Werk

Titel: Mathematische Zeitschrift

Ort: Berlin

Jahr: 1942

Kollektion: Mathematica

Werk Id: PPN266833020_0048

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN266833020_0048|LOG_0027

Über gewisse Halbverbände und kommutative Semigruppen.

Erster Teil.

Von

Fritz Klein-Barmen in Wuppertal.

Einleitung.

Ein *Halbverband* in bezug auf eine Verknüpfung $\bigcirc$ kann nicht zugleich eine kommutative *Semigruppe* in bezug auf $\bigcirc$ sein, wenn man von dem belanglosen Fall absieht, daß nur ein einziges Element vorhanden ist. Die Gleichung

$$a \bigcirc x = a$$

hat nämlich, wenn der Operationsbereich ein Halbverband ist, im allgemeinen mehrere Lösungen, dagegen höchstens eine Lösung, wenn es sich um eine Semigruppe handelt. Noch viel weniger kann natürlich ein *Verband* zu einer Semigruppe ausgebaut werden, wenn dabei verlangt wird, daß die Semigruppenverknüpfung zugleich eine der beiden Verbandsverknüpfungen sein soll.

Andererseits stimmen aber Halbverband und kommutative Semigruppe in ihrer Konstitution weitgehend überein. Beide Bereiche haben in dem weiterhin als *Holoid* bezeichneten Operationsbereich ihr gemeinsames Fundament. Eine wichtige Etappe auf dem Wege zum Holoid bildet das *Assoziativ*. In der vorliegenden Arbeit entwickeln und untersuchen wir die in Assoziativ und Holoid verankerte Begriffswelt. Eine besonders bedeutsame Klasse von Holoiden soll Gegenstand einer weiteren Arbeit sein.

§ 1.

Assoziativ und Holoid.

1. Grundgegebenheit sei eine von der Nullmenge verschiedene, im übrigen endliche oder unendliche Menge M, deren Elemente einer durch $\bigcirc$ symbolisierten *Verknüpfung* fähig sind. Die Verknüpfung werde durch die folgenden *Axiome* näher bestimmt:

A I. Sind a, b zwei beliebige Elemente aus M, so gibt es in M ein Element c derart, daß gilt

$$a \bigcirc b = c.$$

A II. Für drei beliebige Elemente a, b, c aus M gilt

$$(a \bigcirc b) \bigcirc c = a \bigcirc (b \bigcirc c).$$

A III. Für zwei beliebige Elemente a, b aus M gilt

$$a \bigcirc b = b \bigcirc a.$$

Erklärung 1. Eine Menge M mit einer den Axiomen A I und A II genügenden Elementverknüpfung $\bigcirc$ heiße ein *Assoziativ*[1]) in bezug auf $\bigcirc$. Ist überdies A III in Kraft, so sprechen wir von einem *kommutativen* Assoziativ. Ein Assoziativ werde als *endlich* oder *unendlich* bezeichnet, je nachdem es aus endlich oder unendlich vielen Elementen besteht. Unter der *Ordnung* eines endlichen Assoziativs werde die Anzahl der verschiedenen Elemente verstanden, aus denen das Assoziativ besteht.

Da wir es im allgemeinen nur mit einer einzigen Elementverknüpfung zu tun haben, können keine Mißverständnisse entstehen, wenn an Stelle von $a \bigcirc b$ einfach ab geschrieben wird. Wir machen in dieser Arbeit von beiden Schreibweisen Gebrauch.

Weiterhin sei M ein kommutatives Assoziativ.

Aus A I und A II folgt, daß für $n \geqq 1$ das „Produkt"

$$\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu = a_1 \ldots a_n$$

existiert. Dasselbe geht, wenn insbesondere

$$a_\nu = a \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

ist, in die „Potenz" a^n über.

Ohne auf den Beweis einzugehen, merken wir den folgenden Satz an, der besagt, daß in M die gewöhnlichen Potenzregeln in Kraft sind:

Satz 1. *Sind m, n positive ganze Zahlen, so gilt für beliebige Elemente a, b aus M*

$$a^m a^n = a^{m+n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}, \quad a^m b^m = (ab)^m.$$

Erklärung 2. Ein Element e aus M heiße ein *ausgezeichnetes Element erster Art*, wenn für jedes Element a aus M

$$a \bigcirc e = a$$

---

[1]) Die Bezeichnung „Assoziativ" für derartige Bereiche habe ich in [A. V. 4], S. 87 vorgeschlagen. — In das Literaturverzeichnis am Schluß der jetzigen Arbeit habe ich auch einige neuere Untersuchungen aufgenommen, die im Zusammenhang mit der Theorie der Verbände stehen, ohne daß in ihnen das in der vorliegenden Arbeit behandelte Problem unmittelbar berührt wird.

gilt. Ferner heiße ein Element f aus M ein *ausgezeichnetes Element zweiter Art*, wenn für jedes Element a aus M

$$a \bigcirc f = f$$

gilt.

Satz 2. *Es gibt in M höchstens ein ausgezeichnetes Element erster Art und höchstens ein ausgezeichnetes Element zweiter Art.*

Beweis. Sind e und e' ausgezeichnete Elemente erster Art, so gilt

$$e'e = e', \quad ee' = e,$$

woraus nach A III die Identität von e und e' folgt. Entsprechend beweist man den zweiten Teil der Behauptung.

Dagegen reichen die bisherigen Axiome nicht zur Sicherung der *Existenz* der ausgezeichneten Elemente aus. So gibt es sowohl kommutative Assoziative mit einem ausgezeichneten Element erster Art als auch solche ohne ein derartiges Element; ebenso gibt es sowohl kommutative Assoziative mit einem ausgezeichneten Element zweiter Art als auch solche ohne ein derartiges Element. Beispiele zeigen, daß alle vier durch Kombination sich ergebenden Fälle realisiert werden können.

2. Wir engen den Begriff des kommutativen Assoziativs dadurch ein, daß wir auf M zwei weitere *Axiome* einwirken lassen:

A IV. Es gibt in M ein ausgezeichnetes Element erster Art.

A V. Sind a, b und x, y Elemente aus M derart, daß

$$a = b \bigcirc x, \quad b = a \bigcirc y$$

gilt, so ist

$$a = b.$$

Erklärung 3. Ein kommutatives Assoziativ in bezug auf $\bigcirc$, das den Axiomen A IV und A V genügt, heiße ein *Holoid*[2]) in bezug auf $\bigcirc$. Das nach Satz 2 eindeutig bestimmte ausgezeichnete Element erster Art werde stets mit e bezeichnet.

Das Axiom A V hat zur Folge, daß ein Holoid in bezug auf $\bigcirc$ nicht zugleich eine *Gruppe* in bezug auf $\bigcirc$ sein kann, wenigstens keine solche, die aus mehr als einem Element besteht. Wäre M nämlich eine Gruppe in bezug auf $\bigcirc$, so müßte es zu zwei verschiedenen Elementen a, b zwei Elemente x, y geben derart, daß

$$a = bx, \quad b = ay$$

gilt, was im Widerspruch zu A V steht.

---

[2]) Zur Verhütung von Mißverständnissen mache ich darauf aufmerksam, daß der „holoide Bereich" von J. König kein Holoid im Sinne der jetzigen Erklärung 3 ist; vgl. König [1], S. 7.

Dagegen kann ein Holoid in bezug auf $\bigcirc$ sehr wohl auch eine *Semigruppe* in bezug auf $\bigcirc$ sein; wir gehen darauf in § 5 genauer ein.

Hinsichtlich der *endlichen* Holoide macht der folgende Satz eine bemerkenswerte Feststellung, wobei noch zu erwähnen ist, daß bei dem Beweis desselben das Axiom A IV nicht in Aktion tritt.

Satz 3. *Jedes endliche Holoid besitzt ein ausgezeichnetes Element zweiter Art.*

Beweis. Es sei M ein endliches Holoid von der Ordnung m. Die Behauptung ist für $m = 1$ richtig; also werde $m > 1$ angenommen. Sind

$$a_1, \ldots, a_m$$

die verschiedenen Elemente von M, so existiert das durch

$$f = a_1 \ldots a_m \tag{1}$$

bestimmte Element f und infolgedessen auch für jedes a_μ das durch

$$a'_\mu = f a_\mu \tag{2}$$

bestimmte Element a'_μ. Weiter gibt es für jedes a'_μ ein Element b'_μ derart, daß

$$f = a'_\mu b'_\mu \tag{3}$$

gilt; man erhält b'_μ dadurch, daß man auf der rechten Seite von (1) das Element a'_μ isoliert und die übrigen Elemente zu einem einzigen Element zusammenfaßt. Aus (2) und (3) folgt nach A V

$$a'_\mu = f \qquad (\mu = 1, \ldots, m),$$

so daß f wegen (2) das ausgezeichnete Element zweiter Art ist.

Was die *unendlichen* Holoide anbetrifft, so kann man sowohl solche mit einem ausgezeichneten Element zweiter Art als auch solche ohne ein derartiges Element konstruieren.

§ 2.

Die Beziehung $\supseteq$.

Für ein eingehenderes Studium der Holoide reicht die *verknüpfungstheoretische* Betrachtungsweise, so wertvoll sie auch ist, allein nicht aus. Einen tieferen Einblick in die Feinstruktur der Holoide gewinnt man erst, wenn die *beziehungstheoretische*[3]) Betrachtungsweise hinzukommt. Die wichtigste Beziehung ist, unter M weiterhin ein Holoid verstanden, die in der folgenden Erklärung beschriebene Relation $\supseteq$:

[3]) Das Wort „Beziehung" ist hier in engerer Bedeutung gebraucht; es ist darunter eine *zweigliedrige* Beziehung zu verstehen.

Erklärung 4. Sind a, b Elemente aus M, so sei dann und nur dann

$$a \supseteq b,$$

wenn es in M wenigstens ein Element x gibt derart, daß

$$a = b \bigcirc x$$

gilt. Mit $a \supseteq b$ sei $b \subseteq a$ gleichbedeutend. Findet $a \supseteq b$ statt, so heiße a ein *Oberelement* von b und umgekehrt b ein *Unterelement* von a.

Die besondere Bedeutung der Beziehung $\supseteq$ beruht darauf, daß vermöge derselben der Begriff des Holoids rein beziehungstheoretisch aufgebaut werden kann, worauf wir aber in der vorliegenden Arbeit nicht weiter eingehen.

Satz 4. 1. *Mit*

$$a \supseteq b, \quad b \supseteq c$$

gilt

$$a \supseteq c.$$

Beweis. Aus

$$a = bx, \quad b = cy$$

folgt

$$a = cyx.$$

Satz 4. 2. *Für jedes a gilt*

$$a \supseteq a, \quad a \supseteq e$$

und, falls das ausgezeichnete Element zweiter Art[4]) *existiert, auch*

$$f \supseteq a.$$

Beweis: Axiom A IV und Erklärung 2.

Satz 4. 3. *Mit*

$$a \supseteq b, \quad b \supseteq a$$

gilt

$$a = b.$$

Beweis: Axiom A V.

Diese drei Sätze besagen, daß M eine in bezug auf die Beziehung $\supseteq$ *teilweise geordnete* Menge ist. Insbesondere gibt uns der Satz 4. 2 die Berechtigung, e auch als die *untere Spitze* oder das *unterste Element* von M und entsprechend f — vorausgesetzt, daß f existiert — als die *obere Spitze* oder das *oberste Element* von M zu bezeichnen. Hinzuzufügen ist noch, daß bei einer rein beziehungstheoretischen Begründung des Holoidbegriffes — in der vorliegenden Arbeit handelt es sich um eine Axiomatisierung, die im wesentlichen verknüpfungstheoretischer Natur ist — die drei letzten Sätze zu Axiomen erhoben werden.

[4]) Dieses Element werde immer mit f bezeichnet, es sei denn, daß einmal eine andere Bezeichnung zweckmäßiger ist.

Satz 5. *Sind*

(4) $$a_1, \ldots, a_n$$

Elemente aus M derart, daß

$$\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu = e$$

gilt, so ist

$$a_\nu = e \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Beweis. Aus der Voraussetzung folgt $e \supseteq a_\nu$, woraus sich die Behauptung nach den Sätzen 4. 2 und 4. 3 ergibt.

Satz 6. *Zu vorgegebenen Elementen* (4) *gibt es mindestens ein Element x derart, daß gilt*

$$x \supseteq a_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Beweis. Das Produkt der Elemente (4) hat die gewünschte Eigenschaft.

Ohne weiteres leuchtet die Richtigkeit der beiden folgenden Sätze ein:

Satz 7. 1. *Mit*

$$a_\nu \supseteq b_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

gilt

$$\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu \supseteq \prod_{\nu=1}^{n} b_\nu.$$

Satz 7. 2. *Für* $n \geqq k$ *gilt*

$$\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu \supseteq \prod_{\varkappa=1}^{k} a_\varkappa.$$

Mit $a \supseteq b$ ist sowohl $a = b$ als auch $a \neq b$ verträglich. Im zweiten Fall kann man eine weitere *Beziehung* einführen:

Erklärung 5. Daß

$$a \supseteq b, \quad a \neq b$$

stattfindet, werde auch durch

$$a \supset b$$

zum Ausdruck gebracht. Mit $a \supset b$ sei $b \subset a$ gleichbedeutend.

Der Satz 4. 1 kann nun leicht folgendermaßen verschärft werden:

Satz 8. *Mit*

$$a \supset b, \quad b \supseteq c \quad \textit{bzw.} \quad a \supseteq b, \quad b \supset c$$

gilt

$$a \supset c.$$

Erklärung 6. Es seien a, b Elemente aus M derart, daß $a \supset b$ gilt. Gibt es in M kein Element x derart, daß

$$a \supset x, \quad x \supset b$$

gilt, so heiße a ein *oberer Nachbar* von b und umgekehrt b ein *unterer Nachbar* von a.

Satz 9. *Ist M endlich und sind a, b Elemente aus M derart, daß $a \supset b$ gilt, so hat a mindestens einen unteren Nachbarn und b mindestens einen oberen Nachbarn.*

Beweis. Aus Symmetriegründen genügt es, den ersten Teil der Behauptung zu beweisen. Ist b selbst ein unterer Nachbar von a, so ist die Behauptung richtig. Ist b kein unterer Nachbar von a, so gibt es ein Element b_1 derart, daß

$$a \supset b_1, \quad b_1 \supset b$$

gilt. Wir können also $a \supset b$ durch $a \supset b_1$ ersetzen und wie vorher schließen. Das damit eingeleitete Verfahren liefert eine endliche Folge von Elementen

$$b, b_1, b_2, \ldots.$$

Wegen

$$b \subset b_1 \subset b_2 \subset \cdots$$

bricht diese Folge mit einem Element b_r ab, das sich leicht als ein unterer Nachbar von a erweist.

Es ist zu beachten, daß der letzte Satz nur unter gewissen Einschränkungen auf *unendliche* Holoide ausgedehnt werden kann.

§ 3.

Die Beziehung $\perp$.

Auf der im vorhergehenden Paragraphen geschaffenen Basis führen wir eine weitere wichtige Holoidbeziehung ein:

Erklärung 7. Sind a, b Elemente aus M derart, daß das System

$$a \supseteq x, \quad b \supseteq x$$

nur die sicher vorhandene Lösung $x = e$ besitzt, so mögen a und b *fremd* zueinander heißen. Daß a und b fremd zueinander sind, werde durch $a \perp b$ ausgedrückt.

Satz 10. 1. *Mit $a \perp b$ gilt $b \perp a$.*

Satz 10. 2. *Für jedes a gilt $a \perp e$.*

Satz 11. *Sind a, b und a', b' Elemente aus M derart, daß*

$$a \perp b, \quad a \supseteq a', \quad b \supseteq b'$$

gilt, so ist auch

$$a' \perp b'.$$

Beweis. Die Behauptung sei falsch. Dann gibt es ein Element x derart, daß

$$a' \supseteq x, \quad b' \supseteq x, \quad x \neq e$$

gilt, woraus nach Satz 4. 1

$$a \supseteq x, \quad b \supseteq x$$

folgt, was der Voraussetzung widerspricht.

Satz 12. 1. *Mit*

$$a \supseteq b, \quad a \perp b$$

gilt

$$b = e.$$

Beweis. Andernfalls hätte das System

$$a \supseteq x, \quad b \supseteq x$$

die von e verschiedene Lösung $x = b$.

Satz 12. 2. *Mit*

$$a = b, \quad a \perp b$$

gilt

$$a = b = e.$$

Beweis: Satz 12. 1.

Satz 13. 1. *Sind die n Elemente*

$$a_1, \ldots, a_n \qquad (n \geqq 2)$$

zu je zweien fremd und ist

$$c = a_1 \ldots a_n,$$

so gilt mit

$$a_\nu \neq e \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{5}$$

für alle a_ν

$$a_\nu \neq c. \tag{6}$$

Beweis. Wäre die Behauptung falsch und fände etwa $a_1 = c$ statt, so wäre

$$a_1 = a_1 \ldots a_n,$$

also

$$a_1 \supseteq a_\nu,$$

was für $\nu \neq 1$ wegen

$$a_1 \perp a_\nu, \quad a_\nu \neq e$$

nach Satz 12. 1 unmöglich ist.

Wie der folgende Satz zeigt, läßt sich der Satz 13. 1 für $n = 2$ umkehren.

Satz 13. 2. *Sind die beiden Elemente a, b zueinander fremd und ist $c = ab$, so gilt mit*

$$a \neq c, \quad b \neq c$$

auch

$$a \neq e, \quad b \neq e.$$

Beweis. Wäre die Behauptung falsch und fände etwa $a = e$ statt, so wäre

$$c = eb = b.$$

Dagegen läßt sich der Satz 13. 1 — das bestätigt das folgende Beispiel — für $n > 2$ nicht mehr umkehren. Die Elemente

$$a_1, \ldots, a_n \qquad (n > 2)$$

seien zu je zweien fremd; es sei

$$c = a_1 \ldots a_n.$$

Weiter sei

$$a_1 \neq e, \quad a_2 \neq e,$$

aber

$$a_3 = \cdots = a_n = e,$$

so daß (5) nicht durchweg in Kraft ist. Trotzdem hat (6) Gültigkeit, wie sich folgendermaßen ergibt. Wegen

$$c \supseteq a_1 \supset e$$

und Satz 8 gilt

$$c \supset e, \quad \text{also} \quad c \neq e,$$

so daß

$$c \neq a_3, \ldots, c \neq a_n$$

ist. Wegen

$$a_1 \perp a_2, \quad c = a_1 a_2, \quad a_1 \neq e, \quad a_2 \neq e$$

ist ferner nach Satz 13. 1

$$c \neq a_1, \quad c \neq a_2.$$

Erklärung 8. Sind die Elemente

$$(7) \qquad a_1, \ldots, a_n \qquad (n \geqq 2)$$

zu je zweien fremd und sämtlich von e verschieden, so heiße (7) ein $\mathfrak{F}$-*System*[5]. Gilt überdies

$$a_1 \ldots a_n = a,$$

so heiße (7) ein $\mathfrak{F}$-*System für a.*

Zwei $\mathfrak{F}$-Systeme, die sich nur in der Reihenfolge der konstituierenden Elemente unterscheiden, sollen als nicht wesentlich verschieden angesehen werden.

Satz 14. *Ist* (7) *ein* $\mathfrak{F}$-*System und sind*

$$(8) \qquad b_1, \ldots, b_n$$

[5]) Das $\mathfrak{F}$-System ist nicht zu verwechseln mit $\mathfrak{F}$-Folge und $\mathfrak{F}$-Menge in [Verb. 8], S. 231ff. und [Verb. 9], S. 55ff.

Elemente derart, daß

$$a_\nu \supseteq b_\nu \supset e \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

gilt, so ist auch (8) *ein* $\mathfrak{F}$*-System.*

Beweis: Satz 11.

Satz 15. *Es sei* (7) *ein* $\mathfrak{F}$*-System für* a. *Ist dann*

$$b_1, \ldots, b_m \tag{9}$$

ein $\mathfrak{F}$*-System für eines der Elemente* (7), *etwa für* a_ν, *so ist auch das durch Zusammensetzung entstehende System*

$$a_1, \ldots, a_{\nu-1}, \quad b_1, \ldots, b_m, \quad a_{\nu+1}, \ldots, a_n \tag{10}$$

ein $\mathfrak{F}$*-System für* a.

Beweis. Die Elemente (10) sind nach Satz 11 zu je zweien fremd. Sie sind ferner sämtlich von e verschieden. Schließlich gilt

$$a_1 \ldots a_{\nu-1} b_1 \ldots b_m a_{\nu+1} \ldots a_n = a.$$

Der durch (9) bewirkte Übergang von (7) zu (10) möge als eine *Verfeinerung* des ersten $\mathfrak{F}$-Systems bezeichnet werden.

Erklärung 9. Unter einem *optimalen* $\mathfrak{F}$-System für a werde ein $\mathfrak{F}$-System für a verstanden, das nicht weiter verfeinert werden kann.

In dieser Arbeit betrachten wir nur $\mathfrak{F}$-Systeme, die aus endlich vielen Elementen bestehen.

§ 4.

Unabhängigkeit. Einfache Elemente.

Wir bauen die holoide Begriffswelt weiter aus und knüpfen zu diesem Zweck wieder an die Beziehung $\supseteq$ an.

Erklärung 10. Zwei Elemente a, b aus M, für die weder

$$a \supseteq b \quad \text{noch} \quad a \subseteq b$$

gilt, mögen voneinander *unabhängig* oder — nach einem neuerlichen, brieflich gemachten Vorschlag von A. Korselt — *unvergleichbar* heißen. Symbolisch werde die Unabhängigkeit von a und b durch $a \,\mathrm{U}\, b$ und die Abhängigkeit, also Vergleichbarkeit, durch $a \,\overline{\mathrm{U}}\, b$ ausgedrückt.

Satz 16. 1. *Mit* $a \,\mathrm{U}\, b$ *gilt* $b \,\mathrm{U}\, a$; *mit* $a \,\overline{\mathrm{U}}\, b$ *gilt* $b \,\overline{\mathrm{U}}\, a$.

Satz 16. 2. *Für jedes* a *gilt*

$$a \,\overline{\mathrm{U}}\, a, \quad a \,\overline{\mathrm{U}}\, e$$

und, falls das oberste Element f *existiert, auch* $a \,\overline{\mathrm{U}}\, f$.

Satz 17. *Ist*

$$a_1, \ldots, a_n$$

ein $\mathfrak{F}$*-System, so sind die Elemente* a_ν *zu je zweien voneinander unabhängig.*

Beweis. Wären zwei Elemente, etwa a_1 und a_2, voneinander abhängig, so müßte nach Satz 12. 1 entweder

$$a_1 = e \quad \text{oder} \quad a_2 = e$$

sein.

Erklärung 11. Ein Element a aus M, dessen Unterelemente einschließlich a und e zu je zweien voneinander abhängig sind, heiße ein *einfaches* Element von M.

Satz 18. *Jedes Unterelement eines einfachen Elementes ist selbst ein einfaches Element; insbesondere ist* e *ein einfaches Element.*

Erklärung 12. Ein von e verschiedenes Element a aus M, das nur e und a als Unterelemente hat, heiße ein *Primelement* von M.

Satz 19. *Jedes Primelement ist zugleich ein einfaches Element.*

Satz 20. *Jedes Primelement ist ein oberer Nachbar von* e *und umgekehrt.*

Nach Satz 9 enthält also jedes endliche Holoid, das aus mehr als einem Element besteht, Primelemente und damit auch einfache Elemente.

Satz 21. *Für kein einfaches Element gibt es ein* $\mathfrak{F}$*-System.*

Beweis. Wäre a ein einfaches Element mit einem $\mathfrak{F}$-System, so müßten die das $\mathfrak{F}$-System bildenden Elemente als Unterelemente eines einfachen Elementes zu je zweien voneinander abhängig sein, was dem Satz 17 widerspricht.

Erklärung 13. Sind die ein $\mathfrak{F}$-System konstituierenden Elemente

$$a_1, \ldots, a_n \tag{11}$$

sämtlich einfache Elemente, so heiße (11) ein *einfaches* $\mathfrak{F}$-System.

Satz 22. *Ist* (11) *ein einfaches* $\mathfrak{F}$*-System für ein Element* a*, so ist* (11) *auch ein optimales* $\mathfrak{F}$*-System für* a.

Beweis. Wäre die Behauptung falsch, so müßte sich (11) verfeinern lassen. Es müßte also für mindestens ein Element von (11) ein $\mathfrak{F}$-System geben. Das ist aber nach Satz 21 unmöglich.

Hinzuzufügen ist, daß sich der Satz 22 ohne Inanspruchnahme von weiteren passenden Axiomen nicht umkehren läßt.

Die naheliegende Doppelfrage, welche Elemente eines Holoids mindestens ein bzw. genau ein einfaches $\mathfrak{F}$-System aufweisen, ist so zu beantworten: Nach Satz 21 kommt keinem einfachen Element ein derartiges System zu;

dagegen gibt es im allgemeinen unter den übrigen Elementen — Beispiele bestätigen das — sowohl solche mit keinem als auch solche mit einem als auch solche mit mehr als einem einfachen $\mathfrak{F}$-System. Nur neue Axiome können hier Ordnung schaffen. Die Probleme, die damit erwachsen und nach einer Lösung drängen, sollen im dritten Teil der Arbeit behandelt werden. Dabei wird auch die Frage nach der Umkehrung von Satz 22 ihre Erledigung finden.

§ 5.

Halbverband und Semigruppe.

1. Bereits in der Einleitung wurde bemerkt, daß das kommutative Holoid die gemeinsame Grundlage für gewisse Halbverbände und Semigruppen bildet. In diesem Paragraphen soll auf den hier vorliegenden Sachverhalt näher eingegangen werden. Die genannten Bereiche ergeben sich dadurch, daß das bisher betrachtete Axiomensystem um zwei Axiome — es sind dies aber nicht die am Schluß von § 4 gemeinten — bereichert wird. Die beiden zusätzlichen *Axiome* lauten:

H. Für jedes Element a aus M gilt

$$a \bigcirc a = a.$$

S. Sind a, b und a' Elemente aus M derart, daß

$$a \bigcirc b = a' \bigcirc b$$

gilt, so ist

$$a = a'.$$

Wie ebenfalls in der Einleitung gezeigt worden ist, kann keine Holoidverknüpfung diesen beiden Axiomen zugleich genügen. Im folgenden lassen wir zunächst das Axiom H und sodann das Axiom S auf das als Grundgegebenheit fungierende Holoid M einwirken.

2. Die Axiome A I bis A V und H sind im logischen Sinn nicht alle voneinander unabhängig, wie der folgende Satz besagt:

Satz 23. *Das Axiom* A V *ist eine Folge der Axiome* A II, A III *und* H.

Beweis. Gilt

$$a = bx, \quad b = ay,$$

so ist nach H und A II

$$a = b(bx) = ba, \quad b = a(ay) = ab,$$

woraus sich nach A III die Identität von a und b ergibt, so daß das Axiom A V in Kraft ist.

Im System der Axiome A I bis A V und H kann also A V unterdrückt werden. Man erkennt so, daß das System dieser Axiome einen *Halbverband*[6]) in bezug auf die Verknüpfung $\bigcirc$ definiert. Gibt es für jedes Element a aus M nur *endlich* viele Elemente x, y aus M derart, daß

$$x \bigcirc y = a$$

gilt — und das ist beispielsweise der Fall, wenn M ein endliches Holoid ist —, so bewirkt das Axiom H nicht nur, daß M zu einem Halbverband, sondern darüber hinaus zu einem *Verband*[7]) wird, und zwar zu einem Verband in bezug auf die folgendermaßen erklärten Verknüpfungen $\cup$ und $\cap$: Die Verbandsverknüpfung $\cup$ ist mit der Holoidverknüpfung $\bigcirc$ identisch, so daß also dann und nur dann $a = a \cup b$ ist, wenn $a \supseteq b$ stattfindet; die andere Verbandsverknüpfung ist dadurch bestimmt, daß dann und nur dann $a = a \cap b$ ist, wenn $a \subseteq b$ stattfindet.

3. Wir gehen zur Besprechung des Axioms S über. Durch S wird das Holoid M zu einer *kommutativen Semigruppe* in bezug auf $\bigcirc$ ausgebaut. Anders wie soeben ist A V keine logische Folge von S und den übrigen Axiomen. Gilt

$$a = bx, \quad b = ay,$$

so folgt zwar nach A II und A III

$$ab = abxy$$

und daraus nach A IV und S

$$xy = e;$$

es läßt sich aber nicht

$$x = y = e$$

erzwingen. Ist nämlich die Semigruppe M insbesondere eine *Gruppe* in bezug auf $\bigcirc$, so sind wohl die Axiome A I bis A IV und S realisiert; dagegen ist, wenn der Operationsbereich aus mehr als einem Element besteht, das Axiom A V nicht in Kraft.

4. Wenn es auch unmöglich ist, daß ein Holoid sowohl ein Halbverband als auch eine Semigruppe in bezug auf ein und dieselbe Verknüpfung ist, so ist es doch andererseits keineswegs ausgeschlossen, daß ein und dieselbe Menge M in bezug auf eine erste Verknüpfung $\bigcirc$ ein dem Axiom H genügendes Holoid, also ein Halbverband ist und zugleich in bezug auf eine zweite Verknüpfung $\odot$ ein dem Axiom S genügendes Holoid, also eine kommutative Semigruppe darstellt. Dabei können die Verknüpfungen $\bigcirc$ und $\odot$, die nach dem Vorhergehenden stets voneinander verschieden sind, noch *gekoppelt* sein, d. h. sich gegenseitig mehr oder weniger stark beeinflussen. Von den ver-

[6]) Vgl. [H. 1], S. 33.
[7]) Vgl. [H. 1], S. 43.

schiedenen Koppelungsmöglichkeiten mag eine besonders wichtige hier Erwähnung finden. Bedeuten $\supseteq$ und $\mathrel{\dot{\supseteq}}$ die den Verknüpfungen $\bigcirc$ und $\odot$ entsprechenden und in Erklärung 4 beschriebenen Fundamentalbeziehungen, so wird durch das folgende *Axiom* K eine sehr starke Koppelung ausgesprochen:

K. Sind a, b Elemente aus M derart, daß $a \supseteq b$ gilt, so gilt auch $a \mathrel{\dot{\supseteq}} b$ und umgekehrt.

Nebenbei folgt aus K, daß ein und dasselbe Element von M sowohl untere Spitze in bezug auf $\bigcirc$ als auch in bezug auf $\odot$ ist.

Dafür ein Modell. Ist M die Menge der *natürlichen Zahlen*, d. h. die aus den Zahlen 1, 2, ... bestehende Menge, so darf, wie man sich leicht überzeugt, $a \bigcirc b$ als das *kleinste gemeinschaftliche Vielfache* und $a \odot b$ als das *gewöhnliche Produkt* von a und b aufgefaßt werden. Bei dieser Interpretation haben die beiden Abhängigkeiten

$$a \supseteq b, \quad a \mathrel{\dot{\supseteq}} b$$

denselben Sinn; jede besagt, daß a ein ganzzahliges Vielfaches von b ist, so daß 1 die untere Spitze von M sowohl in bezug auf $\bigcirc$ als auch in bezug auf $\odot$ ist. Demnach ist für dieses Modell das Axiom K in Kraft.

Literaturverzeichnis.

C. Carathéodory.

[4] Über die Differentiation von Maßfunktionen. Math. Zeitschr. **46** (1940), S. 181—189.

[5] Bemerkungen zum Riesz-Fischerschen Satz und zur Ergodentheorie. Abh. aus dem Math. Seminar der Hansischen Universität **14** (1941), S. 351—389.

F. Klein-Barmen.

[Verb. 8] Über die ausgezeichneten Darstellungen der Elemente verzahnter harmonischer Verbände. Deutsche Math. **2** (1937), S. 216—241.

[Verb. 9] Ein weiterer Beitrag zum Problem der Zerlegung der Elemente gewisser harmonischer Verbände. Ebenda **3** (1938), S. 46—64.

[H. 1] Axiomatische Untersuchungen zur Theorie der Halbverbände und Verbände. Ebenda **4** (1939), S. 32—43.

[A. V. 4] Über Verbände mit einer weiteren assoziativen und kommutativen Elementverknüpfung. Math. Zeitschr. **47** (1940), S. 85—104.

[A. V. 5] Molekulare Verbände. Ebenda **47** (1941), S. 373—394.

J. König.

[1] Einleitung in die allgemeine Theorie der algebraischen Größen. Leipzig 1903.

F. Riesz.

[1] Sur quelques notions fondamentales dans la théorie générale des opérations linéaires. Ann. of Math. **41** (1940), S. 174—206.

[2] Sur la théorie ergodique des espaces abstraits. Acta scient. math. (Ungarn) **10** (1941), S. 1—20.

(Eingegangen am 10. Januar 1942.)