Werk

Titel: Mathematische Zeitschrift

Ort: Berlin

Jahr: 1942

Kollektion: Mathematica

Werk Id: PPN266833020_0048

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN266833020_0048|LOG_0028

Über das asymptotische Verhalten der Lösungen gewisser linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen.

Von

Otto Haupt in Erlangen.

---

1. In einer kürzlich erschienenen Note[1]) beweist Herr D. Caligo folgendes: In der Differentialgleichung

$$(D) \qquad y'' + f(x)\,y = 0$$

sei $f(x)$ stetig in $[a, +\infty)$ und $f(x) = O(x^{-2-\beta})$ für passendes $\beta > 0$, wenn $x \to +\infty$. Dann existiert und ist endlich $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{-1} y(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} y'(x)$ für jede Lösung $y(x)$ von (D).

2. Das eben erwähnte Theorem von Herrn Caligo ist Spezialfall eines Satzes, welcher im folgenden (Nr. 3 und 4) für lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung formuliert und bewiesen werden soll. Dieser Satz ist auch für $n = 2$ allgemeiner als das Theorem von Herrn Caligo: Einerseits nämlich umfaßt unser Satz nicht nur homogene, sondern auch inhomogene lineare Differentialgleichungen, andererseits wird, z. B. für den Fall der Differentialgleichung (D) (vgl. Nr. 1), in unserem Satz die in Nr. 1 erwähnte Bedingung $f(x) = O(x^{-2-\beta})$ abgeschwächt zur Forderung, daß $x f(x)$ absolut integrierbar sei. Schließlich erscheint unser Beweisverfahren einfacher als das von Herrn Caligo.

Am Schlusse vorliegender Note (vgl. Nr. 5) wird auf weitere Verallgemeinerungsmöglichkeiten hingewiesen.

3. Der in Aussicht genommene Satz lautet so:

Satz. *Vor.*: *Es seien* $h(x)$ *und* $g_\nu(x)$, $\nu = 0, 1, \ldots, n-1$, *stetig in* $\mathfrak{D} = [a, +\infty)$, $a > 0$. *Ferner sei* $x^{n-1-\nu} g_\nu(x)$, $\nu = 0, 1, \ldots, n-1$, *absolut integrierbar*[2]) *und es sei* $h(x)$ *integrierbar in* $\mathfrak{D}$.

---

[1]) D. Caligo, Comportamento asintotico degli integrali dell'equazione $y''(x) + A(x)\,y(x) = 0$, nella ipotesi $\lim\limits_{x \to +\infty} A(x) = 0$. Boll. Unione Mat. Italiana, ser. II, Anno III, Nr. 4 (1941), S. 286—295 = Publicazioni dell'Istituto per le Applicazioni del Calcolo, Consiglio Nazionale delle Ricerche, Roma 1941, Nr. 100.

[2]) *Alle* im folgenden auftretenden *Limiten* beziehen sich auf $x \to +\infty$ und sind als *eigentlich* (endlich) anzunehmen. Es heißt $F(x)$ integrierbar bzw. absolut integrierbar, wenn der Limes von

$$\int_a^x f(\xi)\,d\xi \quad \text{bzw. von} \quad \int_a^x |F(\xi)|\,d\xi$$

existiert. Die Integrale können dabei als Riemannsche angenommen werden.

Beh.: Für jede Lösung $y(x)$ von

$$(L_n) \qquad L_n(y) = y^{(n)} + g_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + g_1(x)\,y' + g_0(x)y = h(x)$$

gilt:

$$(A) \qquad \lim_{x\to+\infty} (n-1-\nu)!\, x^{\nu+1-n} y^{(\nu)}(x), \quad \nu = 0, 1, \ldots, n-1,$$

existiert, wobei alle diese Limiten einander gleich sind.

4. Der Beweis ergibt sich so:

4. 1. Wir setzen

$$(Y_{n-1}) \qquad L^*_{n-1}(y) = y^{(n-1)}(x) = \varphi(x).$$

Dabei soll also $\varphi(x)$ stetig sein in $\mathfrak{D}$. Zufolge (Y_{n-1}) gilt dann

$$(Y) \qquad y(x) = \frac{1}{(n-2)!}\int_b^x (x-u)^{n-2}\varphi(u)\,du + \sum_{\varrho=0}^{n-2}\frac{1}{\varrho!}c_\varrho(x-b)^\varrho,$$

wo die $b, c_\varrho, \varrho = 0, 1, \ldots, n-2$, (beliebig wählbare) Konstanten sind ($a \leqq b$). Daher gilt allgemeiner

$$(Y_\nu) \quad y^{(\nu)}(x) = \frac{1}{(n-2-\nu)!}\int_b^x (x-u)^{n-2-\nu}\varphi(u)\,du + \sum_{\varrho=\nu}^{n-2}\frac{1}{(\varrho-\nu)!}c_\varrho(x-b)^{\varrho-\nu},$$
$$\nu = 0, \ldots, n-2.$$

4. 2. Zum Beweise von (A) *genügt* es, die *Existenz von* $\lim y^{(n-1)}$ sicherzustellen. Denn alsdann gilt, wie bekannt, (A) für alle ν.

In der Tat besitzt dann $(n-1-\nu)\left(\int_b^x (x-u)^{n-2-\nu}\varphi(u)\,du\right)x^{\nu+1-n}$, für $\nu = 0, 1, \ldots, n-2$, den Limes $\varphi_0 = \lim y^{(n-1)}(x)$, woraus wegen (Y_ν) die Behauptung (A) folgt.

4. 3. Aus (Y_ν) (Nr. 4. 1) ergibt sich weiter:

Jeder Lösung von $L_n(y) = h(x)$, welche der Bedingung

$$(L_{n-1}) \qquad \lim y^{(n-1)}(x) \textit{ existiert}$$

genügt, entspricht vermöge (Y_{n-1}) und (Y) (Nr. 4. 1) *eindeutig eine stetige Lösung $\varphi(x)$ der Integralgleichung*

$$(V) \qquad \varphi(x) = J(\varphi; x) + H(x; c_0, \ldots, c_{n-1}),$$

$$J(\varphi; x) =$$
$$= -\int_b^x g_{n-1}(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi - \int_b^x\left\{\int_b^\xi\left[\sum_{\nu=0}^{n-2}\frac{1}{(n-2-\nu)!}g_\nu(\xi)(\xi-u)^{n-2-\nu}\right]\varphi(u)\,du\right\}d\xi,$$

$$H(x; c_0, \ldots, c_{n-1}) = c_{n-1} + \int_b^x h(\xi)\,d\xi + \sum_{\varrho=0}^{n-2} c_\varrho h_\varrho(x),$$

wobei die $h_\varrho(x)$ *lineare Verbindungen von Gliedern der Form*

$$(H) \qquad \int\limits_b^x g_\nu(\xi)\,\xi^t\,d\xi \text{ mit } 0 \leqq t \leqq n-\nu-2, \quad \nu = 0, 1, \ldots, n-2,$$

also insbesondere unabhängig von $\varphi(x)$ *sind. Es ist* b *mit* $a \leqq b$ *beliebig wählbar.*

Für $\varphi(x)$ *ist dabei überdies die Bedingung erfüllt*

$$(\Omega) \qquad \lim \varphi(x) \textit{ existiert.}$$

Umgekehrt wird durch jede stetige, (Ω) *erfüllende Lösung* $\varphi(x)$ *von* (V) *vermittelst* (Y) *eine,* (L_{n-1}) *erfüllende Lösung* $y(x)$ *von* $L_n(y) = h(x)$ *geliefert.*

4. 4. Die $c_0, \ldots, c_{n-2}, c_{n-1}$ sind gleich den „Anfangswerten" $y(b), \ldots, y^{(n-2)}(b)$, $y^{(n-1)}(b)$ von $y(x)$ in $x = b$. Es ist aber eine Lösung y von $L_n(y) = h(x)$ eindeutig in $[a, +\infty)$ durch ihre Anfangswerte in $x = b$ festgelegt. Daher genügt zum Beweise des Satzes in Nr. 3 der Nachweis, daß bei beliebig vorgegebenen $c_0, \ldots, c_{n-1}$ (mindestens) eine Lösung $\varphi(x)$ von (V) existiert und daß diese Lösung der Bedingung (Ω) genügt, wenn nur b mit $b \geqq a$ passend gewählt wird. Dieser Nachweis gelingt in bekannter Weise durch Konstruktion mittels schrittweiser Näherung[3]); und zwar gelingt die Konstruktion vermöge der (bis jetzt noch nicht benutzten) Voraussetzung, daß $x^{n-1-\nu} g_\nu(x)$ bzw. $h(x)$ absolut integrierbar bzw. integrierbar sein soll ($\nu = 0, \ldots, n-1$).

5. Der in Nr. 3 ausgesprochene Satz gibt eine hinreichende Bedingung dafür, daß die Differentialgleichung $L_n(y) = h(x)$ unter den

„Randbedingungen": I) $y^{(\nu)}(b) = B_\nu$, $\nu = 0, \ldots, n-1$, und
II) $\lim y^{(n-1)}(x)$ existiert,

bei beliebig vorgegebenem B_ν und hinreichend großem b[4]) Lösungen besitzt.

Der wesentliche Beweisgedanke bestand (Nr. 4. 1) darin, zunächst die aus der Randbedingung II) entspringende Differentialgleichung $L^*_{n-1}(y) = y^{(n-1)}(x) = \varphi(x)$ für beliebiges, stetiges, bei $x \to +\infty$ konvergierendes $\varphi(x)$ zu lösen und damit eine *Integraldarstellung für* y *vermittelst* $\varphi(x)$ zu erhalten [vgl. (Y) in Nr. 4. 1]. Indem man mittels dieser Integraldarstellung $\varphi(x)$ an Stelle von $y(x)$ in die Differentialgleichung $L_n(y) = h(x)$ einführt, erhält man eine *in* $\varphi(x)$ *lineare Integro-Differentialgleichung*, welche vermittelst einer Quadratur in eine lineare Integralgleichung (V) zweiter Art für $\varphi(x)$ übergeht und welche, zusammen mit der Forderung, daß $\lim \varphi(x)$

---

[3]) Vgl. Haupt, Über Lösungen linearer Differentialgleichungen mit Asymptoten. Math. Zeitschr. **48** (1942), S. 212—220.

[4]) Aus dem Eindeutigkeitssatz für $L_n(y) = h(x)$ bzw. für (V) folgt, daß statt $x = b$ auch $x = a$ genommen werden kann. Die Annahme, daß b hinreichend groß sein solle, ist nur zur Vereinfachung des Existenzbeweises in Nr. 4. 4 gemacht.

existiert, gleichwertig ist mit $L_n(y) = h(x)$ zusammen mit den Randbedingungen I) II).

5.1. Die soeben erwähnte *Zurückführung der „Randwertaufgabe" für $L_n(y) = h(x)$ auf eine lineare Integralgleichung* mit der Nebenbedingung, daß für eine Lösung $\varphi(x)$ dieser Integralgleichung $\lim \varphi(x)$ existiert, ist genau so auch in dem *allgemeinen Falle* möglich, in welchem die *Randbedingung* II) *darin besteht, daß irgend ein vorgeschriebener linearer Differentialausdruck $(n-1)$-ter Ordnung*

$$L_{n-1}^*(y) = y^{(n-1)} + k_{n-2}(x)y^{(n-2)} + \cdots + k_0(x)y$$

für $x \to +\infty$ einen Limes besitzt, wenn für y die betrachtete Lösung $y(x)$ von $L_n(y) = h(x)$ eingesetzt wird.

Um dies einzusehen, braucht man nur $L_{n-1}^*(y) = \varphi(x)$ zu setzen.

In dieses allgemeinere Problem ordnet sich die in einer vorangehenden Note[3]) (für $n = 2$) behandelte Aufgabe ein, Lösungen von $L_n(y) = h(x)$ zu bestimmen, welche asymptotische Parabeln $(n-1)$-ten Grades besitzen; diese Aufgabe entspricht nämlich[5]) dem Falle, daß

$$L_{n-1}^*(y) = x^n \frac{d^{n-1}}{d\,x^{n-1}}\,[x^{-1}\,y\,(x)].$$

5.2. Tritt an Stelle von $L_{n-1}^*(y)$ ein linearer Differentialausdruck $L_{n-\tau}^*(y)$ der Ordnung $(n-\tau)$ mit $2 \leqq \tau \leqq n-1$, so führt das in Nr. 5 geschilderte Verfahren wiederum zu einer linearen Integro-Differentialgleichung für $\varphi(x)$.

5.3. Eine hier anschließende Frage ist die nach weniger fordernden hinreichenden Bedingungen dafür, daß beispielsweise die in vorliegender Note betrachtete Randwertaufgabe (vgl. Nr. 5) zu vorgegebenen B_ν eine Lösung besitzt; und damit die Frage nach Abschwächung der über die $g_\nu(x)$ und über $h(x)$ gemachten Stetigkeits- bzw. Integrabilitätsvoraussetzungen[6]). Wir behalten uns vor, später darauf zurückzukommen, ebenso wie auf die in Nr. 5. 1. und 5. 2. angeschnittenen Verallgemeinerungen.

---

[5]) Vgl. HAUPT, Über Asymptoten ebener Kurven. Journ. f. d. r. u. angew. Math. **152** (1922), S. 8, (D_0).

[6]) Vgl. dazu a. a. O.[3]), Nr. 2. 3. 1. In Betracht käme ferner u. a. der Übergang zu LEBESGUE-Integralen. In diesem Zusammenhang sei noch hingewiesen auf eine [a. a. O.[1]) nicht erwähnte] Arbeit von D. CALIGO, Un criterio di sufficiente stabilità per le soluzioni dei sistemi di equazioni integrali e sue applicazioni, Atti d. reale Accad. Italia, Rend. Cl. sci. fis., mat. e nat., 7. s., vol. I (1940), 497 ff.

(Eingegangen am 10. 2. 1942.)