak{c}| + |\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c}|}\right) \geqq 0. \end{aligned}$$

Wir geben schließlich noch einige Ungleichungen, die sich als Spezialfälle von (2) ergeben.

Für $m = 2$, $n = 1$ ist mit drei willkürlichen Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$:

$$|\mathfrak{a}| + |\mathfrak{b}| - |\mathfrak{c}| + |\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c}| \leqq |\mathfrak{a} + \mathfrak{b}| + |\mathfrak{b} + \mathfrak{c}| + |\mathfrak{c} + \mathfrak{a}|.$$

Für $m = 3$, $n = 0$ ist:

$$|\mathfrak{a}| + |\mathfrak{b}| + |\mathfrak{a} + \mathfrak{b}| \leqq |\mathfrak{a} + \mathfrak{c}| + |\mathfrak{b} + \mathfrak{c}| + |\mathfrak{a} + \mathfrak{b} - \mathfrak{c}| + |\mathfrak{c}|.$$

Für beliebige Vektoren $\mathfrak{b}_1 \ldots \mathfrak{b}_m$ und $\mathfrak{c}$ gilt ($n = 1$):

$$\sum_{j=1}^{m} |\mathfrak{b}_j| - \left|\sum_{j=1}^{m} \mathfrak{b}_j\right| \leqq \sum_{j=1}^{m} |\mathfrak{b}_j + \mathfrak{c}| - \left|\sum_{j=1}^{m} \mathfrak{b}_j + \mathfrak{c}\right| + (m-1)\,|\mathfrak{c}|.$$

(Eingegangen am 9. Februar 1942.)