Ein Kriterium für die algebraischen Zahlen.

Von

C. Pisot in Greifswald.

Seit LAGRANGE ist bekannt, daß die reellen algebraischen Zahlen zweiten Grades durch die Periodizität ihrer Kettenbruchentwicklung gekennzeichnet sind. Es ist vielfach versucht worden, diese schöne Eigenschaft auf algebraische Zahlen höheren Grades zu übertragen, und es gibt manche Ergebnisse in dieser Richtung. Stellt man die formale Einfachheit der Rechnung in den Vordergrund, wie das z. B. in der JACOBIschen Verallgemeinerung der Kettenbrüche[1]) geschieht, so ist es bisher noch nicht gelungen, die Frage nach der Periodizität dieser Entwicklung zu entscheiden. Wenn man aber die Schärfe der Annäherung als erstes Erfordernis ansieht, wie dies unter anderem für H. MINKOWSKIS Kriterium[2]) gilt, so muß man die Periodizität und besonders die Einfachheit der Rechnungen aufgeben.

Die Periodizität bedingt eine gewisse Regelmäßigkeit in der Verteilung der Näherungsbrüche; darin werden wir die Grundlage unseres Kriteriums erblicken. Vorliegende Arbeit hat ihren Ausgangspunkt in früheren Untersuchungen des Verfassers[3]); eine vorbereitende Note erschien in den Comptes Rendus der Akademie von Paris[4]). Es wurde aber nach Möglichkeit versucht, eine geschlossene Darstellung zu bringen und dem Leser die Kenntnisnahme früherer Originalarbeiten zu ersparen.

Wir bezeichnen durchweg mit *kleinen lateinischen Buchstaben* ganze rationale Zahlen und mit $C_1, C_2, \ldots$ geeignete, von n unabhängige positive feste Zahlen.

Zuerst wollen wir unser Kriterium an den Zahlen zweiten Grades erläutern. Es sei ξ eine reelle algebraische Zahl zweiten Grades. Aus der Periodizität der Kettenbruchentwicklung von ξ folgt das Vorhandensein von unendlich vielen verschiedenen rationalen Näherungsbrüchen $\frac{u_n}{v_n}$, die folgende Eigenschaften haben:

---

1) JACOBI, Journ. f. reine u. angew. Math. **69** (1868), S. 29–64; Werke **6**, S. 385–426.

2) MINKOWSKI, Gött. Nachr. 1899, S. 64–88; Ges. Abh. **1**, S. 293–315.

3) PISOT, Annali Sc. Norm. Pisa, Ser. 2, **7** (1938), S. 205–248.

4) PISOT, C. R. Akad. Paris **206** (1938), S. 1862–1864.

A. Regelmäßigkeit der Verteilung. *Es gibt eine Zahl $\varrho > 1$ und ein festes Zahlenpaar C_1, C_2, so daß zugleich*

$$|u_{n+1} - \varrho u_n| < \frac{C_1}{|u_n|} \quad \text{und} \quad |v_{n+1} - \varrho v_n| < \frac{C_2}{|v_n|}$$

besteht.

B. Schärfe der Annäherung. *Es gilt die Ungleichung:*

$$|u_n - \xi v_n| < \frac{1}{|v_n|}.$$

Beweis. Wir bezeichnen mit $\frac{p_k}{q_k}$ den k-ten Näherungsbruch bei der Entwicklung von ξ in einen regelmäßigen Kettenbruch. Nach LAGRANGE wird der Kettenbruch für ξ periodisch; d. h. es sei ξ_k der k-te vollständige Quotient, der durch

$$\xi = \frac{p_{k+1}\xi_k + p_k}{q_{k+1}\xi_k + q_k} \tag{1}$$

erklärt ist, dann gibt es eine natürliche Zahl h, so daß

$$\xi_{k+h} = \xi_k \qquad \text{für } k > k_0. \tag{2}$$

Nach (1) erhält man

$$\xi_k = -\frac{p_k - \xi q_k}{p_{k+1} - \xi q_{k+1}} \quad \text{und} \quad \xi_{k+h} = -\frac{p_{k+h} - \xi q_{k+h}}{p_{k+h+1} - \xi q_{k+h+1}}.$$

Aus (2) folgt daraus das Vorhandensein einer Zahl ϱ, für die

$$\varrho\,(p_{k+h} - \xi\, q_{k+h}) = (-1)^h (p_k - \xi q_k) \tag{3}$$

und zugleich

$$\varrho\,(p_{k+h+1} - \xi q_{k+h+1}) = (-1)^h (p_{k+1} - \xi q_{k+1}) \tag{4}$$

gilt. Durch vollständige Induktion nach k sieht man, daß (3) für alle $k > k_0$ gilt; ϱ ist deshalb von k unabhängig. Eliminieren wir ξ aus den zwei Gleichungen (3) und (4), so erhält man

$$\begin{vmatrix} \varrho\, p_{k+h} - (-1)^h p_k & \varrho\, q_{k+h} - (-1)^h q_k \\ \varrho\, p_{k+h+1} - (-1)^h p_{k+1} & \varrho\, q_{k+h+1} - (-1)^h q_{k+1} \end{vmatrix} = 0.$$

Unter Berücksichtigung der Beziehungen

$$p_{k+h}\, q_{k+h+1} - p_{k+h+1}\, q_{k+h} = (-1)^h (p_k\, q_{k+1} - p_{k+1}\, q_k) = \pm 1$$

ergibt sich eine Gleichung

$$\varrho^2 + a\,\varrho + (-1)^h = 0, \tag{5}$$

wobei a eine gewisse, von k unabhängige, ganze rationale Zahl bedeutet. Die Norm von ϱ hat den Betrag Eins, ϱ ist also eine Einheit, die nach (3) dem Körper von ξ angehört. Außerdem ist

$$\begin{aligned}\varrho &= (-1)^h \frac{p_k - \xi q_k}{p_{k+h} - \xi q_{k+h}} \\ &= \left(-\frac{p_k - \xi q_k}{p_{k+1} - \xi q_{k+1}}\right)\left(-\frac{p_{k+1} - \xi q_{k+1}}{p_{k+2} - \xi q_{k+2}}\right)\cdots\left(-\frac{p_{k+h-1} - \xi q_{k+h-1}}{p_{k+h} - \xi q_{k+h}}\right) \\ &= \xi_k \xi_{k+1} \ldots \xi_{k+h-1}.\end{aligned}$$

Da aber alle $\xi_k > 1$ sind, ist auch $\varrho > 1$.

Die Gleichung (3) für k und für $k+h$ gibt

$$\varrho = (-1)^h \frac{p_{k+h} - \xi q_{k+h}}{p_{k+2h} - \xi q_{k+2h}} \quad \text{und} \quad \varrho^2 = \frac{p_k - \xi q_k}{p_{k+2h} - \xi q_{k+2h}}.$$

Durch Eintragen in die Gleichung (5) folgt daraus

$$(p_{k+2h} - \xi q_{k+2h}) + a\,(p_{k+h} - \xi q_{k+h}) + (-1)^h (p_k - \xi q_k) = 0.$$

Da ξ irrational ist, spaltet sich diese Gleichung in das System

$$\begin{aligned} p_{k+2h} + a p_{k+h} + (-1)^h p_k &= 0, \\ q_{k+2h} + a q_{k+h} + (-1)^h q_k &= 0, \end{aligned}$$

das für alle $k > k_0$ gilt. Bezeichnen wir für beliebiges festes $k > k_0$ mit u_n die Zahl p_{k+nh} und mit v_n die Zahl q_{k+nh}, so gelten also folgende lineare Rekursionen:

$$\begin{aligned} u_{n+2} + a u_{n+1} + (-1)^h u_n &= 0, \\ v_{n+2} + a v_{n+1} + (-1)^h v_n &= 0. \end{aligned}$$

Es sei ϱ' die zu ϱ konjugierte Wurzel der Gleichung (5). Die Lösungen dieser Rekursionen kann man bekannterweise auf die Form

$$\begin{aligned} u_n &= \lambda \varrho^n + \lambda' \varrho'^n, \\ v_n &= \mu \varrho^n + \mu' \varrho'^n \end{aligned}$$

bringen, wo λ, λ', μ, μ' geeignete Konstanten bedeuten. Aus diesen Formeln erhält man:

$$u_{n+1} - \varrho u_n = \lambda'(\varrho' - \varrho)\varrho'^n \quad \text{und} \quad v_{n+1} - \varrho v_n = \mu'(\varrho' - \varrho)\varrho'^n.$$

Da aber $|\varrho'| = \frac{1}{\varrho}$, so strebt ϱ'^n mit wachsendem n nach Null, und

$$\varrho^n = \frac{u_n}{\lambda} - \frac{\lambda'}{\lambda}\varrho'^n > C_3 |u_n|.$$

Folglich ist

$$|u_{n+1} - \varrho u_n| = \frac{|\lambda'(\varrho' - \varrho)|}{\varrho^n} < \frac{C_1}{|u_n|}.$$

Ebenso sieht man ein, daß

$$|v_{n+1} - \varrho v_n| < \frac{C_2}{|v_n|}.$$

Die Näherungsbrüche $\frac{u_n}{v_n}$ besitzen also die Eigenschaft A. Die Eigenschaft B folgt sofort aus der Tatsache, daß $\frac{u_n}{v_n}$ Kettenbruchnäherungen sind.

Diese Eigenschaften lassen sich nun auf beliebige reelle algebraische Zahlen übertragen und wir werden nachweisen, daß wir darin ein Kriterium für diese algebraischen Zahlen erblicken können. Es gilt nämlich folgender Satz I, sowie seine Umkehrung Satz II:

Satz I. *Jeder reellen algebraischen Zahl ξ vom Grade s kann man eine unendliche Folge von Näherungsbrüchen $\frac{u_n}{v_n}$ mit folgenden Eigenschaften zuordnen:*

A. Regelmäßigkeit der Verteilung. *Es gibt eine Zahl $\alpha > 1$ und positive feste Zahlen C_4, C_5, ε, so daß zugleich*

$$|u_{n+1} - \alpha u_n| < \frac{C_4}{|u_n|^\varepsilon} \quad \text{und} \quad |v_{n+1} - \alpha v_n| < \frac{C_5}{|v_n|^\varepsilon}$$

besteht.

B. Schärfe der Annäherung. *Es gibt eine feste Zahl C_6, so daß mit demselben ε*

$$|u_n - \xi v_n| < \frac{C_6}{|v_n|^\varepsilon}$$

gilt.

Zusatz. *Jedes ε der vorbemerkten Art kann den Wert $\frac{1}{s-1}$ nicht überschreiten. Man kann aber die Existenz eines beliebig nahe an $\frac{1}{s-1}$ gelegenen ε durch geeignete Wahl von α erzwingen.*

Satz II. *Jede reelle Zahl ξ, die eine unendliche Folge von Näherungsbrüchen $\frac{u_n}{v_n}$ mit der Eigenschaft* A *besitzt, ist algebraisch; ihr Grad s kann den Wert $1 + \frac{1}{\varepsilon}$ nicht überschreiten, und die Näherungsbrüche $\frac{u_n}{v_n}$ besitzen die Eigenschaft* B.

Aus dem Satz II fließt also auch die Tatsache, daß die Eigenschaften A und B nicht unabhängig sind, sondern daß B eine Folge von A ist.

Um die Schärfe der Annäherung zu beurteilen, können wir bemerken, daß wir auf diese Weise $s-1$ linear unabhängige Zahlen $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots, \xi^{(s-1)}$ des Körpers von ξ durch Näherungsbrüche $\frac{u_n^{(1)}}{v_n}, \frac{u_n^{(2)}}{v_n}, \cdots, \frac{u_n^{(s-1)}}{v_n}$ mit gleichem Nenner annähern können. Dabei nennen wir die Zahlen $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots, \xi^{(s-1)}$ linear unabhängig, wenn wir kein System nicht sämtlich verschwindender ganzer rationalen Zahlen $c_1, c_2, \ldots, c_s$ so finden können, daß

$$c_1 \xi^{(1)} + c_2 \xi^{(2)} + \cdots + c_{s-1} \xi^{(s-1)} + c_s = 0$$

wird. Für die Schärfe der Annäherung gilt dann

$$(6) \qquad |u_n^{(r)} - \xi^{(r)} v_n| < \frac{C_7}{|v_n|^{\varepsilon}} \quad \text{für } r = 1, 2, \ldots, s-1.$$

Es ist aber bekannt, daß $\frac{1}{s-1}$ der größte Exponent ε ist, der für alle Systeme von $s-1$ linear unabhängigen Zahlen gleichzeitige Näherungen mit (6) gestattet. Wenn $\varepsilon = \frac{1}{s-1}$, haben wir also den Typus der bestmöglichen gleichzeitigen Annäherung durch rationale Brüche mit gleichem Nenner. Dieser Fall kann aber nur für Körper zweiten Grades oder Körper dritten Grades mit zwei imaginären konjugierten Körpern erhalten werden.

Um den Satz I zu beweisen, zeigen wir, daß eine Zahl die Rolle von α spielen kann, wenn sie größer als Eins und eine ganze algebraische Zahl des Körpers von ξ ist, deren sämtliche Konjugierten dem Betrage nach kleiner als Eins sind. Daß es solche Zahlen gibt, lehrt uns folgender Hilfssatz:

Hilfssatz 1. *In jedem reellen algebraischen Zahlkörper gibt es ganze algebraische Zahlen α, die den Ungleichungen*

$$(7) \qquad \alpha > 1 \quad \textit{und} \quad |\alpha_r| < 1 \qquad \textit{für } r = 2, \ldots, s$$

genügen. Hierbei ist s der Grad des Körpers und $\alpha_2, \ldots, \alpha_s$ sind die von α verschiedenen Konjugierten von α.

Beweis. Es sei $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s$ eine Basis für die ganzen Zahlen des Körpers; die konjugierten Zahlen $\omega_{1,r}, \omega_{2,r}, \ldots, \omega_{s,r}$ für $r = 2, \ldots, s$ bilden eine Basis für die konjugierten Körper. Jede ganze Zahl α und ihre Konjugierten sind dann von der Form:

$$(8) \qquad \begin{aligned} \alpha &= x_1\omega_1 + x_2\omega_2 + \cdots + x_s\omega_s \\ \alpha_r &= x_1\omega_{1,r} + x_2\omega_{2,r} + \cdots + x_s\omega_{s,r} \quad \text{für } r = 2, \ldots, s \end{aligned}$$

mit ganzen rationalen $x_1, x_2, \ldots, x_s$. Die Determinante Δ der $\omega_{h,r}$ ist die Quadratwurzel aus der Diskriminante des Körpers, also von Null verschieden. Nach dem Minkowskischen Satze über Linearformen, kann man ganze rationale $x_1, x_2, \ldots, x_s$, die nicht alle verschwinden, so finden, daß

$$|\alpha| \leqq \beta \quad \text{und} \quad |\alpha_r| \leqq \gamma \qquad \text{für } r = 2, \ldots, s,$$

wenn nur die Zahlen β, γ der Ungleichung

$$\beta\gamma^{s-1} \geqq |\Delta|$$

genügen. Wählen wir nun $\gamma < 1$, so folgt aus $|\mathrm{Norm}\,\alpha| \geqq 1$, daß

$$1 \leqq |\mathrm{Norm}\,\alpha| = |\alpha\alpha_2\ldots\alpha_s| \leqq |\alpha|\gamma^{s-1} < |\alpha|.$$

Die Zahl α oder $-\alpha$ erfüllt daher die Ungleichungen (7). Wir haben somit das Vorhandensein solcher Zahlen α bewiesen. Wählen wir noch β so, daß

$\beta \gamma^{s-1} = |\varDelta|$, so erkennen wir sogar die Existenz von Zahlen α, die der Zusatzbedingung

$$\alpha \gamma^{s-1} \leqq |\varDelta| \tag{9}$$

genügen.

Die Gleichung s-ten Grades für α ist irreduzibel. Würde sie nämlich in Faktoren zerlegbar sein, so hätte einer dieser Faktoren nur Wurzeln, deren Betrag kleiner als Eins wäre; die Norm einer solchen Wurzel hätte also einen Betrag kleiner als Eins und wäre somit Null, denn diese Norm ist eine ganze rationale Zahl. Eine der Zahlen α_r wäre daher Null; das ist aber unmöglich, denn die Ausdrücke (8) können die Null nur darstellen, wenn $x_1 = x_2 = \cdots = x_s = 0$.

B e w e i s von S a t z I. Es sei nun ξ eine reelle algebraische Zahl s-ten Grades; ξ läßt sich auf unendlich viele Weisen als Quotient $\frac{\lambda}{\mu}$ zweier ganzen Zahlen λ, μ des Körpers von ξ darstellen. Wir bezeichnen mit dem Index $r = 2, \ldots, s$ die Konjugierten der vorkommenden Zahlen des Körpers von ξ. Es sei α eine ganze Zahl des Körpers, die den Ungleichungen (7) des Hilfssatzes 1 genügt. Die Ausdrücke

$$\begin{aligned} u_n &= \lambda \alpha^n + \lambda_2 \alpha_2^n + \cdots + \lambda_s \alpha_s^n, \\ v_n &= \mu \alpha^n + \mu_2 \alpha_2^n + \cdots + \mu_s \alpha_s^n \end{aligned}$$

sind ganze rationale Zahlen. Man hat

$$\begin{aligned} u_{n+1} - \alpha u_n &= \lambda_2(\alpha_2 - \alpha)\alpha_2^n + \cdots + \lambda_s(\alpha_s - \alpha)\alpha_s^n, \\ v_{n+1} - \alpha v_n &= \mu_2(\alpha_2 - \alpha)\alpha_2^n + \cdots + \mu_s(\alpha_s - \alpha)\alpha_s^n. \end{aligned}$$

Da aber $|\alpha_2| < 1, \ldots, |\alpha_s| < 1$, so streben $\alpha_2^n, \ldots, \alpha_s^n$ mit wachsendem n nach Null. Denken wir uns die $|\alpha_r|$ der Größe nach geordnet, etwa

$$|\alpha_2| \geqq |\alpha_3| \geqq \cdots \geqq |\alpha_s|,$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - \alpha u_n| &< C_8 |\alpha_2|^n, \\ |v_{n+1} - \alpha v_n| &< C_9 |\alpha_2|^n. \end{aligned} \tag{10}$$

Aus

$$\alpha^n = \frac{u_n}{\lambda} - \left(\frac{\lambda_2}{\lambda}\alpha_2^n + \cdots + \frac{\lambda_s}{\lambda}\alpha_s^n\right) = \frac{v_n}{\mu} - \left(\frac{\mu_2}{\mu}\alpha_2^n + \cdots + \frac{\mu_s}{\mu}\alpha_s^n\right)$$

schließen wir das Vorhandensein von Konstanten C_{10}, C_{11}, so daß

$$\alpha^n > C_{10}|u_n| \quad \text{und} \quad \alpha^n > C_{11}|v_n|.$$

Es sei nun ε der Exponent für den

$$|\alpha_2| = \frac{1}{\alpha^{\varepsilon}},$$

dann ist $\varepsilon > 0$, und man erhält aus (10)

$$|u_{n+1} - \alpha u_n| < \frac{C_8}{\alpha^{\varepsilon n}} < \frac{C_4}{|u_n|^\varepsilon} \quad \text{und} \quad |v_{n+1} - \alpha v_n| < \frac{C_9}{\alpha^{\varepsilon n}} < \frac{C_5}{|v_n|^\varepsilon}.$$

Die Näherungsbrüche $\frac{u_n}{v_n}$ besitzen somit die Eigenschaft A.

Um auch die Eigenschaft B abzuleiten, bilden wir

$$u_n - \xi v_n = u_n - \frac{\lambda}{\mu} v_n = \left(\lambda_2 - \frac{\lambda}{\mu}\mu_2\right)\alpha_2^n + \cdots + \left(\lambda_s - \frac{\lambda}{\mu}\mu_s\right)\alpha_s^n.$$

Wie oben schließen wir daraus, daß

$$|u_n - \xi v_n| < \frac{C_6}{|v_n|^\varepsilon}.$$

Gleichzeitige Näherungen. In einem Körper vom Grade s gibt es höchstens $s-1$ linear unabhängige Zahlen; es seien $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots, \xi^{(s-1)}$ solche $s-1$ linear unabhängige Zahlen des Körpers. Man kann sie als Quotienten $\xi^{(r)} = \frac{\lambda^{(r)}}{\mu}$ für $r = 1, 2, \ldots, s-1$ ganzer algebraischen Zahlen mit gleichem Nenner μ darstellen. Die Zahlen:

$$\begin{aligned} u_n^{(r)} &= \lambda^{(r)}\alpha^n + \lambda_2^{(r)}\alpha_2^n + \cdots + \lambda_s^{(r)}\alpha_s^{(n)} \quad \text{für } r = 1, 2, \ldots, s-1, \\ v_n &= \mu\,\alpha^n + \mu_2\alpha_2^n + \cdots + \mu_s\alpha_s^n \end{aligned}$$

sind ganz rational und wie oben erhält man

$$|u_n^{(r)} - \xi^{(r)} v_n| < \frac{C_{12}}{|v_n|^\varepsilon} \quad \text{für } r = 1, 2, \ldots, s-1.$$

Schärfe der Annäherung. Um nun den Exponenten ε abzuschätzen, beachten wir, daß

$$\alpha\,|\alpha_2|^{\frac{1}{\varepsilon}} = 1 \leqq |\mathrm{Norm}\,\alpha| = \alpha\,|\alpha_2 \ldots \alpha_s| \leqq \alpha|\alpha_2|^{s-1}. \tag{11}$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{\varepsilon} \geqq s - 1 \quad \text{oder} \quad \varepsilon \leqq \frac{1}{s-1}.$$

Das Gleichheitszeichen kann hier nur stehen, wenn es in (11) überall steht, also wenn

$$1 = |\mathrm{Norm}\,\alpha| = \alpha|\alpha_2|^{s-1}.$$

Es muß daher α eine Einheit sein, deren Konjugierte alle den gleichen Betrag haben. Minkowski[5]) hat aber nachgewiesen, daß es solche Einheiten nur gibt in den Körpern zweiten Grades und in den Körpern dritten Grades mit imaginären Konjugierten; ihre Existenz ist in diesen Körpern trivial. Diese Fälle sind also die einzigen, wo wir $\varepsilon = \frac{1}{s-1}$, also die besten gleichzeitigen Näherungen haben können. In den Körpern zweiten Grades erhalten wir so

---

[5]) Minkowski, Acta math. **26** (1902), S. 333–351; Ges. Abh. **1**, S. 357–371.

im wesentlichen die Kettenbruchnäherungen. Wenn ξ keinem solchen Körper zweiten oder dritten Grades angehört, ist $\varepsilon < \frac{1}{s-1}$; wir wollen aber zeigen, daß ε bei geeignet gewähltem α beliebig nahe an $\frac{1}{s-1}$ gewählt werden kann.

Im Hilfssatz 1 haben wir das Vorhandensein von Zahlen α nachgewiesen, die der Ungleichung (9) genügen. Für solche Zahlen ist somit

$$\alpha|\alpha_2|^{s-1} \leqq \alpha\gamma^{s-1} \leqq |\Delta|.$$

Aber $|\alpha_2| = \alpha^{-\varepsilon}$, folglich ist

$$\alpha^{1-\varepsilon(s-1)} \leqq |\Delta|,$$

also

$$\varepsilon \geqq \left(1 - \frac{\log|\Delta|}{\log\alpha}\right)\frac{1}{s-1}.$$

Da α beliebig groß gewählt werden kann, ist es möglich, für die Größe $1 - \frac{\log|\Delta|}{\log\alpha}$ einen von Eins beliebig wenig verschiedenen Wert zu erhalten. In Verbindung mit der Ungleichung $\varepsilon < \frac{1}{s-1}$ ergibt sich dadurch unsere Behauptung.

Berechnung der Zahlen α. Die Zahlen α, deren Bedeutung in dieser Frage hier hervortritt, können auch leicht numerisch berechnet werden. Betrachten wir nämlich für eine beliebige ganze algebraische Zahl ν des Körpers von α die ganze rationale Zahl

$$w_n = \nu\alpha^n + \nu_2\alpha_2^n + \cdots + \nu_s\alpha_s^n.$$

Dann strebt $\frac{w_{n+1}}{w_n}$ für wachsendes n nach α, und zwar ist

$$\left|\frac{w_{n+1}}{w_n} - \alpha\right| < \frac{C_{13}}{|w_n|^{1+\varepsilon}} < \frac{C_{14}}{|w_{n+1}|^{1+\varepsilon}}.$$

Man hat also

$$\left|w_{n+2} - \frac{w_{n+1}}{w_n}w_{n+1}\right| < |w_{n+2} - \alpha w_{n+1}| + \frac{C_{14}}{|w_{n+1}|^{\varepsilon}} < \frac{C_{13}+C_{14}}{|w_{n+1}|^{\varepsilon}}.$$

Dieser Ausdruck strebt nach Null und es gibt somit einen Index m, so daß für $n > m$ immer

$$(12) \qquad \left|w_{n+2} - \frac{w_{n+1}^2}{w_n}\right| < \frac{1}{2}$$

wird; das heißt für $n > m$ ist w_{n+2} die an $\frac{w_{n+1}^2}{w_n}$ am nächsten liegende ganze Zahl. Man kann also die Folge der Zahlen w_n, von w_m, w_{m+1} ausgehend, durch einfache Rechnungen bestimmen. Als Grenzwert von $\frac{w_{n+1}}{w_n}$ kann dann die Zahl α mit beliebiger Genauigkeit berechnet werden; es ist

$$\left|\frac{w_{n+1}}{w_n} - \alpha\right| < \frac{C_{13}}{|w_n|^{1+\varepsilon}}.$$

Wir streifen hier folgende Frage: Von zwei beliebigen ganzen rationalen Zahlen w_0, w_1 mit $|w_0| \leqq |w_1|$ ausgehend, bestimmen wir eine Folge von ganzen rationalen Zahlen w_n durch die Ungleichung (12) für $n \geqq 0$. Man sieht leicht ein, daß $\frac{w_{n+1}}{w_n}$ für wachsendes n einen Grenzwert hat. Ich möchte nun folgende Vermutung aussprechen, deren Beweis neue Einblicke in die Eigenschaften der algebraischen Zahlen eröffnen würde:

Der Grenzwert von $\frac{w_{n+1}}{w_n}$ für jedes Paar w_0, w_1 mit $|w_0| \leqq |w_1|$ ist eine ganze algebraische Zahl α, deren Konjugierte Beträge haben, die den Wert Eins nicht überschreiten[6]).

Beweis von Satz II. Wir setzen voraus, daß die Näherungsbrüche $\frac{u_n}{v_n}$ die Eigenschaft A besitzen. Aus der Ungleichung

$$|u_{n+1} - \alpha u_n| < \frac{C_4}{|u_n|^\varepsilon} \tag{13}$$

werden wir ableiten, daß die Potenzreihe

$$f(\zeta) = u_0 + u_1 \zeta + \cdots + u_n \zeta^n + \cdots \tag{14}$$

eine rationale Funktion der komplexen Veränderlichen ζ darstellt. Daraus wird sich ergeben, daß α eine ganze algebraische Zahl ist, die den Ungleichungen (7) des Hilfssatzes 1 genügt.

Zuerst zeigen wir: *Aus der Ungleichung* (13) *folgt das Vorhandensein einer Zahl* $\delta > 1$ *und einer Konstanten* C_{15}, *so daß*

$$|u_{n+1} - \alpha u_n| < \frac{C_{15}}{\delta n} \tag{15}$$

für alle n *gilt.*

Da es unendlich viele verschiedene Näherungsbrüche $\frac{u_n}{v_n}$ gibt, ist $|u_n|$ nicht beschränkt; es gibt daher einen Index m, so daß

$$|u_m| > \frac{C_4}{\alpha - 1}. \tag{16}$$

Dann ist

$$|u_{m+1}| > \alpha |u_m| - \frac{C_4}{|u_m|^\varepsilon} \geqq \alpha |u_m| - C_4 = |u_m| \left(\alpha - \frac{C_4}{|u_m|}\right) > |u_m|.$$

Die Zahl u_{m+1} erfüllt also auch die Ungleichung (16) und durch vollständige Induktion nach n schließen wir, daß dann für alle $n \geqq m$

$$|u_n| > \frac{C_4}{\alpha - 1}$$

gilt, und die $|u_n|$ mit n wachsen. Man hat daher

$$|u_{n+1}| > |u_n| \left(\alpha - \frac{C_4}{|u_n|}\right) > |u_n| \left(\alpha - \frac{C_4}{|u_m|}\right).$$

---

[6]) Siehe zu dieser Vermutung auch [3]).

Setzen wir noch

$$\alpha - \frac{C_4}{|u_m|} = \beta,$$

so ist nach (16)

$$\beta > 1$$

und es wird für $n \geqq m$

$$|u_{n+1}| > \beta\,|u_n| > \cdots > \beta^{n+1-m}\,|u_m|.$$

Es gibt somit eine Konstante C_{16}, so daß für alle n

$$|u_n| > C_{16}\,\beta^n$$

gilt. Tragen wir diese Abschätzung in die Ungleichung (13), so erhalten wir die gesuchte Ungleichung (15), wenn wir $\delta = \beta_\varepsilon > 1$ setzen.

Untersuchung der Potenzreihe (14). Wir setzen

$$\varphi_{n+1} = u_{n+1} - \alpha\, u_n.$$

Durch Multiplikation der Potenzreihe (14) mit $1 - \alpha\zeta$ erhält man

$$(1 - \alpha\,\zeta)\,f(\zeta) = u_0 + \varphi_1\zeta + \cdots + \varphi_n\,\zeta^n + \cdots$$

Die Ungleichung (15) zeigt, daß diese Reihe für $|\zeta| < \delta$ konvergiert, also ist $f(\zeta)$ im Kreise $|\zeta| < \delta$ fortsetzbar und regulär bis auf einen einfachen Pol im Punkte $\zeta = \frac{1}{\alpha}$. Borel [7]) hat aber bewiesen: *Eine analytische Funktion, die eine Potenzreihenentwicklung mit rational-ganzzahligen Koeffizienten um den Nullpunkt besitzt und meromorph ist in einem Kreise $|\zeta| < \delta$ mit $\delta > 1$, ist eine rationale Funktion, deren Zähler und Nenner ganze rationale Koeffizienten haben.* Fatou [8]) hat noch gezeigt, daß das konstante Glied des Nenners Eins ist, daß also alle Nullstellen des Nenners reziproke Werte von ganzen algebraischen Zahlen sind. Nach diesen Sätzen ist daher $f(\zeta)$ eine rationale Funktion. Im Kreise $|\zeta| < \delta$ hat $f(\zeta)$ nur einen einfachen Pol im Punkte $\zeta = \frac{1}{\alpha}$. Die Zahl α ist also ganz algebraisch. Bezeichnen $\alpha_2, \ldots, \alpha_s$ die Konjugierten von α, so sind $\frac{1}{\alpha_2}, \ldots, \frac{1}{\alpha_s}$ auch einfache Nullstellen des Nenners von $f(\zeta)$, sie müssen also im Gebiet $|\zeta| \geqq \delta$ liegen; folglich gelten die Ungleichungen $|\alpha_r| \leqq \frac{1}{\delta} < 1$ für $r = 2, \ldots, s$, und die ganze algebraische Zahl α genügt den Ungleichungen (7).

Bestimmung von u_n. Um u_n zu berechnen, zerlegen wir die rationale Funktion $f(\zeta) = \frac{P(\zeta)}{Q(\zeta)}$ in Partialbrüche. $Q(\zeta)$ kann keine anderen Nullstellen

---

[7]) Borel, Bull. Sci. math. **18** (1894), S. 22—25.

[8]) Fatou, Acta math. **30** (1906), S. 369—371. Ein Beweis wird auch S. **317** dieser Abhandlung gegeben.

als $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha_2}, \ldots, \frac{1}{\alpha_s}$ haben, denn sonst wäre $Q(\zeta)$ in Faktoren zerlegbar, von denen einer nur Wurzeln hätte mit Beträgen, die mindestens so groß wie δ wären. Ihre reziproken Werte wären ganze algebraische Zahlen und der Betrag ihrer Norm kleiner als Eins, also Null. Diese Zahlen wären somit Null, und würden also in $Q(\zeta)$ nicht auftreten. Man hat daher, mit gewissen Konstanten, $\lambda, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$:

$$f(\zeta) = \frac{P(\zeta)}{Q(\zeta)} = \frac{\lambda}{1-\alpha\zeta} + \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2\zeta} + \cdots + \frac{\lambda_s}{1-\alpha_s\zeta},$$

und zwar ist

$$\lambda = -\frac{P\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\frac{1}{\alpha}Q'\left(\frac{1}{\alpha}\right)}, \qquad \lambda_r = -\frac{P\left(\frac{1}{\alpha_r}\right)}{\frac{1}{\alpha_r}Q'\left(\frac{1}{\alpha_r}\right)} \quad \text{für } r = 2, \ldots, s.$$

λ gehört folglich zum Körper von α, und $\lambda_2, \ldots, \lambda_s$ sind die Konjugierten von λ. Wird jetzt jeder Partialbruch einzeln in eine Potenzreihe entwickelt, so erhalten wir durch Identifizieren mit der Potenzreihe (14) für $f(\zeta)$

$$u_n = \lambda\alpha^n + \lambda_2\alpha_2^n + \cdots + \lambda_s\alpha_s^n.$$

Schätzung des Grades s von α. Aus dem Ausdruck für u_n leiten wir wie im Beweis von Satz I ab, daß es eine Konstante C_{17} gibt, so daß

$$|u_n| > C_{17}\,\alpha^n.$$

Tragen wir dies in die Ungleichung (13), so folgt daraus, daß

$$|\varphi_{n+1}| = |u_{n+1} - \alpha u_n| < \frac{C_{18}}{\alpha^{\varepsilon n}}.$$

Der Konvergenzradius der Potenzreihe

$$(1-\alpha\zeta)f(\zeta) = u_0 + \varphi_1\zeta + \cdots + \varphi_n\zeta^n + \cdots$$

ist daher mindestens α^ε; andererseits wissen wir aber, daß er genau den Wert $\frac{1}{|\alpha_2|}$ hat, wenn wieder $|\alpha_2| \geqq |\alpha_r|$ für $r = 3, \ldots, s$ ist. Es ist also

$$\alpha^\varepsilon \leqq \frac{1}{|\alpha_2|}.$$

Bezeichnen wir mit ε' den Exponenten für den $|\alpha_2| = \frac{1}{\alpha^{\varepsilon'}}$, so ist $\varepsilon \leqq \varepsilon'$. Da wir aber schon bewiesen haben, daß $\varepsilon' \leqq \frac{1}{s-1}$, so wird

$$s \leqq 1 + \frac{1}{\varepsilon'} \leqq 1 + \frac{1}{\varepsilon}.$$

Schluß des Beweises von Satz II. Aus der Ungleichung

$$|v_{n+1} - \alpha v_n| < \frac{C_5}{|v_n|^\varepsilon}$$

folgt in gleicher Weise, daß es eine Zahl μ des Körpers von α gibt, so daß

$$v_n = \mu\,\alpha^n + \mu_2\,\alpha_2^n + \cdots + \mu_s\,\alpha_s^n.$$

Da $\alpha > 1$ und $|\alpha_r| < 1$ für $r = 2, \ldots, s$, strebt $\frac{u_n}{v_n}$ mit wachsendem n nach $\frac{\lambda}{\mu}$. Somit erhalten wir $\xi = \frac{\lambda}{\mu}$, also ist ξ algebraisch.

Man hat noch

$$u_n - \xi\,v_n = u_n - \frac{\lambda}{\mu}\,v_n = \left(\lambda_2 - \frac{\lambda}{\mu}\,\mu_2\right)\alpha_2^n + \cdots + \left(\lambda_s - \frac{\lambda}{\mu}\,\mu_s\right)\alpha_s^n,$$

folglich ist

$$|u_n - \xi\,v_n| < \frac{C_{19}}{|v_n|^{\varepsilon'}} \leqq \frac{C_6}{|v_n|^{\varepsilon}},$$

denn $\varepsilon \leqq \varepsilon'$. Die Näherungsbrüche $\frac{u_n}{v_n}$ besitzen also auch die Eigenschaft B; man sieht dadurch, daß diese Eigenschaft sich aus der Eigenschaft A ergibt, somit nicht von ihr unabhängig ist.

Bemerkung. In diesem Beweis hätten wir den Satz von Borel durch einen Satz von A. Thue[9]) ersetzen können, der sich zwar aus dem Borelschen Satze ableiten läßt, aber von Thue anders bewiesen wurde. Dieser Satz lautet: *Es seien λ, α zwei reelle Zahlen, u_n die an $\lambda\alpha^n$ am nächsten liegende ganze rationale Zahl. Gibt es zwei Zahlen $\delta > 1$ und C_{20}, so daß für alle n*

$$|\lambda\,\alpha^n - u_n| < \frac{C_{20}}{\delta^n}$$

ist, so ist α algebraisch. Diese Bemerkung wird uns die Erweiterung von Satz II in zwei verschiedenen Richtungen ermöglichen.

Besitzt eine Folge von ganzen rationalen Zahlen $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$ die Eigenschaft A, dann gibt es einen Index m, so daß

$$|u_{n+1} - \alpha\,u_n| < \tfrac{1}{2} \qquad \text{für } n \geqq m$$

wird. Es ist also u_{n+1} die an αu_n am nächsten liegende ganze Zahl, und die Folge der u_n ist somit für $n \geqq m$ leicht berechenbar. Im allgemeinen ist es aber umständlich, diesen Index m zu bestimmen. Im folgenden Satz III werden wir nun unter den Zahlen α eine Klasse auszeichnen, für welche $m = 0$ ist. Mit Hilfe dieser Zahlen, die wir mit ϱ bezeichnen, wird also die Ermittlung der Näherungsbrüche $\frac{u_n}{v_n}$ einer algebraischen Zahl ξ mit den Eigenschaften A und B nur einfache Rechnungen erfordern; es ist somit unsere Forderung in der Einleitung weitgehend erfüllt. Wir werden das Verfahren auch geometrisch deuten.

---

[9]) Thue, Norske Vid. Selsk. Skr. (1912—2) Nr. 20 (15 S.).

Satz III. *In jedem reellen algebraischen Zahlkörper gibt es Zahlen ϱ mit folgender Eigenschaft:*

Bildet man, von zwei ganzen rationalen Zahlen $u_0 \neq 0$ und $v_0 \neq 0$ ausgehend, zwei Folgen von Zahlen u_n und v_n nach folgender Vorschrift:

Vorschrift C. *Für alle $n \geqq 0$ ist u_{n+1} die an ϱu_n, und v_{n+1} die an ϱv_n am nächsten liegende ganze rationale Zahl, also*

$$|u_{n+1} - \varrho u_n| < \tfrac{1}{2} \quad \textit{und} \quad |v_{n+1} - \varrho v_n| < \tfrac{1}{2} \qquad \textit{für } n \geqq 0. \tag{17}$$

Dann bilden $\frac{u_n}{v_n}$ eine Folge von Näherungsbrüchen einer algebraischen Zahl ξ des Körpers von ϱ mit den Eigenschaften A *und* B *(wobei ϱ die Zahl α vertritt). Jede Zahl des Körpers kann auf diese Weise mit Hilfe der gleichen Zahl ϱ erhalten werden.*

Die Folgen u_n und v_n sind durch die Vorschrift C eindeutig bestimmt, denn wie wir gleich zeigen werden, ist ϱ eine erzeugende Zahl des Körpers, also irrational, und somit niemals

$$|u_{n+1} - \varrho u_n| = \tfrac{1}{2} \quad \text{oder} \quad |v_{n+1} - \varrho v_n| = \tfrac{1}{2}.$$

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich aus folgendem Hilfssatz:

Hilfssatz 2: *Es sei ϱ eine ganze algebraische Zahl, ϱ_r für $r = 2, \ldots, s$ ihre Konjugierten, und sie genüge der Ungleichung:*

$$\prod_{r=2}^{s} (1 + |\varrho_r|) \leqq 2. \tag{18}$$

a) *In jedem reellen algebraischen Zahlkörper gibt es solche Zahlen ϱ.*

b) *Es sei $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$ eine Folge von ganzen rationalen Zahlen, die nach der Vorschrift C aus u_0 gebildet ist. Dann ist jeder Zahl $u_0 \neq 0$ eine Zahl $\lambda \neq 0$ des Körpers von ϱ so zugeordnet, daß*

$$u_n = \lambda \varrho^n + \lambda_2 \varrho_2^n + \cdots + \lambda_s \varrho_s^n$$

gilt.

Beweis von a). Wir bemerken zuerst, daß aus der Ungleichung (18) folgt, daß jede Zahl ϱ eine Zahl α ist, folglich ist sie eine erzeugende Zahl des Körpers. In den Körpern vom zweiten Grade ist sogar umgekehrt auch jede Zahl α eine Zahl ϱ, denn aus $|\alpha_2| < 1$ folgt $1 + |\alpha_2| < 2$. In den anderen Körpern kann man das Vorhandensein solcher Zahlen ϱ mit der gleichen Methode wie im Hilfssatz 1 nachweisen. Man kann aber auch für ϱ eine ganzzahlige Potenz α^m einer Zahl α wählen. Die Konjugierten von α^m sind die Zahlen α_r^m für $r = 2, \ldots, s$; sie streben also mit wachsendem m nach Null, und man kann die Ungleichung (18) erfüllen, wenn man m genügend groß wählt.

Beweis von b). Es sei

$$\varrho^s + a_1 \varrho^{s-1} + \cdots + a_s = 0 \tag{19}$$

die irreduzible Gleichung mit ganz-rationalen Koeffizienten, der ϱ genügt. Wir setzen

$$\varphi_{n+1} = u_{n+1} - \varrho u_n$$

und errechnen daraus, daß:

$$u_{n+r} = \varphi_{n+r} + \varrho \varphi_{n+r-1} + \cdots + \varrho^{r-1} \varphi_{n+1} + \varrho^r u_n.$$

Bilden wir nun die ganze rationale Zahl

$$w_n = u_{n+s} + a_1 u_{n+s-1} + \cdots + a_s u_n,$$

so wird, unter Berücksichtigung von (19),

$$(20)\quad \begin{aligned} w_n &= \varphi_{n+s} + (\varrho + a_1) \varphi_{n+s-1} + \cdots + (\varrho^{s-1} + a_1 \varrho^{s-2} + \cdots + a_{s-1}) \varphi_{n+1} \\ &= \varphi_{n+s} + \theta_1 \varphi_{n+s-1} + \cdots + \theta_{s-1} \varphi_{n+1}, \end{aligned}$$

wobei wir für $r = 1, 2, \ldots, s-1$

$$\theta_r = \varrho^r + a_1 \varrho^{r-1} + \cdots + a_r$$

gesetzt haben. Es gilt folgende Identität in ζ:

$$(\zeta - \varrho)(\zeta^{s-1} + \theta_1 \zeta^{s-2} + \cdots + \theta_{s-1}) = \zeta^s + a_1 \zeta^{s-1} + \cdots + a_s.$$

Daraus ersehen wir, daß die θ_r die elementarsymmetrischen Funktionen der $s-1$ Zahlen $\varrho_2, \ldots, \varrho_s$ sind. Es ist folglich

$$\begin{aligned} 1 + |\theta_1| + \cdots + |\theta_{s-1}| &= 1 + |\varrho_2 + \cdots + \varrho_s| + \cdots + |\varrho_2 \ldots \varrho_s| \\ &\leqq \prod_{r=2}^{s} (1 + |\varrho_r|) \leqq 2. \end{aligned}$$

Aus der Bedingung (17)

$$|u_{n+1} - \varrho u_n| = |\varphi_{n+1}| < \tfrac{1}{2} \qquad \text{für alle } n \geqq 0$$

folgt nun in (20):

$$|w_n| < \tfrac{1}{2}(1 + |\theta_1| + \cdots + |\theta_{s-1}|) \leqq 1.$$

Die ganze rationale Zahl w_n verschwindet also für alle n, das heißt aber, die Zahlen u_n genügen der linearen Rekursion

$$(21)\qquad u_{n+s} + a_1 u_{n+s-1} + \cdots + a_s u_n = 0.$$

Betrachten wir wieder die Potenzreihe in ζ

$$f(\zeta) = u_0 + u_1 \zeta + \cdots + u_n \zeta^n + \cdots,$$

so wird

$$(1 + a_1 \zeta + \cdots + a_s \zeta^s) f(\zeta) = P(\zeta),$$

wobei $P(\zeta)$ ein Polynom mit rational-ganzzahligen Koeffizienten ist, dessen Grad $s-1$ nicht überschreitet, denn die Koeffizienten der höheren Potenzen von ζ verschwinden alle nach (21). Es ist somit $f(\zeta)$ eine rationale Funktion von ζ, deren Pole in den Punkten $\frac{1}{\varrho}, \frac{1}{\varrho_2}, \ldots, \frac{1}{\varrho_s}$ liegen. Wie beim Beweis von Satz II entnimmt man dieser Tatsache, daß

$$u_n = \lambda \varrho^n + \lambda_2 \varrho_2^n + \cdots + \lambda_s \varrho_s^n,$$

wo $\lambda \neq 0$ eine Zahl des Körpers von ϱ bedeutet und $\lambda_2, \ldots, \lambda_s$ ihre Konjugierten.

Aus der erhaltenen Formel für u_n schließen wir wie im Beweis von Satz I, daß

$$|u_{n+1} - \varrho u_n| < \frac{C_{21}}{|u_n|^\varepsilon}.$$

Der Exponent ε ist die schon eingeführte Größe, für die $|\varrho_2|\varrho^\varepsilon = 1$ ist, wenn $|\varrho_2|$ die größte der Zahlen $|\varrho_2|, \ldots, |\varrho_s|$ bedeutet. Da ϱ eine Zahl α des Hilfssatzes 1 ist, so gilt

$$\varepsilon \leqq \frac{1}{s-1}.$$

Man kann aber auch $\varrho = \alpha^m$ wählen mit geeignetem m; in diesem Falle ist ε mit dem entsprechenden Exponenten für α identisch. Es gibt also auch Zahlen ϱ, für die ε beliebig nahe an $\frac{1}{s-1}$ gewählt werden kann.

S c h l u ß d e s B e w e i s e s v o n S a t z III. Betrachten wir nun zwei Folgen $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$ und $v_0, v_1, \ldots, v_n, \ldots$, die nach der Vorschrift C aus den Zahlen $u_0 \neq 0$ und $v_0 \neq 0$ entstehen. Nach Hilfssatz 2 sind ihnen zwei Zahlen $\lambda \neq 0$ und $\mu \neq 0$ des Körpers von ϱ so zugeordnet, daß

$$u_n = \lambda \varrho^n + \lambda_2 \varrho_2^n + \cdots + \lambda_s \varrho_s^n,$$
$$v_n = \mu \varrho^n + \mu_2 \varrho_2^n + \cdots + \mu_s \varrho_s^n,$$

somit genügen dann die Folgen u_n und v_n den schärferen Ungleichungen

$$|u_{n+1} - \varrho u_n| < \frac{C_{21}}{|u_n|^\varepsilon} \quad \text{und} \quad |v_{n+1} - \varrho v_n| < \frac{C_{22}}{|u_n|^\varepsilon}.$$

Der Bruch $\frac{u_n}{v_n}$ strebt mit wachsendem n nach $\frac{\lambda}{\mu} = \xi$, also nach einer algebraischen Zahl, die dem Körper von ϱ angehört. Für die Schärfe der Annäherung gilt die Ungleichung

$$|u_n - \xi v_n| < \frac{C_{23}}{|v_n|^\varepsilon}.$$

Die Näherungsbrüche $\frac{u_n}{v_n}$ besitzen daher die Eigenschaften A und B.

Umgekehrt sei ξ eine beliebige Zahl des Körpers von ϱ. Man kann immer ξ als Quotient $\frac{\lambda}{\mu}$ zweier ganzen Zahlen λ und μ des Körpers darstellen, die außerdem den Ungleichungen

$$(22) \qquad \begin{aligned} |\lambda_2(\varrho - \varrho_2)| + \cdots + |\lambda_s(\varrho - \varrho_s)| &< \tfrac{1}{2}, \\ |\mu_2(\varrho - \varrho_2)| + \cdots + |\mu_s(\varrho - \varrho_s)| &< \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

genügen. Bezeichnen wir nämlich mit λ', μ' zwei ganze Zahlen des Körpers für die $\xi = \frac{\lambda'}{\mu'}$ gilt. Die Konjugierten der Zahl $\lambda' \varrho^m$ sind dann die Zahlen $\lambda'_r \varrho_r^m$, wo $r = 2, \ldots, s$; diejenigen von $\mu' \varrho^m$ sind die Zahlen $\mu'_r \varrho_r^m$ für $r = 2, \ldots, s$. Mit wachsendem Exponenten m streben diese Konjugierten nach Null, und man kann m so bestimmen, daß die Ungleichungen

$$|\lambda'_2 \varrho_2^m (\varrho - \varrho_2)| + \cdots + |\lambda'_s \varrho_s^m (\varrho - \varrho_s)| < \tfrac{1}{2},$$
$$|\mu'_2 \varrho_2^m (\varrho - \varrho_2)| + \cdots + |\mu'_s \varrho_s^m (\varrho - \varrho_s)| < \tfrac{1}{2}$$

gelten. Die ganzen algebraischen Zahlen $\lambda = \lambda' \varrho^m$ und $\mu = \mu' \varrho^m$ erfüllen dann die Bedingungen (22), und es ist $\xi = \frac{\lambda'}{\mu'} = \frac{\lambda}{\mu}$. Die Zahlen

$$u_n = \lambda \varrho^n + \lambda_2 \varrho_2^n + \cdots + \lambda_s \varrho_s^n,$$
$$v_n = \mu \varrho^n + \mu_2 \varrho_2^n + \cdots + \mu_s \varrho_s^n$$

sind ganz rational, und es ist

$$u_{n+1} - \varrho u_n = \lambda_2(\varrho_2 - \varrho)\varrho_2^n + \cdots + \lambda_s(\varrho_s - \varrho)\varrho_s^n,$$
$$v_{n+1} - \varrho v_n = \mu_2(\varrho_2 - \varrho)\varrho_2^n + \cdots + \mu_s(\varrho_s - \varrho)\varrho_s^n.$$

Die Ungleichungen (22) zeigen uns dann, daß

$$|u_{n+1} - \varrho u_n| < \tfrac{1}{2} \quad \text{und} \quad |v_{n+1} - \varrho v_n| < \tfrac{1}{2}$$

für alle $n \geqq 0$ gilt. Die Folgen u_n und v_n entstehen also aus u_0 und v_0 durch die Vorschrift C, und die Quotienten $\frac{u_n}{v_n}$ sind Näherungsbrüche von ξ, welche die Eigenschaften A und B besitzen.

Geometrische Konstruktion der Näherungsbrüche. In einer Ebene betrachten wir das Gitter der Punkte mit rational-ganzzahligen Koordinaten in bezug auf ein rechtwinkliges Achsensystem OX, OY. In dieser Ebene zeichnen wir die Geraden G und G', deren Gleichungen $Y = \varrho X$ und $Y = \frac{1}{\varrho} X$ lauten. Von einem Gitterpunkt u_0 auf OX ausgehend, ziehen wir die Parallele zu OY bis zum Gitterpunkt, der am nächsten an G liegt; von diesem Punkte aus ziehen wir die Parallele zu OX bis zum Gitterpunkt, der am nächsten an G' liegt, und wiederholen diese Konstruktion ins Unendliche. Auf diese Weise erhalten wir einen unendlichen Streckenzug K, der aus den Strecken K_0, $K_1, \ldots, K_n, \ldots$ zusammengesetzt ist, die abwechselnd parallel zu OY und OX sind. Es sei L, bestehend aus den Strecken $L_0, L_1, \ldots, L_n, \ldots$, der Streckenzug, der auf entsprechende Weise von dem Gitterpunkt v_0 auf OY ausgeht, wo wir aber mit L_0 parallel zu OX beginnen. Die Strecken mit gleichem Index K_n und L_n stehen dann senkrecht aufeinander; sie oder ihre Verlängerungen schneiden sich in Gitterpunkten, deren Koordinaten wir mit u_n, v_n bezeichnen wollen, und zwar soll u_n für gerades n die Abszisse und für ungerades n die Ordinate des Punktes bedeuten. Satz III lehrt uns dann, daß sich die erhaltenen Gitterpunkte u_n, v_n zwei Geraden $Y = \xi X$ und $Y = \frac{1}{\xi} X$ so nähern, daß

$$|u_n - \xi v_n| < \frac{C_{23}}{|v_n|^{\varepsilon}}.$$

Die Größe ξ ist eine algebraische Zahl des Körpers von ϱ, und jede algebraische Zahl dieses Körpers kann auf diese Weise mit Hilfe der gleichen Geraden G und G' angenähert werden.

Wenn der Körper vom zweiten Grade ist, erhalten wir die besten Näherungen, wenn wir für ϱ eine Einheit wählen, dann tritt uns der Fall der Kettenbruchnäherungen wieder entgegen. Wir kommen sogar hier mit einer einzigen Zahl ϱ für alle Zahlen des Körpers aus. Das kommt daher, daß wir die für die Kettenbruchnäherungen gültige Ungleichung

$$|u_n - \xi v_n| < \frac{1}{|v_n|}$$

durch die etwas weniger fordernde Bedingung

$$|u_n - \xi v_n| < \frac{C_{23}}{|v_n|}$$

ersetzt haben.

Wir hatten angedeutet, daß der Beweis von Satz II sich entweder auf den Beweis von Thue oder auf denjenigen von Borel stützen konnte, die von verschiedenen Grundgedanken ausgehen. Diese beiden Richtungen können nun ausgebaut und wesentlich verschärft werden; sie führen so zu zwei verschiedenen Erweiterungen Satz IV a) und Satz IV b) von Satz II, der in beiden Sätzen enthalten ist. Wir werden die Beweise von den Sätzen IV a) und IV b) vollständig geben, so daß dadurch auch Satz II vollständig bewiesen ist, ohne daß die vorherige Kenntnis der Arbeiten von Thue oder Borel erforderlich ist. Satz IV lautet:

Satz IV. *Die reelle Zahl ξ besitze eine unendliche Folge von verschiedenen Näherungsbrüchen $\frac{u_n}{v_n}$. Wir setzen*

$$\varphi_{n+1} = u_{n+1} - \alpha u_n \quad \textit{und} \quad \psi_{n+1} = v_{n+1} - \alpha v_n .$$

Die Zahl ξ ist algebraisch, wenn man eine Zahl $\alpha > 1$ so finden kann, daß eine von beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:

a) *Es gilt zugleich*

$$|\varphi_n| \leqq \frac{1}{2e\alpha(1+\log|u_0|)}, \quad u_0 \neq 0 \quad \textit{und} \quad |\psi_n| \leqq \frac{1}{2e\alpha(1+\log|v_0|)}, \quad v_0 \neq 0$$

für alle $n = 1, 2, \ldots$. Die Zahl e bedeutet die Basis der natürlichen Logarithmen. Der Grad von ξ kann die kleinste der beiden Größen $1 + \log|u_0|$ und $1 + \log|v_0|$ nicht überschreiten.

b) *Es gilt zugleich*

$$|\varphi_n|^2 + |\varphi_{n+1}|^2 + \cdots + |\varphi_{2n}|^2 \leqq \frac{1}{4\alpha^2}$$

und

$$|\psi_n|^2 + |\psi_{n+1}|^2 + \cdots + |\psi_{2n}|^2 \leqq \frac{1}{4\alpha^2}$$

für alle genügend großen n, also für alle $n \geqq m$.

Beweis von Satz IVa). Wir zeigen zunächst, daß aus der Ungleichung

$$(23) \qquad |\varphi_n| \leqq \frac{1}{2e\alpha(1+\log|u_0|)} \qquad \text{für } n = 1, 2, \ldots$$

folgt, daß α eine ganze algebraische Zahl ist, für deren Konjugierten $\alpha_2, \ldots, \alpha_s$ die Ungleichungen

$$(24) \qquad |\alpha_r| \leqq 1 \qquad \text{für } r = 2, \ldots, s$$

gelten. Hierzu genügt es zu zeigen, daß für die u_n eine lineare Rekursion mit ganzen Koeffizienten besteht. Wie wir beim Beweis vom Hilfssatz 2 gesehen haben, stellt nämlich dann die schon dort betrachtete Potenzreihe

$$(25) \qquad f(\zeta) = u_0 + u_1\zeta + \cdots + u_n\zeta^n + \cdots$$

eine rationale Funktion von ζ dar, deren Zähler und Nenner ganz-rationale Koeffizienten besitzen. Da nach (23) der Ausdruck $|u_{n+1} - \alpha u_n|$ beschränkt ist, so hat $f(\zeta)$ im Kreise $|\zeta| < 1$ nur einen einfachen Pol im Punkte $\zeta = \frac{1}{\alpha}$. Nach dem Satz von Fatou ist daher α eine ganze algebraische Zahl und alle ihre Konjugierten liegen im Kreis $|\zeta| \leqq 1$, genügen also den Ungleichungen (24). Auf dem Kreis $|\zeta| = 1$ können aber Nullstellen des Nenners von $f(\zeta)$ liegen, die zu $\frac{1}{\alpha}$ nicht konjugiert sind; wir bezeichnen solche Nullstellen mit $\frac{1}{\alpha_h}$, wobei $h \geqq s+1$. Die Zahlen α_h mit $h \geqq s+1$ sind auch ganz algebraisch; die Beträge ihrer Konjugierten können den Wert Eins nicht überschreiten. Aus den Ungleichungen

$$1 \leqq |\text{Norm}\, \alpha_h| \leqq 1$$

folgt, daß α_h und alle Konjugierten den Betrag Eins haben; diese Zahlen α_h sind also Einheitswurzeln und liegen alle auf dem Kreis $|\zeta| = 1$. Sie können eventuell auch mehrfache Nullstellen des Nenners sein; mit α_h für $h = s+1, \ldots, l$ bezeichnen wir dann die verschiedenen unter ihnen.

Mit noch unbestimmten ganzen rationalen Zahlen $k, b_0, b_1, \ldots, b_k$ bilden wir die ganze rationale Zahl

$$w_n = b_0 u_{n+k} + b_1 u_{n+k-1} + \cdots + b_k u_n.$$

Wir bezeichnen mit b eine obere Schranke für alle $|b_0|, |b_1|, \ldots, |b_k|$ und mit φ eine obere Schranke für alle $|\varphi_n|$. Wir wollen nun zeigen:

Bestimmt man die Zahlen $b_0, b_1, \ldots, b_k$ so, daß $w_0 = 0$, und ist

$$\varphi < \frac{1}{(k+1)b},$$

so folgt daraus $w_n = 0$ für alle $n \geqq 0$.

Beweis. Wir schließen durch vollständige Induktion nach n. Nehmen wir an, daß schon $w_n = 0$ bewiesen ist, dann wird

$$w_{n+1} = w_{n+1} - \alpha w_n = b_0 \varphi_{n+k+1} + b_1 \varphi_{n+k} + \cdots + b_k \varphi_{n+1},$$

also

$$|w_{n+1}| \leqq (k+1) b \varphi < 1.$$

Da aber w_{n+1} ganz rational ist, muß $w_{n+1} = 0$ sein.

Wir wollen nun untersuchen, wie wir $w_0 = 0$ erhalten können. Dazu zeigen wir:

Für jedes $k \geqq 1$ kann man ganze rationale $b_0, b_1, \ldots, b_k$ so finden, daß $w_0 = 0$, wenn die obere Schranke b der Zahlen $|b_0|, |b_1|, \ldots, |b_k|$ und die obere Schranke φ der Zahlen $|\varphi_1|, |\varphi_2|, \ldots, |\varphi_n|, \ldots$ den Ungleichungen

$$b \geqq 2\alpha |u_0|^{\frac{1}{k}} - 1 \quad \text{und} \quad \varphi < \frac{1}{(k+1)b}$$

genügen.

Beweis. Wir benützen das Dirichletsche Schubfachprinzip. Wir betrachten alle Ausdrücke von der Form

$$w_0' = b_0' |u_k| + b_1' |u_{k-1}| + \cdots + b_k' |u_0|,$$

wo die b_r' nichtnegative ganze rationale Zahlen mit

$$0 \leqq b_r' \leqq b \qquad \text{für } r = 0, 1, \ldots, k$$

bedeuten. Solche Ausdrücke gibt es genau $(b+1)^{k+1}$. Für jeden wird

$$w_0' \leqq b(|u_k| + |u_{k-1}| + \cdots + |u_0|). \tag{26}$$

Aus

$$|\varphi_r| = |u_r - \alpha u_{r-1}| \leqq \varphi$$

schließt man durch vollständige Induktion nach r, daß

$$|u_r| \leqq \alpha^r \left(|u_0| + \frac{r\varphi}{\alpha}\right) \leqq \alpha^k \left(|u_0| + \frac{r\varphi}{\alpha}\right) \qquad \text{für } r \leqq k.$$

Wir erhalten somit aus (26)

$$w_0' \leqq b\alpha^k \left\{(k+1)|u_0| + \frac{k(k+1)\varphi}{2\alpha}\right\}.$$

Da aber

$$\varphi < \frac{1}{(k+1)b},$$

so folgt daraus

$$w_0' < (k+1)\, b\, \alpha^k |u_0| + (k+1)\, \alpha^k \frac{k}{2\alpha(k+1)} < (k+1)(b+1)\, \alpha^k |u_0| - 1,$$

denn

$$\frac{k}{2\alpha(k+1)} < \frac{1}{2} < 1 - \frac{1}{(k+1)\,\alpha^k} \leqq |u_0| - \frac{1}{(k+1)\,\alpha^k}.$$

Ist nun die Anzahl der Ausdrücke w_0' größer als die Anzahl der Werte, die von der ganzen rationalen Zahl w_0' angenommen werden können, so gibt es zwei verschiedene Systeme nichtnegativer ganzen Zahlen $b_0', b_1', \ldots, b_k'$ und $b_0'', b_1'', \ldots, b_k''$, so daß

$$b_0' |u_k| + b_1' |u_{k-1}| + \cdots + b_k' |u_0| = b_0'' |u_k| + b_1'' |u_{k-1}| + \cdots + b_k'' |u_0|.$$

Dann ist

$$(b_0' - b_0'') |u_k| + (b_1' - b_1'') |u_{k-1}| + \cdots + (b_k' - b_k'') |u_0| = 0.$$

Die Koeffizienten der $|u_r|$ sind hier nicht alle Null, und ihre Beträge überschreiten nicht die Schranke b. Durch geeignete Vorzeichenänderung folgt daraus das Vorhandensein eines Ausdruckes

$$w_0 = b_0 u_k + b_1 u_{k-1} + \cdots + b_k u_0 = 0,$$

wobei $|b_r| \leqq b$ für $r = 0, 1, \ldots, k$ ist.

Die Anzahl der Ausdrücke w_0' ist aber $(b+1)^{k+1}$, diejenige der Zahlenwerte, die w_0' annehmen kann, ist kleiner als $(b+1)(k+1)\,\alpha^k |u_0|$. Es gibt also einen Ausdruck w_0, der den Wert Null hat, wenn

$$(b+1)^{k+1} \geqq (b+1)(k+1)\,\alpha^k |u_0|, \tag{27}$$

also wenn

$$b + 1 \geqq (k+1)^{\frac{1}{k}}\, \alpha\, |u_0|^{\frac{1}{k}}.$$

Aber

$$(k+1)^{\frac{1}{k}} \leqq 2 \qquad \text{für} \quad k \geqq 1,$$

die Ungleichung (27) ist daher sicher erfüllt, wenn

$$b + 1 \geqq 2\alpha\, |u_0|^{\frac{1}{k}}$$

gilt, und unsere Behauptung ist erwiesen.

Wir zeigen nun:

Wenn die ganze Zahl k den Ungleichungen

$$\log |u_0| < k \leqq 1 + \log |u_0|$$

genügt, so ist

$$(k+1) |u_0|^{\frac{1}{k}} < e\,(1 + \log |u_0|).$$

Die Zahl e ist die Basis der natürlichen Logarithmen.

Beweis. In einem rechtwinkligen Koordinatensystem OX, OY betrachten wir die Kurve H, deren Gleichung

$$Y = 1 + \log(1 + X) \tag{H}$$

lautet. Die Gerade D, die der Gleichung

$$Y = \frac{1}{k} X + \log(k + 1) \tag{D}$$

genügt, schneidet H, wie man sofort sieht, für $X = k$. Für $X = k - 1$ ist aber

$$\frac{1}{k}(k-1) + \log(k+1) < 1 + \log(1 + k - 1),$$

denn

$$\log(k+1) = \log k + \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) < \log k + \frac{1}{k}.$$

Der Punkt $X = k - 1$ von D liegt also unter dem entsprechenden Punkt von H. Aber H ist nach unten konkav, somit liegt im ganzen Intervall $k - 1 \leqq X < k$ die Gerade D unter der Kurve H. Anders ausgedrückt: Für

$$X < k \leqq 1 + X$$

gilt

$$\frac{1}{k} X + \log(k+1) < 1 + \log(1 + X).$$

Setzen wir hier $X = \log|u_0|$, so gilt für

$$\log|u_0| < k \leqq 1 + \log|u_0|$$

die Ungleichung

$$\frac{1}{k}\log|u_0| + \log(k+1) < 1 + \log(1 + \log|u_0|)$$

oder

$$(k+1)|u_0|^{\frac{1}{k}} < e(1 + \log|u_0|).$$

Schluß des Beweises von Satz IV a). Es sei nun

$$\varphi \leqq \frac{1}{2e\alpha(1 + \log|u_0|)}.$$

Wir wählen eine ganze Zahl k, die durch die Ungleichungen

$$\log|u_0| < k \leqq 1 + \log|u_0|$$

bestimmt ist, dann wird

$$\varphi < \frac{1}{2\alpha(k+1)|u_0|^{\frac{1}{k}}}.$$

Es sei b diejenige ganze Zahl, die den Ungleichungen

$$2\alpha|u_0|^{\frac{1}{k}} - 1 \leqq b < 2\alpha|u_0|^{\frac{1}{k}}$$

genügt, dann ist

$$\varphi < \frac{1}{(k+1)\,b}.$$

Alle Zwischensätze werden anwendbar, und es ist somit bewiesen, daß α eine ganze algebraische Zahl ist, deren Grad s den Wert $k \leqq 1 + \log|u_0|$ nicht überschreiten kann und deren Konjugierte den Ungleichungen $|\alpha_r| \leqq 1$ für $r = 2, \ldots, s$ genügen. Für die Folge u_n gilt die lineare Rekursion

$$(28) \qquad b_0\, u_{n+k} + b_1 u_{n+k-1} + \cdots + b_k\, u_n = 0.$$

Es ist also

$$Q(\zeta) = b_0 + b_1 \zeta + \cdots + b_k\, \zeta^k$$

der Nenner der durch die Potenzreihe (25) dargestellten rationalen Funktion. Die Wurzeln von $Q(\zeta) = 0$ sind die Zahlen $\frac{1}{\alpha}$ und $\frac{1}{\alpha_r}$ für $r = 2, \ldots, l$. Die Zahlen $\frac{1}{\alpha_h}$ für $h = s + 1, \ldots, l$ sind die eventuell auch als mehrfache Wurzeln von $Q(\zeta) = 0$ auftretenden Einheitswurzeln. Die Methode, die wir in Satz II benützt haben, zeigt uns, daß die Lösung der Rekursion (28) auf die Form

$$u_n = \lambda\, \alpha^n + \lambda_2\, \alpha_2^n + \cdots + \lambda_s\, \alpha_s^n + \alpha_{s+1}^n P_{s+1}(n) + \cdots + \alpha_l^n P_l(n)$$

gebracht werden kann. Hierbei ist λ eine algebraische Zahl des Körpers von α und $P_h(n)$ für $h = s + 1, \ldots, l$ bezeichnet ein Polynom in n, dessen Grad kleiner als die Vielfachheit der Wurzel $\frac{1}{\alpha_h}$ von $Q(\zeta) = 0$ ist. Wir wollen nun zeigen, daß der Grad dieser Polynome Null sein muß, also:

Die Polynome $P_h(n)$ für $h = s + 1, \ldots, l$ reduzieren sich auf Konstanten λ_h.

Es sei $g \geqq 0$ der höchste Grad der Polynome $P_h(n)$, der für $h = s + 1, \ldots, l$ wirklich vorkommt. Bezeichnen wir mit λ_h den Koeffizienten von n^g in $P_h(n)$, so verschwinden für $h = s + 1, \ldots, l$ nicht alle λ_h. Es wird

$$\varphi_{n+1} = u_{n+1} - \alpha\, u_n = \lambda_2(\alpha_2 - \alpha)\, \alpha_2^n + \cdots + \lambda_s(\alpha_s - \alpha)\, \alpha_s^n + \sigma_n,$$

wobei

$$\sigma_n = \{\alpha_{s+1} P_{s+1}(n+1) - \alpha\, P_{s+1}(n)\}\, \alpha_{s+1}^n + \cdots + \{\alpha_l P_l(n+1) - \alpha\, P_l(n)\}\, \alpha_l^n.$$

Der Koeffizient von n^g in σ_n ist

$$(29) \qquad \lambda_{s+1}(\alpha_{s+1} - \alpha)\, \alpha_{s+1}^n + \cdots + \lambda_l(\alpha_l - \alpha)\, \alpha_l^n.$$

Dieser Koeffizient nimmt unendlich oft einen von Null verschiedenen Wert η an. Betrachten wir nämlich folgendes Gleichungssystem für $\lambda_{s+1}(\alpha_{s+1} - \alpha)$, $\ldots$, $\lambda_l(\alpha_l - \alpha)$:

$$(30) \qquad \begin{aligned} &\lambda_{s+1}(\alpha_{s+1} - \alpha) + \cdots + \lambda_l(\alpha_l - \alpha) = 0 \\ &\lambda_{s+1}(\alpha_{s+1} - \alpha)\, \alpha_{s+1} + \cdots + \lambda_l(\alpha_l - \alpha)\, \alpha_l = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\lambda_{s+1}(\alpha_{s+1} - \alpha)\, \alpha_{s+1}^{l-s-1} + \cdots + \lambda_l(\alpha_l - \alpha)\, \alpha_l^{l-s-1} = 0. \end{aligned}$$

Die Determinante der Koeffizienten ist von Null verschieden, da wir $\alpha_{s+1}, \ldots, \alpha_l$ verschieden voneinander vorausgesetzt haben. Das System hat also nur die Lösung

$$\lambda_{s+1}(\alpha_{s+1}-\alpha) = \cdots = \lambda_l(\alpha_l-\alpha) = 0.$$

Aber auch α ist von allen α_h mit $h = s+1, \ldots, l$ verschieden, denn $\alpha > 1$ und $|\alpha_h| = 1$; somit wäre $\lambda_{s+1} = \cdots = \lambda_l = 0$, was wir ausgeschlossen hatten. Mindestens eine der Größen (30) ist folglich eine von Null verschiedene Zahl η. Es gibt also einen Exponenten c mit $0 \leqq c < l - s$, so daß

$$\lambda_{s+1}(\alpha_{s+1}-\alpha)\,\alpha_{s+1}^c + \cdots + \lambda_l(\alpha_l-\alpha)\,\alpha_l^c = \eta \neq 0.$$

Da die Zahlen $\alpha_{s+1}, \ldots, \alpha_l$ Einheitswurzeln sind, gibt es einen Exponenten d, so daß für alle $h = s+1, \ldots, l$

$$\alpha_h^d = 1$$

gilt. Der Ausdruck (29) nimmt also den Wert η an für alle Exponenten von der Form

$$n = dt + c,$$

wo t eine beliebige nichtnegative rationale ganze Zahl ist. Für diese Werte von n wird daher σ_n unendlich groß, wenn $g \geqq 1$. Die Summe

$$\lambda_2(\alpha_2-\alpha)\,\alpha_2^n + \cdots + \lambda_s(\alpha_s-\alpha)\,\alpha_s^n = \varphi_{n+1} - \sigma_n$$

bleibt aber beschränkt. Aus den Voraussetzungen von Satz IV a) folgt auch, daß $|\varphi_{n+1}|$ beschränkt ist. Wir haben somit einen Widerspruch, wenn $g > 0$, folglich ist $g = 0$ und u_n hat die Form

$$u_n = \lambda\,\alpha^n + \lambda_2\,\alpha_2^n + \cdots + \lambda_s\,\alpha_s^n + \lambda_{s+1}\,\alpha_{s+1}^n + \cdots + \lambda_l\,\alpha_l^n.$$

In gleicher Weise folgt aus der Bedingung

$$|\psi_n| < \frac{1}{2\,e\,\alpha\,(1+\log|v_0|)} \qquad \text{für alle } n \geqq 1,$$

daß es Zahlen $\mu, \mu_2, \ldots, \mu_f$ gibt, so daß

$$v_n = \mu\,\alpha^n + \mu_2\,\alpha_2^n + \cdots + \mu_s\,\alpha_s^n + \mu_{s+1}\,\alpha_{s+1}'^{\,n} + \cdots + \mu_f\,\alpha_f'^{\,n},$$

wobei μ dem Körper von α angehört und $f \geqq s$. Die Zahlen α_h' für $h = s+1, \ldots, f$ sind etwaige vorkommende Einheitswurzeln, und es ist $f \leqq k' \leqq 1 + \log|v_0|$. Da α die einzige Zahl ist, deren Betrag größer als Eins ist, so streben die Brüche $\frac{u_n}{v_n}$ mit wachsendem n dem Grenzwert $\frac{\lambda}{\mu}$ zu; folglich ist $\xi = \frac{\lambda}{\mu}$ eine algebraische Zahl des Körpers von α, und Satz IV a) ist bewiesen.

B e w e i s v o n S a t z IV b). Es genügt wieder zu zeigen, daß die Bedingung

(31) $$|\varphi_n|^2 + |\varphi_{n+1}|^2 + \cdots + |\varphi_{2n}|^2 \leqq \frac{1}{4\,\alpha^2} \qquad \text{für } n > m$$

das Bestehen einer linearen Rekursion mit ganzen rationalen Koeffizienten

$$b_0 u_{n+k} + b_1 u_{n+k-1} + \cdots + b_k u_n = 0 \tag{32}$$

bedingt. Schreiben wir diese Rekursion (32) für $k+1$ aufeinanderfolgende Werte von n, so ergibt sich, daß die Determinanten

$$d_k^{(n)} = \begin{vmatrix} u_n & u_{n+1} & \cdots & u_{n+k} \\ u_{n+1} & u_{n+2} & \cdots & u_{n+k+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{n+k} & u_{n+k+1} & \cdots & u_{n+2k} \end{vmatrix}$$

für alle n verschwinden. Umgekehrt folgt aus dem Verschwinden der Determinanten $d_k^{(n)}$ für alle n, daß alle Gleichungen (32) auflösbar sind in rationalen, also auch in ganzen rationalen Zahlen $b_0, b_1, \ldots, b_k$, die nicht alle verschwinden.

Zum Beweis wollen wir annehmen, daß k die kleinste Zahl ist, für die

$$d_k^{(n)} = 0 \qquad \text{für alle } n = 0, 1, \ldots.$$

Es ist dann $d_{k-1}^{(0)} \neq 0$. Bildet man nämlich die Determinante der Unterdeterminanten der vier Eckelemente von $d_k^{(n)}$, so erhält man nach einer bekannten Laplaceschen Formel die Beziehung

$$d_{k-1}^{(n)} d_{k-1}^{(n+2)} - \left(d_{k-1}^{(n+1)}\right)^2 = d_k^{(n)} d_{k-2}^{(n+2)}. \tag{33}$$

Aus dieser Formel schließt man, unter Berücksichtigung von $d_k^{(n)} = 0$, daß aus $d_{k-1}^{(h)} = 0$ folgt $d_{k-1}^{(h+1)} = 0$ und, falls $h \geqq 2$, auch $d_{k-1}^{(h-1)} = 0$. Wäre also $d_{k-1}^{(0)} = 0$, so würden auch alle anderen Determinanten $d_{k-1}^{(n)}$ verschwinden, das aber widerspricht der Wahl von k. Die gleiche Schlußweise zeigt uns noch, daß die Determinanten $d_{k-1}^{(n)}$ für $n \geqq 1$ entweder sämtlich verschwinden oder sämtlich von Null verschieden sind.

Wir wollen zuerst den Fall untersuchen, wo alle $d_{k-1}^{(n)} \neq 0$. Für jeden Wert von $n = 0, 1, \ldots$ hat das System

$$\begin{aligned} b_0 u_{n+k} &+ b_1 u_{n+k-1} + \cdots + b_k u_n = 0 \\ b_0 u_{n+k+1} &+ b_1 u_{n+k} + \cdots + b_k u_{n+1} = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_0 u_{n+2k-1} &+ b_1 u_{n+2k-2} + \cdots + b_k u_{n+k-1} = 0 \end{aligned}$$

eine Lösung in ganzen rationalen Zahlen $b_0, b_1, \ldots, b_k$, und es ist $b_0 \neq 0$ und $b_k \neq 0$, weil $d_{k-1}^{(n)} \neq 0$ und $d_{k-1}^{(n+1)} \neq 0$. Formt man mit Hilfe dieser Gleichungen die Determinante $d_k^{(n)}$ um, so ergibt sich

$$0 = d_k^{(n)} = \frac{1}{b_0} (b_0 u_{n+2k} + b_1 u_{n+2k-1} + \cdots + b_k u_{n+k}) d_{k-1}^{(n)}.$$

Es ist also

$$b_0 u_{n+2k} + b_1 u_{n+2k-1} + \cdots + b_k u_{n+k} = 0,$$

und die Zahlen $b_0, b_1, \ldots, b_k$ sind auch Lösungen für das System, das dem Werte $n + 1$ entspricht; folglich sind $b_0, b_1, \ldots, b_k$ von n unabhängig, das heißt die Folge u_n genügt einer Rekursion (32).

Betrachten wir nun den Fall, daß alle $d_{k-1}^{(n)}$ für $n \geqq 1$ verschwinden. Das System

$$\begin{aligned} b_0 u_k + b_1 u_{k-1} + \cdots + b_k u_0 &= 0 \\ b_0 u_{k+1} + b_1 u_k + \cdots + b_k u_1 &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ b_0 u_{2k-1} + b_1 u_{2k-2} + \cdots + b_k u_{k-1} &= 0 \end{aligned}$$

läßt für b_k nur die Lösung $b_k = 0$ zu, denn $d_{k-1}^{(0)} \neq 0$ und $d_{k-1}^{(1)} = 0$. In der Rekursion tritt folglich u_0 überhaupt nicht auf. Die Determinanten $d_{k-1}^{(n)}$, die aus der Folge $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ gebildet werden, verschwinden aber alle, somit sind wir für diese Folge auf die Anfangsaufgabe zurückgeführt mit einem kleineren Wert für k. Da aber unendlich viele u_n nicht verschwinden, erhalten wir auf diese Weise nach endlich vielen Schritten eine Folge, für die der erste Fall vorliegt. Es gibt also auch in diesem Falle eine Rekursion (32) für alle u_n mit $n = 0, 1, \ldots$, aber einige der letzten Koeffizienten $b_k, b_{k+1}, \ldots$ verschwinden.

Satz von Fatou. *Ist k die kleinste Zahl, für welche die Determinanten $d_k^{(n)}$ alle verschwinden und sind die Zahlen u_n alle ganz rational, so kann man in der Rekursion* (32) $b_0 = 1$ *nehmen.* Wegen der Bedeutung dieses Satzes für unsere Theorie wollen wir der Vollständigkeit halber auch diesen Beweis hier bringen.

Beweis. Aus den Voraussetzungen des Satzes folgt, daß $d_{k-1}^{(0)} \neq 0$; wir können also ganze rationale Zahlen $y_1, \ldots, y_k$, die nicht alle verschwinden, so bestimmen, daß die Zahlen

$$z_n' = y_1 u_n + y_2 u_{n+1} + \cdots + y_k u_{n+k-1}$$

für $n = 0, 1, \ldots, k - 2$ verschwinden. Haben alle Zahlen z_n' gemeinsame Teiler, so sei z der größte unter ihnen, sonst setzen wir $z = 1$. Die Zahlen

$$z_n = \frac{z_n'}{z} = \frac{1}{z}(y_1 u_n + y_2 u_{n+1} + \cdots + y_k u_{n+k-1})$$

sind dann ganz rational und haben keinen von 1 verschiedenen gemeinsamen Teiler; sie genügen auch der Rekursion (32). Es sei p ein Primfaktor von b_0 und es sei z_q die erste Zahl der Reihe $z_0, z_1, \ldots, z_n, \ldots$, die nicht durch p teilbar ist. Dann ist $q \geqq k - 1$ und (32) mit z_n für $n = q - (k - 1)$ angewandt, gibt

$$b_1 z_q = -(b_0 z_{q+1} + b_2 z_{q-1} + \cdots + b_k z_{q-k+1}).$$

Jeder Summand in der Klammer ist durch p teilbar; da z_q es nicht ist, so ist b_1 durch p teilbar. Wenden wir nun (32) mit z_n für $n = q - (k - 2)$ an, so wird

$$b_2 z_q = -(b_0 z_{q+2} + b_1 z_{q+1} + b_3 z_{q-1} + \cdots + b_k z_{q-k+2}).$$

Da auch b_1 durch p teilbar ist, ist wieder jeder Summand der Klammer durch p teilbar, also auch b_2. Man schließt auf diese Weise der Reihe nach, daß p alle Zahlen $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_k$ teilt. Man kann also jeden von Eins verschiedenen Primfaktor von b_0 aus (32) wegdividieren, und daraus folgt unsere Behauptung.

Kroneckersches Determinantenkriterium [10]). Nach Kronecker ist für das Bestehen einer linearen Rekursion für die u_n notwendig und hinreichend, daß die Determinanten $d_n^{(0)}$ für alle $n \geqq k$ verschwinden. Es leuchtet ohne weiteres ein, daß die Bedingung notwendig ist, denn alle $d_k^{(n)}$ verschwinden. Die Bedingung ist auch hinreichend; aus der Determinantenrelation (33) schließt man nämlich durch vollständige Induktion nach h, daß aus $d_n^{(0)} = 0$ für $n \geqq k$ folgt $d_n^{(h)} = 0$ für $n \geqq k$, und daher $d_k^{(h)} = 0$ für alle $h = 0, 1, \ldots$.

Anwendung auf den Beweis. Wir werden zeigen, daß aus der Bedingung (31) folgt, daß die Determinanten $d_n^{(0)}$ für wachsendes n nach Null streben. Da sie aber ganze rationale Zahlen sind, ergibt sich daraus das Vorhandensein einer Zahl k, so daß $d_n^{(0)} = 0$ für $n \geqq k$.

Die Beziehung

$$u_{n+1} - \alpha\, u_n = \varphi_{n+1}$$

gestattet uns die Determinante $d_n^{(0)}$ auf folgende Weise umzuformen:

$$d_n^{(0)} = \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & \ldots & u_n \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_n & u_{n+1} & \ldots & u_{2n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_0 & \varphi_1 & \ldots & \varphi_n \\ u_1 & \varphi_2 & \ldots & \varphi_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_n & \varphi_{n+1} & \ldots & \varphi_{2n} \end{vmatrix}.$$

Nach einem Satz von Hadamard [11]) gilt aber die Ungleichung

$$(d_n^{(0)})^2 \leqq (|u_0|^2 + |u_1|^2 + \cdots + |u_n|^2) \prod_{k=1}^{n} (|\varphi_h|^2 + |\varphi_{h+1}|^2 + \cdots + |\varphi_{h+n}|^2).$$

Wir wollen nun obere Schranken für alle Klammerausdrücke ermitteln. Es sei n so groß gewählt, daß $n \geqq m$.

Zuerst betrachten wir die Zahlen h, die den Ungleichungen $m \leqq h \leqq n$ genügen. Die Reihe der $n + 1$ aufeinanderfolgenden Indizes $h, h + 1, \ldots, h + n$ spalten wir in $f + 1$ Abschnitte, die jeweils mit den Zahlen $h, 2h, \ldots, 2^f h$ beginnen, wobei f der Ungleichung

$$2^f h \leqq h + n < 2^{f+1} h \tag{34}$$

genügt. Aus der Bedingung (31) ergibt sich dann die Ungleichung

$$|\varphi_h|^2 + |\varphi_{h+1}|^2 + \cdots + |\varphi_{h+n}|^2 \leqq (f + 1)\frac{1}{4\alpha^2}.$$

---

[10]) Kronecker, Monatsber. Akad. Berlin 1881, S. 566–567; Ges. Abh. 2, S. 146 bis 149. Siehe auch: Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie 2 (1927), S. 314 bis 315. Berlin.

[11]) Hadamard, Bull. Sci. math. 17 (1893), S. 240–246.

Nach (34) ist aber

$$f \leqq \frac{1}{\log 2}\log\frac{h+n}{h} = \frac{1}{\log 2}\log\left(2+\frac{n-h}{h}\right) \leqq 1+\frac{1}{\log 2}\cdot\frac{n-h}{2h} < 1+\frac{n-h}{h} = \frac{n}{h}.$$

Es wird daher

$$\prod_{h=m}^{n}(|\varphi_h|^2+|\varphi_{h+1}|^2+\cdots+|\varphi_{h+n}|^2) < \frac{1}{(2\alpha)^{2n+2-2m}}\prod_{h=1}^{n}\left(1+\frac{n}{h}\right)$$
$$= (2\alpha)^{2m-2}\frac{(2n)!}{(n!)^2}\cdot\frac{1}{(2\alpha)^{2n}}.$$

Die Stirlingsche Formel für Fakultäten und die Tatsache, daß der Exponent $2m-2$ von n unabhängig ist, zeigen uns das Vorhandensein einer Konstanten C_{24}, so daß

$$(2\alpha)^{2m-2}\frac{(2n)!}{(n!)^2} < C_{24}\frac{2^{2n}}{\sqrt{n}}.$$

Somit erhalten wir

$$\prod_{h=m}^{n}(|\varphi_h|^2+|\varphi_{h+1}|^2+\cdots+|\varphi_{h+n}|^2) < \frac{C_{24}}{\alpha^{2n}\sqrt{n}}. \tag{35}$$

Nun wollen wir uns den Zahlen h mit $1 \leqq h < m$ zuwenden. Wir setzen

$$|\varphi_1|^2+|\varphi_2|^2+\cdots+|\varphi_{m-1}|^2 = C_{25}-\frac{1}{2\alpha^2}, \tag{36}$$

C_{25} ist von n unabhängig. Die Reihe $m, m+1, \ldots, h+n$ zerlegen wir wie vorhin in $g+1$ Abschnitte, die mit den Zahlen $m, 2m, \ldots, 2^g m$ beginnen, wobei g durch $2^g m \leqq h+n < 2^{g+1} m$ erklärt ist. Wie oben ist dann

$$|\varphi_m|^2+|\varphi_{m+1}|^2+\cdots+|\varphi_{h+n}|^2 \leqq \left(1+\frac{1}{\log 2}\log\frac{h+n}{m}\right)\frac{1}{4\alpha^2}$$
$$< \left(1+\frac{1}{\log 2}\log\frac{m+n}{m}\right)\frac{1}{4\alpha^2} \leqq \left(1+\frac{1}{\log 2}\log 2n\right)\frac{1}{4\alpha^2}.$$

Da aber $\log 2 > \frac{1}{2}$ ist, erhält man

$$1+\frac{1}{\log 2}\log 2n = 2+\frac{1}{\log 2}\log n < 2+2\log n.$$

Beachten wir noch (36), so wird für $1 \leqq h < m$

$$|\varphi_h|^2+|\varphi_{h+1}|^2+\cdots+|\varphi_{h+n}|^2 < C_{25}+\frac{1}{2\alpha^2}\log n < C_{25}+\log n$$

und

$$\prod_{h=1}^{m-1}(|\varphi_h|^2+|\varphi_{h+1}|^2+\cdots+|\varphi_{h+n}|^2) < (C_{25}+\log n)^{m-1}. \tag{37}$$

Endlich schätzen wir den Ausdruck $|u_0|^2+|u_1|^2+\cdots+|u_n|^2$. Es ist für $h \geqq m$

$$|u_h-\alpha u_{h-1}| = |\varphi_h| \leqq \frac{1}{2\alpha}.$$

Durch vollständige Induktion nach h erhält man

$$|u_h| \leqq \alpha^{h-m}|u_m| + \frac{1}{2\alpha}(1+\alpha+\cdots\alpha^{h-m-1}) < \alpha^{h-m}\left(|u_m| + \frac{1}{2\alpha(\alpha-1)}\right) \leqq C_{26}\alpha^h.$$

Für $h < m$ kann man eine feste Zahl C_{27} so bestimmen, daß

$$|u_h| \leqq C_{27}\,\alpha^h,$$

und es wird, wenn C_{28} die größte der beiden Zahlen C_{26}, C_{27} bezeichnet,

$$(38)\qquad |u_0|^2 + |u_1|^2 + \cdots + |u_n|^2 \leqq C_{28}\,(1 + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{2n}) \leqq C_{29}\,\alpha^{2n}.$$

Durch Zusammenfassen der drei Ungleichungen (35), (37) und (38) erhält man

$$(d_n^{(0)})^2 < \frac{C_{24}}{\alpha^{2n}\sqrt{n}}\,(C_{25} + \log n)^{m-1}\,C_{29}\,\alpha^{2n} = C_{24}\,C_{29}\,\frac{(C_{25} + \log n)^{m-1}}{\sqrt{n}}.$$

Der Exponent $m - 1$ ist aber auch eine von n unabhängige feste Zahl. Für wachsendes n strebt daher dieser letzte Ausdruck nach Null, und es gibt somit eine Zahl k, so daß $d_n^{(0)} = 0$ für $n \geqq k$.

Schluß des Beweises von Satz IV b). Wir haben somit gezeigt, daß aus der Bedingung (31) das Bestehen einer linearen Rekursion

$$u_{n+k} + b_1\,u_{n+k-1} + \cdots + b_k\,u_n = 0$$

für die u_n erfolgt. Betrachten wir, wie im Beweis von Satz IV a), die Potenzreihe

$$f(\zeta) = u_0 + u_1\,\zeta + \cdots + u_n\,\zeta^n + \cdots,$$

so folgt aus der Rekursion, daß $f(\zeta)$ eine rationale Funktion von ζ ist, deren Nenner das Polynom

$$Q(\zeta) = 1 + b_1\,\zeta + \cdots + b_n\,\zeta^k$$

ist. Nach (31) ist $|\varphi_n|$ beschränkt, somit sieht man wie in Satz IV a), daß α eine ganze algebraische Zahl ist, deren Konjugierte $\alpha_2, \ldots, \alpha_s$ den Ungleichungen (24), also $|\alpha_r| \leqq 1$ für $r = 2, \ldots, s$ genügen. Übrigens ist

$$\zeta^k + b_1\zeta^{k-1} + \cdots + b_k = 0$$

eine Gleichung, welche die Zahlen $\alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ als Wurzeln besitzt; hat sie noch andere Wurzeln $\alpha_{s+1}, \ldots, \alpha_l$, so haben wir gesehen, daß es Einheitswurzeln sind. Wie in Satz IV a) gilt dann

$$(39)\qquad u_n = \lambda\,\alpha^n + \lambda_2\,\alpha_2^n + \cdots + \lambda_s\,\alpha_s^n + \lambda_{s+1}\,\alpha_{s+1}^n + \cdots + \lambda_l\,\alpha_l^n,$$

wobei λ eine Zahl des Körpers von α ist. Aus der Bedingung

$$|\psi_n|^2 + |\psi_{n+1}|^2 + \cdots + |\psi_{2n}|^2 \leqq \frac{1}{4\alpha^2} \qquad \text{für } n \geqq m$$

folgt in gleicher Weise, daß

$$(40)\qquad v_n = \mu\,\alpha^n + \mu_2\,\alpha_2^n + \cdots + \mu_s\,\alpha_s^n + \mu_{s+1}\,\alpha'^{\,n}_{s+1} + \cdots + \mu_f\,\alpha'^{\,n}_f,$$

wo auch μ eine Zahl des Körpers von α ist und $\alpha'_{s+1}, \ldots, \alpha'_f$ etwaige vorkommende Einheitswurzeln bedeuten. Der Grenzwert ξ der Brüche $\frac{u_n}{v_n}$ ist also die algebraische Zahl $\frac{\lambda}{\mu}$ des Körpers von α und Satz IV b) ist bewiesen.

Aus den Formeln (39) und (40), die auch im Satz IV a) gelten, sieht man, daß die Näherungsbrüche $\frac{u_n}{v_n}$ nur dann die Eigenschaften A und B nicht besitzen, wenn unter den Zahlen $\alpha_2, \ldots, \alpha_l, \alpha'_{s+1}, \ldots, \alpha'_f$ solche vom Betrag Eins vorkommen; dann wird nämlich $\varepsilon = 0$ und wir können nur behaupten, daß $|\varphi_n|$, $|\psi_n|$ und $|u_n - \xi v_n|$ unter festen Schranken bleiben.

Zum Schluß unserer Betrachtungen wollen wir noch zeigen:

Satz II *ist ein Sonderfall sowohl von Satz* IV a), *wie von Satz* IV b). Wir hatten in Satz II aus der Eigenschaft A auf das Vorhandensein einer Zahl $\delta > 1$ geschlossen, so daß

$$(41) \qquad |\varphi_n| < \frac{C_{30}}{\delta^n} \quad \text{und} \quad |\psi_n| < \frac{C_{31}}{\delta^n}.$$

Betrachten wir zuerst die Voraussetzungen von Satz IV b). Aus (41) folgt, daß die unendlichen Reihen

$$|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2 + \cdots + |\varphi_n|^2 + \cdots \quad \text{und} \quad |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + \cdots + |\psi_n|^2 + \cdots$$

konvergieren. Es gibt also eine Zahl m, so daß für $n \geqq m$

$$|\varphi_n|^2 + |\varphi_{n+1}|^2 + \cdots \leqq \frac{1}{4\alpha^2} \quad \text{und} \quad |\psi_n|^2 + |\psi_{n+1}|^2 + \cdots \leqq \frac{1}{4\alpha^2}.$$

Die Voraussetzungen von Satz IV b) sind folglich erfüllt.

Um Satz IV a) anzuwenden, müssen wir ihn etwas umformen, so daß nur die Indizes $n > m$ in Betracht kommen. Beginnen wir die Folgen u_n und v_n mit $n = m$, so lautet die Bedingung IV b)

$$|\varphi_n| \leqq \frac{1}{2e\alpha(1 + \log|u_m|)} \quad \text{und} \quad |\psi_n| \leqq \frac{1}{2e\alpha(1 + \log|v_m|)} \quad \text{für } n > m.$$

Aus der Eigenschaft A in Satz II folgt aber, wie wir gesehen haben, das Vorhandensein von Konstanten C_{32}, C_{33}, so daß

$$|u_m| < C_{32}\,\alpha^m \quad \text{und} \quad |v_m| < C_{33}\,\alpha^m.$$

Beachten wir noch (41), so sehen wir, daß unsere Bedingung IV b) sicher erfüllt ist, wenn

$$\frac{C_{20}}{\delta^n} \leqq \frac{1}{2e\alpha(1 + \log C_{32} + m\log\alpha)} \quad \text{und} \quad \frac{C_{31}}{\delta^n} \leqq \frac{1}{2e\alpha(1 + \log C_{33} + m\log\alpha)}$$
$$\text{für } n > m.$$

Das ist aber der Fall, wenn m groß genug gewählt ist. Wie in Satz II schließt man noch aus den Ungleichungen (41), daß keine der Zahlen α_r für $r \geqq 2$ den

Betrag Eins haben kann; somit besitzen die Näherungsbrüche $\frac{u_n}{v_n}$ die Eigenschaft B. Unsere Behauptung ist also bewiesen.

Unabhängigkeit der Bedingungen IV a) *und* IV b). Es stellt sich nun die Frage, ob die Bedingungen IV a) und IV b) wirklich voneinander verschieden sind. Gibt es eine Zahl $\theta > 0$, so daß alle φ_n der Ungleichung

$$\theta \leqq |\varphi_n| \leqq \frac{1}{2\,e\,\alpha\,(1+\log|u_0|)} \quad .$$

genügen, so ist die Bedingung IV a) erfüllt, aber nicht die Bedingung IV b). Es müßte also Satz IV b) eine Folge von Satz IV a) sein.

Dies ist aber auch nicht der Fall. Die Bedingung IV b) für φ_n ist z. B. erfüllt, wenn

$$|\varphi_n| < \frac{3}{5\,\alpha\sqrt{n}} \qquad \text{für } n \geqq m_0.$$

Es wird dann nämlich

$$|\varphi_n|^2 + |\varphi_{n+1}|^2 + \cdots + |\varphi_{2n}|^2 < \frac{9}{25\,\alpha^2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}\right).$$

Der Ausdruck $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$ strebt aber mit wachsendem n nach $\log 2 < \frac{25}{36}$; somit wird für genügend große n

$$|\varphi_n|^2 + |\varphi_{n+1}|^2 + \cdots + |\varphi_{2n}|^2 \leqq \frac{9}{25\,\alpha^2}\cdot\frac{25}{36} = \frac{1}{4\,\alpha^2}.$$

Wenn nun eine Folge $|\varphi_n|$ beschränkt ist, so ergibt sich daraus das Vorhandensein einer Konstanten C_{34}, so daß

$$|u_m| > C_{34}\,\alpha^m,$$

somit ist

$$\frac{1}{2\,e\,\alpha\,(1+\log|u_m|)} < \frac{1}{2\,e\,\alpha\,(1+\log C_{34} + m\log\alpha)}.$$

Es gibt aber eine ganze Zahl m_0, so daß für alle $m \geqq m_0$

$$\frac{1}{2\,e\,\alpha\,(1+\log C_{34} + m\log\alpha)} < \frac{3}{5\,\alpha\sqrt{m}}$$

gilt. Genügen nun die φ_n folgenden Ungleichungen

$$|\varphi_n| > \frac{1}{2\,e\,\alpha} \qquad \text{für } n < m_0$$

und

$$\frac{1}{2\,e\,\alpha\,(1+\log C_{34} + n\log\alpha)} < |\varphi_n| < \frac{3}{5\,\alpha\sqrt{n}} \qquad \text{für } n \geqq m_0,$$

so ist die Bedingung IV b) erfüllt, aber die Bedingung IV a) für kein m.

Komplexe algebraische Zahlen. Es ist leicht einzusehen, daß sich diese Überlegungen auch auf komplexe algebraische Zahlen übertragen lassen. Zur bequemeren Übersicht haben wir es vorgezogen, uns zuerst auf die reellen

Zahlen zu beschränken. Wir wollen nun noch einige Bemerkungen zum Fall der komplexen Zahlen machen. Die ganzen Zahlen u_n, v_n werden wir dann sinngemäß einem imaginär-quadratischen Körper $\mathfrak{K}$ entnehmen. Adjungiert man dem Körper $\mathfrak{K}$ die komplexe algebraische Zahl s-ten Grades ξ, so erhält man einen Körper $\mathfrak{K}(\xi)$. Mit der Methode des Hilfssatzes 1 kann man in $\mathfrak{K}(\xi)$ das Vorhandensein von ganzen algebraischen Zahlen α vom Grade s über $\mathfrak{K}$ nachweisen, die mit ihren Konjugierten $\alpha_2, \ldots, \alpha_s$ in bezug auf $\mathfrak{K}$ den Ungleichungen

$$|\alpha| > 1, \quad |\alpha_r| < 1 \qquad \text{für } r = 2, \ldots, s$$

genügen. Daraus ergibt sich der Satz I. Da der BORELsche Satz auch gilt für Potenzreihen, deren Koeffizienten ganze algebraische Zahlen eines imaginär-quadratischen Körpers $\mathfrak{K}$ sind, bleibt auch Satz II bestehen. Ebenso gilt Satz IV b), denn der HADAMARDsche Determinantensatz sowie der Satz von FATOU bleiben auch für komplexe Elemente richtig. Einige Unterschiede gegenüber dem Fall der reellen Zahlen ξ treten in den Sätzen III und IV a) auf. Wird in Satz III die Vorschrift C so beibehalten, daß unter u_{n+1} die zu ϱu_n und unter v_{n+1} die zu ϱv_n am nächsten liegende ganze Zahl des Körpers $\mathfrak{K}$ verstanden wird, so sind die Zahlen ϱ, welche die im Satze geforderten Eigenschaften besitzen durch folgende Ungleichung erklärt:

$$\prod_{r=2}^{s}(1 + |\varrho_r|) \leqq \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{d}+1} & \text{für } d \not\equiv -1 \pmod 4, \\[2ex] \dfrac{4\sqrt{d}}{d+1} & \text{für } d \equiv -1 \pmod 4. \end{cases}$$

Hierbei bezeichnet d die kleinste positive ganze rationale Zahl für die $i\sqrt{d}$ eine erzeugende Zahl von $\mathfrak{K}$ ist. Es gibt somit nur Zahlen ϱ in den Körpern $\mathfrak{K}$ für die $d = 1, 2, 3, 7, 11$ ist, also in denjenigen Körpern $\mathfrak{K}$, in welchen ein Euklidischer Algorithmus existiert[12]). Satz IV a) gilt, wenn wir die oberen Schranken für $|\varphi_n|$ und $|\psi_n|$ des reellen Falles durch die Zahl ω dividieren, die durch $\omega = 4\sqrt{d}$ für $d \not\equiv -1 \pmod 4$ und $\omega = 2\sqrt{d+1}$ für $d \equiv -1 \pmod 4$ erklärt ist.

[12]) DICKSON, Algebren und ihre Zahlentheorie, Zürich 1927, S. 150—152.

(Eingegangen am 31. Dezember 1941.)