Ein neues Verfahren der schrittweisen Näherungen zur Lösung von $y' = f(x, y)$.

Von

W. Quade in Karlsruhe.

Das PICARDsche Verfahren der schrittweisen Näherungen liefert bekanntlich nicht nur einen Existenzbeweis, sondern ist auch zur praktischen Lösung der Differentialgleichung brauchbar[1]). Die bei ihm auftretende Funktionenfolge konvergiert sogar mit derselben Güte wie die Reihe der Exponentialfunktion. Unbefriedigend ist jedoch der Umstand, daß man nur ein verhältnismäßig kleines Intervall angeben kann, in welchem die Funktionenfolge konstruierbar ist und gegen die Lösung konvergiert. Nur bei speziellen Klassen von Differentialgleichungen ist es bisher gelungen, größere Konvergenzintervalle anzugeben[2]). Wenn man auch bei der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$, wie sich zeigen wird, durch eine schärfere Abschätzung im PICARDschen Existenzbeweis zu einem Konvergenzintervall gelangen kann, das größer ist als die von E. LINDELÖF angegebenen, so ist damit der eben erwähnte Mißstand immer noch nicht beseitigt. Eine weitere Schwäche des PICARDschen Verfahrens ist darin zu sehen, daß bei ihm die Kurven der aufeinanderfolgenden Näherungsfunktionen weder ausschließlich oberhalb noch ausschließlich unterhalb der Lösungskurve verlaufen; es liefert also, abgesehen von besonderen Klassen von Differentialgleichungen, keine monotonen schrittweisen Näherungen.

Die eben erwähnten Schwächen vermeidet das im folgenden beschriebene neue Verfahren der schrittweisen Näherungen. Es liefert außer einem konstruktiven Existenzbeweis monotone Funktionenfolgen, welche die Lösung entweder von „oben“ oder von „unten“ her annähern und in einem weit größeren Intervall konvergieren als die PICARDschen. Dabei werden keine weitergehenden Voraussetzungen über die rechte Seite der Differentialgleichung benötigt, als zur Führung des PICARDschen Existenzbeweises erforderlich sind (Stetigkeit und Lipschitz-Bedingung).

Bei den bisher vorliegenden Untersuchungen über die Konstruktion monotoner Funktionenfolgen werden über $f(x, y)$ besondere Voraussetzungen

---

[1]) Vgl. z. B. L. BIEBERBACH, Theorie der Differentialgleichungen, 3. Aufl., Berlin 1930, S. 27 oder E. KAMKE, Differentialgleichungen reeller Funktionen, Leipzig 1930, S. 53.

[2] Vgl. hierzu M. MÜLLER, Math. Zeitschr. 41 (1936), S. 163.

gemacht[3]). Das ist auch in der Abhandlung von F. Tóth der Fall, obgleich die dort beschriebenen Funktionenfolgen den hier benutzten nahestehen.

In einer Arbeit von N. W. Adamoff[4]) werden zwar keine Monotonievoraussetzungen über $f(x, y)$ gemacht, aber die dort benutzten Funktionenfolgen sind nicht, wie in der Arbeit behauptet wird, immer monoton.

Das neue Verfahren gründet sich auf die Methode der Ober- und Unterfunktionen, eine Methode[5]), welche schon O. Perron[6]) zur Führung eines Existenzbeweises benutzt hat.

Kurz das Wichtigste aus dem Inhalt der folgenden Untersuchungen. Aus einer schärferen Abschätzung des Unterschiedes zwischen Näherungsfunktion und Lösung wird ein neues Konvergenzintervall für das Picardsche Verfahren gewonnen. Nach einer kurzen Einführung in die Begriffe Ober- und Unterfunktion werden einige Verfahren zur Konstruktion solcher Funktionen beschrieben. Anschließend werden zwei grundlegende Sätze bewiesen, von denen der erste zeigt, wie man aus einer Ober-(Unter-)funktion eine verbesserte Ober-(Unter-)funktion gewinnen kann. Der zweite enthält eine Konstruktion, die aus einer Ober-(Unter-)funktion eine Unter-(Ober-)funktion erzeugt. Durch wiederholte Anwendung der in diesen beiden Sätzen beschriebenen Prozesse kann man Folgen von Ober- oder von Unterfunktionen konstruieren, oder Folgen, bei denen Ober- und Unterfunktionen abwechseln. Für alle diese Folgen werden Konvergenzintervalle bestimmt, in denen sie gleichmäßig gegen die Lösung konvergieren. An Hand verschiedener Beispiele wird gezeigt, daß einige dieser Folgen ein weit größeres Konvergenzintervall besitzen als die Picardschen. Des weiteren werden verschiedene Verfahren vorgeführt, mit deren Hilfe sich die Lösung durch eine Doppelfolge (diese enthält eine Folge von Ober- und eine solche von Unterfunktionen) einschachteln läßt. Schließlich wird nochmals das Picardsche Verfahren betrachtet und gezeigt, wie man sich auch bei diesem Folgen von Ober- und Unterfunktionen verschaffen und eine Einschachtelung der Lösung vornehmen kann. Am Schluß einige Ergebnisse über die Picardschen Funktionenfolgen, wie sie bei Monotonievoraussetzungen über $f(x, y)$ auftreten.

---

[3]) I. Bendixson, Ofversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1897, S. 605; M. Müller, Math. Zeitschr. **26** (1927), S. 619; Sitzungsber. d. Heidelberger Akad. d. Wiss., Math.-naturw. Klasse, 1927, 9. Abh., S. 31; M. Gayas, Bull. d. Sciences math. (2) **58** (1934), S. 236, vgl. hierzu das Referat von M. Müller, Jahrb. über d. Fortschr. d. Math. $\mathbf{60}_{\mathrm{I}}$ (1934), S. 374; F. Tóth, Mat. fiz. Sap. **48** (1941), S. 176.

[4]) N. W. Adamoff, Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS **18** (1938), S. 219, vgl. hierzu das Referat von M. Müller, Jahrb. über d. Fortschr. d. Math. $\mathbf{64}_{\mathrm{II}}$ (1938), S. 1126.

[5]) Vgl. hierzu M. Müller, Jahresber. d. Deutschen Math. Vereinigung **37** (1928), S. 41.

[6]) O. Perron, Math. Annalen **76** (1915), S. 471.

§ 1.

Verbessertes Konvergenzintervall des Picardschen Verfahrens.

Ausgangspunkt und Grundlage der folgenden Untersuchungen ist das Picardsche Verfahren der schrittweisen Näherungen. Es sei daher kurz an das Ergebnis des Picardschen Existenzbeweises erinnert, das wir hier in seiner einfachsten Form aussprechen.

Ist in der allgemeinen expliziten Differentialgleichung

$$\text{(A)} \qquad y' = f(x, y)$$

die Funktion $f(x, y)$ *in dem rechteckigen Bereich*

$$B: \qquad |x - x_0| \leqq a, \quad |y - y_0| \leqq b \qquad (a > 0,\ b > 0)$$

stetig, und ist für jedes Punktepaar (x, Y), (x, y) *aus* B

$$|f(x, Y) - f(x, y)| \leqq L\,|Y - y|,$$

wo L *eine positive Zahl ist (Lipschitz-Konstante), dann besitzt die Gleichung* (A) *für hinreichend nahe bei* x_0 *gelegene Werte* x *eine und nur eine mit stetiger Ableitung versehene Lösung* $y = y(x)$, *die für* $x = x_0$ *den Wert* y_0 *annimmt.*

E. Lindelöf hat zwei Intervalle angegeben, in denen die Konvergenz des Verfahrens der schrittweisen Näherungen gesichert ist. Das eine ist

$$J: \qquad |x - x_0| \leqq \delta,$$

wobei δ die kleinere der beiden positiven Zahlen a und $\frac{b}{M}$ ist; M ist der Maximalbetrag von $f(x, y)$ in B. Das andere, das größer als J sein kann, ist

$$J': \qquad |x - x_0| \leqq \delta',$$

wobei δ' die kleinere der beiden positiven Zahlen a und $\frac{1}{L}\log\left(1 + \frac{b\,L}{N}\right)$ ist; N ist der Maximalbetrag von $f(x, y_0)$ in B.

Im folgenden wird gezeigt, wie man durch eine schärfere Abschätzung zu einem Konvergenzintervall gelangen kann, das im allgemeinen größer ausfällt als die Intervalle J und J'. Zur Vereinfachung der Darstellung bedienen wir uns, wenn nichts anderes gesagt wird, der folgenden Vereinbarungen und Voraussetzungen:

1. Es werden nur reelle Funktionen reeller Veränderlicher betrachtet.
2. Mit B sei ein konvexer Bereich der x, y-Ebene bezeichnet, in welchem $f(x, y)$ erklärt und stetig ist, sowie in bezug auf y einer Lipschitz-Bedingung genügt; (x_0, y_0), der Punkt, durch welchen die Lösung von $y' = f(x, y)$ hindurchgehen soll, sei ein innerer Punkt von B, ausgenommen den Fall, daß B der rechteckige Bereich

$$x_0 \leqq x \leqq x_0 + a, \quad |y - y_0| \leqq b \qquad (a > 0,\ b > 0)$$

ist, wo (x_0, y_0) Randpunkt ist.

3. Es wird immer angenommen, daß $x \geqq x_0$ ist, da sich die entgegengesetzte Annahme durch die Substitution $x - x_0 = -x'$ auf die erste zurückführen läßt.
4. Unter $u_0(x)$ (gelegentlich auch mit anderer Bezeichnung) werde eine durch (x_0, y_0) gehende, in einem Intervall

   $$I: \qquad x_0 \leqq x \leqq x_0 + a \qquad (a > 0)$$

   erklärte und dort mit beschränkter integrierbarer Ableitung versehene Funktion verstanden; eine solche Funktion $u_0(x)$ nennen wir eine *geeignete Ausgangsfunktion.*
5. Rechter Endpunkt von I ist, wenn nichts anderes gesagt wird, die Abszisse des Punktes, in welchem die Kurve von $u_0(x)$ erstmals den Rand von B trifft (Fig. 1). Außer I wird noch ein Intervall

   $$K: \qquad x_0 \leqq x \leqq x_0 + \delta \qquad (0 < \delta \leqq a)$$

   benötigt, das meist die Rolle des Konvergenzintervalls einer Funktionenfolge spielen wird. I und K sind, wenn nichts anderes gesagt wird, abgeschlossene Intervalle.

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir zum Verfahren der schrittweisen Näherungen nach Picard. Bei diesem konstruiert man von einer in einem Intervall I erklärten geeigneten Ausgangsfunktion $u_0(x)$ ausgehend die Funktionenfolge

$$u_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, u_{n-1}(t)]\, dt \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

und hat dann die Konvergenz der unendlichen Reihe

$$(1) \quad y = u_0 + (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \cdots$$

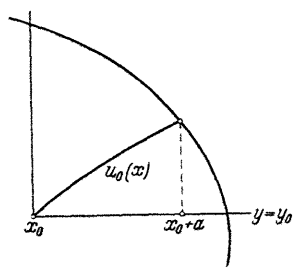

Fig. 1.

nachzuweisen, insbesondere ein Intervall K aufzusuchen, in welchem alle Funktionen u_n existieren. Die übliche Darstellung des aus diesem Verfahren fließenden Existenzbeweises wandeln wir etwas ab, indem wir den Begriff des „Fehlers" oder „Restes" einer Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ einführen.

Sind die Funktionen $y = u(x)$ und $f[x, u(x)]$ in einem Intervall erklärt und existiert dort $u'(x)$, dann nennen wir die Funktion

$$h(x) = u'(x) - f[x, u(x)]$$

den mit $u(x)$ gebildeten Fehler oder Rest der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$.

Aus dieser Erklärung des Fehlers folgt unmittelbar: Ist die Ableitung $u'(x)$ im Definitionsintervall beschränkt und integrierbar, dann gilt das Gleiche auch für den Fehler, vorausgesetzt, daß $f[x, u(x)]$ diese Eigenschaft besitzt, was immer der Fall ist, wenn $f(x, y)$ im Definitionsbereich stetig ist. Fällt $u(x)$ mit einer Lösung von $y' = f(x, y)$ zusammen, dann verschwindet der Fehler identisch in x.

Nun zum Existenzbeweis. Der mit der geeigneten Ausgangsfunktion $u_0(x)$ gebildete Fehler

$$h_0(x) = u_0' - f(x, u_0)$$

ist in I beschränkt und integrierbar, und es ist

$$u_1 - u_0 = -\int_{x_0}^{x} h_0(t)\,dt.$$

Daher

$$|u_1 - u_0| \leqq \int_{x_0}^{x} |h_0(t)|\,dt.$$

Nehmen wir zunächst einmal an, daß es ein Intervall K gibt, in welchem alle u_n existieren, so folgt aus

$$u_2 - u_1 = \int_{x_0}^{x} [f(t, u_1) - f(t, u_0)]\,dt$$

auf Grund der Lipschitz-Bedingung

$$|u_2 - u_1| \leqq L\int_{x_0}^{x} |u_1 - u_0|\,dt \leqq L\int_{x_0}^{x} (x - t)|h_0(t)|\,dt.$$

Allgemein gilt, wie man durch vollständige Induktion bestätigt,

$$|u_n - u_{n-1}| \leqq L^{n-1}\int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}|h_0(t)|\,dt \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Auf diese Weise erhält man die folgende Majorante der Reihe (1)

$$(2)\quad Y(x) = \int_{x_0}^{x} \left[1 + L(x - t) + \frac{L^2 (x-t)^2}{2!} + \cdots\right] |h_0(t)|\,dt$$
$$= \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)}\,|h_0(t)|\,dt.$$

Damit ist die absolute und gleichmäßige Konvergenz der Reihe (1) in K bewiesen. Ihre Summe $\lim_{n\to\infty} u_n(x) = y(x)$ ist eine stetige Funktion, welche in K durch die Folge der u_n gleichmäßig angenähert wird.

Um die Gültigkeit der Entwicklung zu sichern, haben wir noch ein Intervall K aufzusuchen, in welchem alle u_n existieren. Vergleich von (1) und (2) zeigt, daß für jede natürliche Zahl n

$$|u_n - u_0| \leqq Y.$$

Wir betrachten die Kurven der beiden Funktionen $V(x) = u_0 + Y$, $v(x) = u_0 - Y$, die beide durch (x_0, y_0) gehen, sowie den ebenfalls konvexen Bereich B', der aus B hervorgeht, indem man die rechts der Vertikalen $x = x_0 + a$ gelegenen Punkte von B wegläßt (Fig. 2). Da $V(x)$ und $v(x)$, solange sie in B' verlaufen, beschränkte integrierbare Ableitungen besitzen, trifft jede der beiden Kurven den Rand von B' erstmals in einem Punkte. Die kleinere der Abszissen der beiden Punkte ist dann gleich der Abszisse des rechten Endpunktes des Konvergenzintervalls K. Für alle u_n gilt in K

$$u_0 - Y \leqq u_n \leqq u_0 + Y.$$

In der üblichen Weise zeigt man nun noch, daß $\lim_{n \to \infty} u_n$ wegen der gleichmäßigen Konvergenz eine Lösung von $y' = f(x, y)$ ist, und daß dies, da $f(x, y)$ einer Lipschitz-Bedingung genügt, die einzige Lösung ist, welche die Differentialgleichung durch den Punkt (x_0, y_0) schickt. Damit ist der folgende Satz bewiesen:

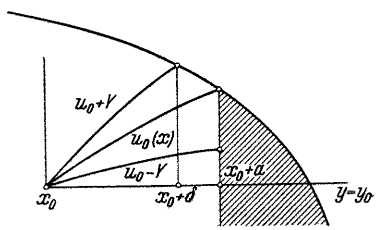

Fig. 2.

Satz 1. *Bildet man mit einer durch den Punkt (x_0, y_0) gehenden, in einem Intervall I erklärten, geeigneten Ausgangsfunktion $u_0(x)$ den Fehler*

$$h_0(x) = u_0' - f(x, u_0)$$

der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ und mit diesem das Integral

$$Y = \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} |h_0(t)|\, dt,$$

dann gibt es immer ein Intervall K, in welchem die Funktionen $u_0 + Y$ und $u_0 - Y$ existieren und in diesem existiert für die nach Picard *konstruierte Funktionenfolge*

$$u_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, u_{n-1})\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

gleichmäßig $\lim_{n \to \infty} u_n(x) = y(x)$; diese Funktion stellt die einzige Lösung dar, welche die Differentialgleichung durch den Punkt (x_0, y_0) schickt.

Das für die Bestimmung des Konvergenzintervalls maßgebende Integral Y kann man dadurch beliebig klein machen, daß man eine hinreichend nahe bei der Lösung y verlaufende Ausgangsfunktion $u_0(x)$ nimmt. Daraus folgt, daß beim Picardschen Verfahren *die Länge des Konvergenzintervalls von der Güte der Annäherung abhängt, mit welcher die Ausgangsfunktion die Lösung approximiert,* und bei günstiger Ausgangsfunktion das Konvergenzintervall K größer ausfallen wird als die eingangs erwähnten Intervalle J und J'.

Ist der Bereich B rechteckig,

$$B: \qquad x_0 \leqq x \leqq x_0 + a, \quad |y - y_0| \leqq b \qquad (a > 0,\ b > 0),$$

und geht man bei der Bestimmung des Konvergenzintervalls von der besonderen Ausgangsfunktion $u_0(x) = y_0$ aus, dann ist der Fehler $h_0(x) = -f(x, y_0)$ und

$$Y = \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} |f(t, y_0)| \, dt.$$

Ist N der Maximalbetrag von $f(x, y_0)$ in B, dann gilt

$$Y \leqq \frac{N}{L} [e^{L(x-x_0)} - 1].$$

Ersetzt man bei der Bestimmung des Konvergenzintervalls Y durch die rechte Seite, so kommt man gerade auf das von E. Lindelöf angegebene Konvergenzintervall J'. Die Lindelöfsche Intervallbestimmung erweist sich somit als ein Sonderfall des hier beschriebenen allgemeineren Verfahrens.

Beispiel 1. Die durch den Anfangspunkt gehende Lösung der Riccatischen Gleichung $y' = x - y^2$ soll für hinreichend kleines positives x im Verfahren der schrittweisen Näherungen ermittelt werden. Als Bereich, in welchem die rechte Seite die Voraussetzungen des Picardschen Existenzbeweises erfüllt, nehmen wir den rechteckigen B: $0 \leqq x \leqq 2$, $|y| \leqq 1$. In B ist dann $L = 2$. Mit $M = 2$, dem Maximalbetrag von $f(x, y)$ in B, ergibt sich das Konvergenzintervall J: $0 \leqq x \leqq 0{,}5$; dagegen mit $L = 2$ und $N = 2$ das Intervall J': $0 \leqq x \leqq 0{,}34$, das hier kleiner als J ist.

Ein größeres Intervall liefert das eben beschriebene Verfahren. Mit der Ausgangsfunktion $u_0(x) = 0$ wird der Fehler $h_0(x) = -x$ und

$$Y = \int_0^x e^{2(x-t)} t \, dt = \tfrac{1}{4} (e^{2x} - 1 - 2x).$$

Der rechte Endpunkt von K ist derjenige Wert von x, für den Y erstmals den Wert 1 annimmt. Man findet so das Intervall

$$K: \qquad 0 \leqq x \leqq 0{,}97.$$

Auf ein noch größeres Intervall kommt man, wenn man von der die Lösung besser annähernden Funktion $u_0(x) = \frac{1}{2} x^2$ ausgeht. Man hat dann den Fehler $h_0(x) = \frac{x^4}{4}$ und

$$Y = \int_0^x e^{2(x-t)} \frac{t^4}{4} \, dt.$$

Von den beiden Funktionen $V(x) = \frac{1}{2} x^2 + Y$, $v(x) = \frac{1}{2} x^2 - Y$ erreicht V den Wert 1 für $x = 1{,}2$, während v für $0 \leqq x \leqq 1{,}2$ in B bleibt. Somit konvergiert das Picardsche Verfahren, wenn man von der Ausgangsfunktion $u_0(x) = \frac{1}{2} x^2$ ausgeht, im Intervall

$$K': \qquad 0 \leqq x \leqq 1{,}2.$$

§ 2.

Ober- und Unterfunktionen.

Beim Picardschen Verfahren der schrittweisen Näherungen kann man sich, wie wir gesehen haben, nur für ein kleineres Intervall der Konvergenz des Verfahrens versichern. Im folgenden wird ein neues Verfahren der schrittweisen Näherungen entwickelt, das ein ausgedehnteres Konvergenzintervall als das Picardsche besitzt und außerdem monotone Näherungen liefert. Es gründet sich auf die Begriffe Ober- und Unterfunktion einer Differentialgleichung, die schon O. Perron zur Führung eines Existenzbeweises für $y' = f(x, y)$ benutzt hat[7]). Bei der Bedeutung dieser Begriffe möge eine kurze Einführung in dieselben vorangeschickt werden, wobei die Perronschen Definitionen etwas abgeändert werden, um sie den Erfordernissen der folgenden Untersuchungen anzupassen[8]).

Erklärung. *Ist in den beiden Differentialgleichungen*

$$y' = f(x, y), \quad y' = F(x, y),$$

in der Umgebung des Punktes (x_0, y_0) *stets* $F(x, y) \geqq f(x, y)$ — *die Identität sei ausgeschlossen — und besitzt* $y' = F(x, y)$ *eine durch den Punkt* (x_0, y_0) *gehende, in einem Intervall* I *existierende Lösung, welche in* I *keine der durch* (x_0, y_0) *gehenden Lösungen von* $y' = f(x, y)$ *unter-(über-)schreitet, dann sagen wir, diese Lösung von* $y' = F(x, y)$ *sei in* I *eine Ober-(Unter-)funktion von* $y' = f(x, y)$.

Einen ersten Anhaltspunkt, unter welchen Bedingungen die Gleichung $y' = F(x, y)$ eine Oberfunktion von $y' = f(x, y)$ liefert, gibt der folgende

Hilfssatz. *Genügen die beiden in der Umgebung des Punktes* (x_0, y_0) *erklärten Funktionen* $f(x, y)$ *und* $F(x, y)$ *dort der Ungleichung* $f(x, y) < F(x, y)$, *und besitzt jede der beiden Differentialgleichungen* $y' = f(x, y)$ *und* $y' = F(x, y)$ *eine durch den Punkt* (x_0, y_0) *gehende in einem Intervall* I: $x_0 \leqq x \leqq x_0 + a$ $(a > 0)$ *existierende Lösung — diese Lösungen seien* $u(x)$ *und* $U(x)$ — *dann ist im links offenen Intervall* I

$$U(x) > u(x),$$

d. h. Vergrößerung (Verkleinerung) der rechten Seite der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ *führt für* $x > x_0$ *auf eine Ober-(Unter-)funktion, welche für* $x > x_0$ *immer ober-(unter-)halb jeder Lösung von* $y' = f(x, y)$ *verläuft.*

Wegen des Beweises dieses Hilfssatzes sei auf E. Kamke, Differentialgleichungen reeller Funktionen, Leipzig 1930, S. 82 verwiesen.

---

[7]) O. Perron, Math. Annalen **76** (1915), S. 471.

[8]) Vgl. hierzu auch die Darstellung bei E. Kamke, Differentialgleichungen reeller Funktionen, Leipzig 1930, S. 81.

Tritt in der Ungleichung $f < F$ zu dem Ungleichheitszeichen noch das Gleichheitszeichen — der Fall $f(x, y) \equiv F(x, y)$ sei, da er trivial ist, ausgeschlossen —, dann gilt der folgende

Satz 2. *Unterliegen die beiden in dem rechteckigen Bereich*

$$B: \qquad x_0 \leqq x \leqq x_0 + a, \quad |y - y_0| \leqq b \qquad (a > 0,\ b > 0)$$

erklärten stetigen Funktionen $f(x, y)$ *und* $F(x, y)$ *überall in* B *der Bedingung*

$$f(x, y) \leqq F(x, y), \quad (f(x, y) \geqq F(x, y)),$$

und sind $u(x)$ *und* $U(x)$ *durch den Punkt* (x_0, y_0) *gehende im Intervall* I: $x_0 \leqq x \leqq x_0 + a$ *existierende und zwischen* $y_0 - b$ *und* $y_0 + b$ *verlaufende Lösungen der Differentialgleichungen*

$$y' = f(x, y), \quad y' = F(x, y),$$

dann ist, wenn $F(x, y)$ *in* B *einer Lipschitz-Bedingung genügt, in* I *stets*

$$U(x) \geqq u(x), \quad (U(x) \leqq u(x)),$$

d. h. $U(x)$ *ist eine Ober-(Unter-)funktion von* $y' = f(x, y)$. *Dabei wird* $U(x)$ *größer (kleiner) als* $u(x)$, *sobald* $F[x, u(x)]$ *erstmals größer (kleiner) als* $f[x, u(x)]$ *wird und bleibt dann größer (kleiner) als* $u(x)$[9].

Beweis. Wir führen den Beweis nur für den Fall $f \leqq F$ durch. Setzt man in

$$U' - u' = F(x, U) - f(x, u)$$

$U - u = z$, so folgt für z die Differentialgleichung

$$z' = F(x, u + z) - f(x, u);$$

denkt man sich auf der rechten Seite u als Funktion von x eingesetzt, so erhält man schließlich

$$z' = g(x, z).$$

Bringt man nunmehr die Differentialgleichung in die Form

$$z' - g(x, 0) = g(x, z) - g(x, 0),$$

wobei nach Voraussetzung $g(x, 0) \geqq 0$ ist (identisches Verschwinden ausgeschlossen), und nimmt man für den Augenblick an, daß $z \geqq 0$ ist, dann gilt auf Grund der Lipschitz-Bedingung

$$-Lz \leqq g(x, z) - g(x, 0) \leqq Lz,$$

[9]) Vgl. hierzu E. Kamke, Differentialgleichungen reeller Funktionen, Leipzig 1930, S. 91. Der eben ausgesprochene Satz folgt aus dem dort angegebenen allgemeineren Satz 5; jedoch kann infolge schärferer Voraussetzungen der Beweis des ersteren mit einfacheren Hilfsmitteln erbracht werden als der des letzteren.

also auch

$$-Lz \leqq z' - g(x, 0) \leqq Lz,$$

oder

$$z' + Lz \geqq g(x, 0), \qquad z' - Lz \leqq g(x, 0).$$

Nach der ersten der Ungleichungen genügt z einer linearen Differentialgleichung

$$z' + Lz = \varphi(x),$$

in welcher $\varphi(x) \geqq g(x, 0)$ ist. Die für $x = x_0$ verschwindende Lösung dieser Gleichung ist

$$z = \int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)} \varphi(t)\, dt \geqq \int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)} g(t, 0)\, dt.$$

In entsprechender Weise ergibt sich aus der zweiten Ungleichung

$$z \leqq \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} g(t, 0)\, dt.$$

Daraus entnimmt man, daß $z(x)$ positiv wird, sobald $g(x, 0)$ positiv wird, und dann positiv bleibt, w. z. b. w.

Gibt man sich in Umkehrung des bisherigen Vorgehens eine in der Umgebung von $x = x_0$ mit beschränkter integrierbarer Ableitung versehene Funktion $u(x)$ vor, die für $x = x_0$ den Wert y_0 annimmt, dann kann man sich die Frage vorlegen, ob diese Funktion eine Ober- oder Unterfunktion von $y' = f(x, y)$ ist. Um dies zu entscheiden, hat man den Fehler

$$h(x) = u'(x) - f[x, u(x)]$$

zu bilden[10]. Sofern dieser existiert und für $x \geqq x_0$ stets positiv ist, ist $u(x)$ dort nach dem Hilfssatz eine Oberfunktion von $y' = f(x, y)$. Dies bestätigt man, indem man schreibt

$$u' = f(x, u) + h(x).$$

So ist beispielsweise die Funktion $u(x) = y_0$ eine Ober- oder Unterfunktion von $y' = f(x, y)$, je nachdem ob $f(x, y_0)$ für $x \geqq x_0$ negativ oder positiv ist, denn der mit $u(x) = y_0$ gebildete Fehler ist $h = -f(x, y_0)$[11].

Sind $u'(x)$ und $f(x, y)$ stetig und genügt $f(x, y)$ außerdem einer Lipschitz-Bedingung, so ist $u(x)$ für $x \geqq x_0$ nach Satz 2 Oberfunktion von $y' = f(x, y)$, wenn dort der nicht identisch verschwindende Fehler $h(x) \geqq 0$ ist.

---

[10]) Es sei hier darauf hingewiesen, daß nicht jede Funktion $U(x)$, welche im links offenen Intervall I der Ungleichung $U > y$ genügt, eine Oberfunktion von $y' = f(x, y)$ im Sinne der oben abgegebenen Erklärung ist. Auch braucht die Ableitung einer Oberfunktion $U(x)$ nicht im ganzen Intervall größer zu sein als die einer Lösung $y'(x)$.

[11]) M. Gayas, Bull. d. Sciences math. (2) **58** (1934), S. 236 und M. Müller, Jahrb. über d. Fortschr. d. Math. **60**$_{\mathrm{I}}$ (1934), S. 374.

§ 3.

Einige Verfahren zur Konstruktion von Ober- und Unterfunktionen.

Im Anschluß an die eben bewiesenen Sätze werden im folgenden einige Verfahren beschrieben, mit deren Hilfe sich Ober- und Unterfunktionen konstruieren lassen.

1. Sowohl der Hilfssatz als auch Satz 2 des vorhergehenden Paragraphen liefern jeder eine Konstruktion einer Ober-(Unter-)funktion von $y' = f(x, y)$. Man wird dabei $F(x, y)$ so einrichten, daß die Gleichung $y' = F(x, y)$ elementar integrierbar wird.

2. Will man einen Streckenzug konstruieren, der eine Oberfunktion darstellt[12]), so kann man in ähnlicher Weise wie bei der Konstruktion des Euler-Cauchyschen Streckenzuges verfahren. In der Umgebung von (x_0, y_0) sei $f(x, y)$ stetig, und es möge für $x \geqq x_0$ ein Streckenzug konstruiert werden, der eine Oberfunktion darstellt. Hierzu sucht man zunächst einen rechteckigen Bereich B_0: $x_0 \leqq x \leqq x_0 + a$, $|y - y_0| \leqq b$ mit hinreichend kleinem positivem a und b auf (Fig. 3), in welchem $f(x, y)$ stetig ist; M_0 sei der größte Wert von $f(x, y)$ in B_0. Dann stellt nach Satz 2 die Gerade $y = y_0 + M_0(x - x_0)$, solange sie in B_0 verläuft, eine Oberfunktion von $y' = f(x, y)$ dar. Diese Gerade erreiche den Rand von B_0 im Punkte (x_1, y_1). Zur Konstruktion der nächsten Strecke des Streckenzuges suchen wir den größten Wert M_1 von $f(x, y)$ in dem Bereich B_1: $x_1 \leqq x \leqq x_1 + a, |y - y_1| \leqq b$ auf, wobei a und b dieselben Konstanten sein mögen wie bei B_0, und $f(x, y)$ in B_1 als stetig vorausgesetzt wird. Dann liefert die Gerade $y = y_1 + M_1(x - x_1)$, solange sie in B_1 verläuft, eine weitere Strecke des zu konstruierenden Streckenzuges. Indem man in der angegebenen Weise fortfährt, erhält man einen Streckenzug, von dem noch zu zeigen ist, daß er eine Oberfunktion von $y' = f(x, y)$ darstellt. Die Konstruktion läßt sich solange fortsetzen, bis man auf einen Bereich stößt, in welchem $f(x, y)$ nicht mehr überall erklärt oder stetig ist.

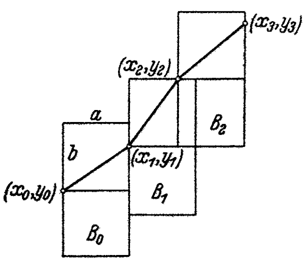

Fig. 3.

Wir zeigen jetzt, daß die durch den Streckenzug dargestellte Funktion $U(x)$ keine Lösung $u(x)$ von $y' = f(x, y)$ unterschreiten kann. Zunächst

[12]) Hierbei wird also zugelassen, daß die Oberfunktion eine stückweise differentiierbare Funktion ist. Die hier beschriebene Konstruktion ist gegenüber der Perronschen [O. Perron, Math. Annalen 76 (1915), S. 472/473] insofern verschärft, als in der Definitionsgleichung $D_{\pm y} > f(x, y)$ zu dem Ungleichheitszeichen noch das Gleichheitszeichen hinzugefügt ist.

folgt für das Intervall $x_0 \leqq x \leqq x_1$ nach Satz 2, da $U(x)$ der Gleichung $U'(x) = M_0$ genügt, daß $U(x)$ dort keine Lösung $u(x)$ von $y' = f(x, y)$ unterschreitet. Weiter lehrt Satz 2, daß $U(x)$ beginnt größer als $u(x)$ zu werden, und es dann auch bleibt, sobald $f[x, u(x)] < M_0$ wird. Unter dieser Voraussetzung ist dann $U(x_1) > u(x_1)$. Wir nehmen nun an, daß es im Intervall $x_1 < x \leqq x_2$ eine Abszisse X gibt, für welche $u(x)$ erstmals wieder $U(x)$ erreicht, und zeigen, daß diese Annahme auf einen Widerspruch führt. Es wäre dann für hinreichend nahe bei X liegendes x

$$U(x) - u(x) = \int_X^x [M_1 - f(t, u)]\, dt.$$

Für $x < X$ würde dann, da der Integrand nicht negativ ist, folgen

$$U(x) \leqq u(x),$$

was unserer Annahme widerspricht, daß $u(x)$ für $x = X$ erstmals wieder $U(x)$ erreichen soll. Ist entgegen der eben gemachten Voraussetzung im Intervall $x_0 \leqq x \leqq x_1$ stets $f[x, u(x)] = M_0$, so ist dort $U(x) = u(x)$, und man kann dann dieselben Schlüsse anwenden, indem man jetzt vom Punkt (x_1, y_1) ausgeht. Damit ist gezeigt, daß $U(x) \geqq u(x)$ ist.

In entsprechender Weise kann man einen Streckenzug konstruieren, der eine Unterfunktion darstellt. Man hat dabei in jedem Bereich B_i jeweils M_i durch m_i zu ersetzen, wo m_i der kleinste Wert ist, den $f(x, y)$ in B_i annimmt.

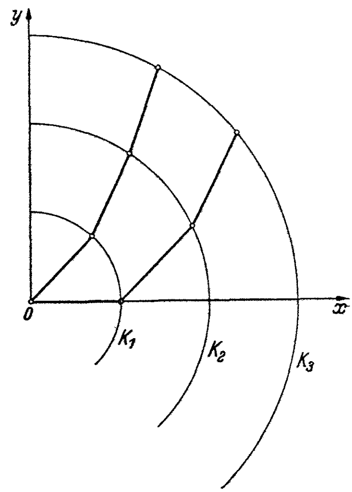

Fig. 4.

Bei der eben beschriebenen Konstruktion haben wir der Einfachheit halber angenommen, daß die Bereiche B_i rechteckig und alle von gleicher Größe sind. Die Konstruktion läßt sich aber auch durchführen, wenn man an Stelle der rechteckigen Bereiche geeignete konvexe nimmt, die von verschiedener Gestalt und Größe sein können.

Besonders einfach gestaltet sich die Konstruktion eines solchen Streckenzuges, wenn man in der Umgebung von (x_0, y_0), in welcher $f(x, y)$ stetig ist, ein Isoklinenfeld, d. h. die Schar der Kurven $f(x, y) =$ konst. zeichnen kann.

Will man beispielsweise eine Ober- und eine Unterfunktion der durch den Anfangspunkt gehenden Lösung von $y' = r = |\sqrt{x^2 + y^2}|$ bestimmen, so hat man als Isoklinen Kreise mit dem Anfangspunkt als Mittelpunkt (Fig. 4.) Zeichnet man die Kreise $K_1, K_2, \ldots$ mit den Radien $r = 1, 2, \ldots$, so hat man bei der Konstruktion der Oberfunktion im Innern von K_1 eine Gerade durch den Anfangspunkt mit der Steigung 1 zu zeichnen, anschließend zwischen K_1 und K_2 eine Gerade mit der Steigung 2 usw.; bei der Konstruktion der Unterfunktion in K_1 eine Gerade durch den Anfangspunkt mit der Steigung 0, anschließend zwischen K_1 und K_2 eine Gerade mit der Steigung 1 usw. Man erhält so zwei stetige Streckenzüge, von denen der eine Ober-, der andere eine Unterfunktion von $y' = r$ darstellt.

3. Eine weitere Konstruktion schließt sich an die Konvergenzuntersuchungen des § 1 an. Die dort eingeführten Funktionen

$$V(x) = u_0 + Y, \quad v(x) = u_0 - Y$$

stellen nämlich eine Ober- und eine Unterfunktion von $y' = f(x, y)$ dar. Um dies zu bestätigen, stellen wir das Vorzeichen des Fehlers fest. Er ist bei $V(x)$

$$V' - f(x, V) = u_0' + Y' - f(x, u_0 + Y).$$

Nach (2) ist $Y' = |h_0| + LY$, und damit schreibt sich der Fehler

$$h_0 + |h_0| + LY + f(x, u_0) - f(x, u_0 + Y).$$

Solange V in B bleibt, folgt daraus auf Grund der Lipschitz-Bedingung, daß der Fehler $\geqq h_0 + |h_0|$ ist und somit niemals negativ sein kann. Aus den Darlegungen des § 1 folgt unmittelbar, daß V für $x > x_0$ die Lösung y nicht unterschreiten kann und somit Oberfunktion von $y' = f(x, y)$ ist[13]).

In entsprechender Weise zeigt man, daß v eine Unterfunktion dieser Gleichung ist.

Setzt man beispielsweise $u_0(x) = y_0$, so hat man in

$$V = y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} |f(t, y_0)| \, dt,$$

$$v = y_0 - \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} |f(t, y_0)| \, dt,$$

eine Ober- und eine Unterfunktion von $y' = f(x, y)$.

§ 4.

Konstruktion einer verbesserten Ober-(Unter-)funktion aus einer Ober-(Unter-)funktion.

Wir haben eben einige Verfahren beschrieben, welche bei der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ die Konstruktion von Ober- und Unterfunktionen

[13]) Das in Satz 2 gegebene Kriterium reicht nicht aus, um dies zu entscheiden, da die rechte Seite der Differentialgleichung, der V genügt, bei stetigem $f(x, y)$ nur beschränkt und integrierbar, also im allgemeinen nicht stetig ist.

leisten. Damit hat man einen ersten groben Anhalt über den Verlauf der Lösung, denn Ober- und Unterfunktion stellen zwei Schranken dar, außerhalb welcher keine Lösung von $y' = f(x, y)$ verläuft. Wir zeigen nun, wie man diese Schranken verbessern kann, d. h. aus einer Ober-(Unter-)funktion eine Ober-(Unter-)funktion gewinnen kann, welche die Lösung besser annähert als diejenige, von welcher man ausgegangen ist. Das im folgenden beschriebene Verfahren zur Konstruktion verbesserter Ober-(Unter-)funktionen bildet die Grundlage einer Methode zur Gewinnung von Folgen von Ober-(Unter-)funktionen, die gegen die Lösung konvergieren. Kennzeichnend für dieses Verfahren ist, daß es die zur Führung des Picardschen Existenzbeweises notwendige Lipschitz-Bedingung in stärkerem Maße ausnutzt, als dies beim Picardschen Verfahren der schrittweisen Näherungen geschieht.

Wir beweisen zunächst einen Satz, der zeigt, wie man aus einer Ober-(Unter-)funktion eine verbesserte Ober-(Unter-)funktion gewinnen kann.

Satz 3. *Ist $u(x)$ eine durch den Punkt (x_0, y_0) gehende, in einem Intervall I erklärte, geeignete Ausgangsfunktion, und ist der mit $u(x)$ gebildete Fehler*

$$h(x) = u'(x) - f[x, u(x)]$$

der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ dort nicht negativ (positiv), dann gibt es ein Intervall K, in welchem $u(x)$ Ober-(Unter-)funktion von $y' = f(x, y)$ ist, und die mit dem Fehler $h(x)$ konstruierte Funktion

$$v = u - \int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)} h(t)\, dt$$

eine verbesserte Ober-(Unter-)funktion von $y' = f(x, y)$ darstellt. Der rechte Endpunkt von K ist gleich der Abszisse des Punktes, in welchem die Kurve von v erstmals den Rand von B trifft.

Beweis. Ist $u(x)$ eine im Sinne der Vereinbarungen des § 1 geeignete Ausgangsfunktion, deren Fehler sein Vorzeichen nicht wechselt, und sieht man eine solche Funktion als Näherungslösung von (A) an und setzt dementsprechend $y = u + z$, so genügt z der Differentialgleichung

$$z' = f(x, u + z) - f(x, u) - h(x). \tag{3}$$

Damit ist die Bestimmung der Lösung y von (A) auf die der für $x = x_0$ verschwindenden Lösung z von (3) zurückgeführt.

An Stelle der Gleichung (3) betrachten wir die bei Einführung der Lipschitz-Bedingung aus (3) hervorgehende lineare Gleichung

$$Z' = -LZ - h. \tag{4}$$

Ihre an der Stelle $x = x_0$ verschwindende Lösung ist

$$Z = -\int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)} h(t)\, dt.$$

Ist $h \geqq 0$, dann ist für $x \geqq x_0$ immer $Z \leqq 0$, und die Funktion

$$v = u + Z = u - \int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)} h(t)\, dt \tag{5}$$

übertrifft daher in einem Intervall K die Funktion u nicht. Existiert v im Intervall I, dann ist der rechte Endpunkt von K gleich $x_0 + a$. Im anderen Fall trifft die Kurve von v den Rand von B erstmals in einem Punkte, dessen Abszisse kleiner als $x_0 + a$ ist. Diese Abszisse ist dann der rechte Endpunkt von K (Fig. 5). Der mit v gebildete Fehler von (A) ist aber

$$f(x, u) - f(x, v) + L(u - v)$$

und somit in K stetig und niemals negativ. Da die Funktion v demnach der Differentialgleichung

$$v' = -Lv + f(x, u) + Lu$$

genügt, deren rechte Seite stetig ist und eine Lipschitz-Konstante besitzt, stellt v nach Satz 2 eine Oberfunktion von (A) dar. Da v außerdem, wie wir

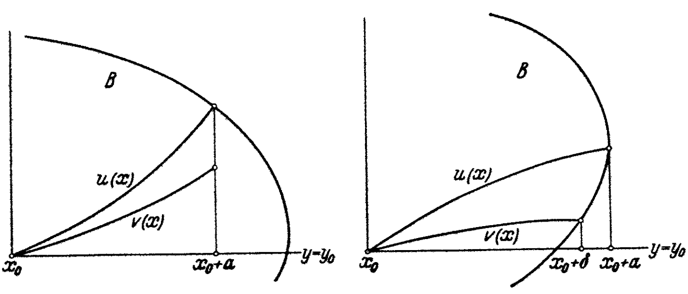

Fig. 5.

eben gesehen haben, die Funktion u nicht überschreitet, ist gleichzeitig bewiesen, daß u ebenfalls eine Oberfunktion von (A) ist. Formel (5) setzt uns somit instand, aus einer gegebenen Oberfunktion eine verbesserte zu konstruieren.

Ist entgegen der eben gemachten Annahme $h \leqq 0$, dann ist $Z \geqq 0$ und die Funktion v stellt in einem Intervall K eine Unterfunktion von (A) dar, welche dort die Funktion u nicht unterschreitet. Daraus folgt, daß u ebenfalls eine Unterfunktion von (A) ist. Formel (5) leistet somit in diesem Fall die Konstruktion einer verbesserten Unterfunktion.

Der eben bewiesene Satz lehrt insbesondere, daß eine geeignete Ausgangsfunktion $u(x)$ mit einem Fehler $h \geqq 0$ ($h \leqq 0$) unter den über $f(x, y)$ gemachten Voraussetzungen immer eine Ober-(Unter-)funktion von $y' = f(x, y)$ ist. Da der Fehler h nach Voraussetzung nur beschränkt und integrierbar ist und der Hilfssatz und Satz 2 infolgedessen nicht zu entscheiden gestatten, ob

$u(x)$ eine Ober-(Unter-)funktion ist, muß diese Eigenschaft von $u(x)$ hier nachgewiesen werden.

Wir betrachten nochmals die Gleichung (3). Außer durch (4) kann man auch durch die folgende Gleichung (6) zum Ausdruck bringen, daß $f(x, y)$ einer Lipschitz-Bedingung genügt.

$$Z' = LZ - h. \tag{6}$$

Ihre an der Stelle $x = x_0$ verschwindende Lösung ist

$$Z = -\int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)}\, h(t)\, dt.$$

Ist der mit $u(x)$ gebildete Fehler $h \geqq 0$, dann ist $Z \leqq 0$; die Funktion

$$v = u + Z = u - \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)}\, h(t)\, dt \tag{7}$$

stellt dann aber nach Satz 2 in einem Intervall K eine Unterfunktion von (A) dar, denn der mit v gebildete Fehler ist

$$f(x, u) - f(x, v) - L(u - v),$$

also stetig und niemals positiv. Ist dagegen $h \leqq 0$, dann stellt die nach (7) gebildete Funktion v eine Oberfunktion von (A) dar, welche die Lösung dieser Gleichung nicht unterschreitet. Damit ist der folgende Satz, ein Gegenstück zu Satz 3, bewiesen.

Satz 4. *Ist $u(x)$ eine Ausgangsfunktion mit den in Satz 3 geforderten Eigenschaften, dann gibt es ein Intervall K, in welchem die mit dem Fehler $h(x)$ konstruierte Funktion*

$$v = u - \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)}\, h(t)\, dt$$

eine Unter-(Ober-)funktion von $y' = f(x, y)$ darstellt. Der rechte Endpunkt von K ist gleich der Abszisse des Punktes, in welchem die Kurve von v erstmals den Rand von B trifft.

Der erste der beiden eben bewiesenen Sätze zeigt, wie man aus einer gegebenen Ober-(Unter-)funktion eine verbesserte Ober-(Unter-)funktion gewinnen kann, der zweite, wie man aus einer gegebenen Ober-(Unter-)funktion eine Unter-(Ober-)funktion konstruieren kann. Die in diesen beiden Sätzen geschilderte Erzeugungsweise von Ober- und Unterfunktionen bildet die Grundlage der im folgenden beschriebenen Verfahren der schrittweisen Näherungen.

Mit Hilfe der im letzten Satz beschriebenen Konstruktion ist man in der Lage, die durch den Punkt (x_0, y_0) gehende Lösung y von (A) in Schranken einzuschließen. Ist beispielsweise $u(x)$ eine in I existierende, geeignete Unterfunktion von $y' = f(x, y)$, und h der mit ihr gebildete Fehler, dann gilt in K

$$u \leqq y \leqq u - \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} h(t)\, dt.$$

Der Unterschied zwischen Ober- und Unterfunktion ist

$$-\int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} h(t)\, dt.$$

Man sieht, wie die Schranken, in welche die Lösung eingeschlossen ist, um so näher beieinander liegen, je kleiner der Betrag des Fehlers ist.

Bemerkung. Wir kommen hier nochmals auf den in § 1 gegebenen Konvergenzbeweis für das Picardsche Verfahren zurück. Nimmt man dort als Ausgangsfunktion eine geeignete Ober-(Unter-)funktion, dann erhält man als Majorante gerade die im letzten Satz konstruierte Unter-(Ober-)funktion. In der Tat, ist die Ausgangsfunktion $u_0(x)$ eine Unterfunktion, dann ist $h_0 \leqq 0$, und aus $|y - u_0| \leqq Y$ folgt

$$y - u_0 \leqq -\int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} h_0(t)\, dt.$$

Die Funktion

$$u_0 + Y = u_0 - \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} h_0(t)\, dt$$

ist aber genau die Oberfunktion, welche nach Satz 4 aus der Unterfunktion $u_0(x)$ folgt.

Geht man beim Picardschen Verfahren von einer Ober- oder Unterfunktion aus, dann besitzt die nach diesem Verfahren konstruierte nächste Näherung im allgemeinen nicht mehr die Eigenschaft, Ober- oder Unterfunktion zu sein. Das erkennt man schon an dem folgenden Beispiel:

Nimmt man bei der Bestimmung der für $x = 0$ verschwindenden Lösung der Differentialgleichung $y' = \sin y$ die aus $y' = 1$ folgende Oberfunktion $u_0(x) = x$ als Ausgangsfunktion, so erhält man nach Picard als nächste Näherung

$$u_1 = \int_{0}^{x} \sin t\, dt = 1 - \cos x.$$

u_1 ist aber weder Ober- noch Unterfunktion, denn der mit ihr gebildete Fehler ist

$$h_1 = \sin x - \sin(1 - \cos x),$$

und dieser ist, da $h_1\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$ und $h_1(\pi) < 0$, im Intervall $0 \leqq x \leqq \pi$ nicht von einerlei Vorzeichen.

Daß das Picardsche Verfahren bei geeigneten Monotonievoraussetzungen über $f(x, y)$ eine Folge von Ober- oder Unterfunktionen liefert, ist bekannt; wir werden weiter unten in § 9 darauf zu sprechen kommen.

§ 5.

Annäherung der Lösung durch eine Folge von Oberfunktionen.

Die mit der oben beschriebenen Konstruktion gegebene Möglichkeit, aus einer Oberfunktion eine verbesserte zu gewinnen, legt den Gedanken nahe, durch fortgesetzte Verbesserung aus einer Oberfunktion eine Folge von Oberfunktionen zu erzeugen, und so die Lösung durch eine Folge solcher Funktionen anzunähern. Von einer solchen Folge hat man dann zu zeigen, daß sie gegen die Lösung der Differentialgleichung konvergiert. Damit hat man ein neues Verfahren der schrittweisen Näherungen, das gegenüber dem Picardschen den Vorteil hat, daß der Unterschied zwischen Näherungsfunktion und Lösung stets von einerlei Vorzeichen ist. Außerdem zeigt sich bei diesem Verfahren, daß es in einem weit größeren Intervall konvergiert als das Picardsche.

In einem konvexen Bereich B erfülle $f(x, y)$ die in Satz 3 formulierten Voraussetzungen, und es sei $u_0(x)$ eine Oberfunktion von $y' = f(x, y)$ mit den dort geforderten Eigenschaften. Aus $u_0(x)$ konstruieren wir eine Folge von Oberfunktionen.

Da u_0 Oberfunktion ist, ist der Fehler

$$h_0(x) = u_0'(x) - f[x, u_0(x)]$$

in I niemals negativ. Nach Satz 3 gewinnt man aus u_0 die verbesserte Oberfunktion

$$u_1(x) = u_0 - \int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)}\, h_0(t)\, dt.$$

Sofern es ein Intervall gibt, in welchem diese existiert, folgt aus dem mit ihr gebildeten Fehler

$$h_1 = u_1' - f(x, u_1)$$

eine weitere wiederum verbesserte Oberfunktion u_2.

$$u_2 = u_1 - \int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)}\, h_1(t)\, dt.$$

Indem man in dieser Weise unbegrenzt fortfährt, erhält man eine unendliche Folge von Oberfunktionen $u_0, u_1, u_2, \ldots$. Allgemein hat man

$$(8) \qquad u_n = u_{n-1} - \int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)} h_{n-1}(t)\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$(9) \qquad h_n = u_n' - f(x, u_n) \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Alle u_n nehmen nach Konstruktion an der Stelle x_0 den Wert y_0 an.

Nehmen wir zunächst einmal an, daß es ein Intervall K gibt, in welchem alle u_n existieren, dann haben wir zu zeigen, daß $\lim\limits_{n \to \infty} u_n$ existiert und die durch den Punkt (x_0, y_0) gehende Lösung von (A) darstellt. Um die Existenz dieses Grenzwertes nachzuweisen, beweisen wir die gleichmäßige Konvergenz der Reihe

$$(10) \qquad y = u_0 + (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \cdots.$$

Indem man die in Klammern gesetzten Differenzen mit Hilfe von (8) ausdrückt und in (10) einsetzt, erhält man

$$(11) \qquad y = u_0 - \int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)} (h_0 + h_1 + h_2 + \cdots)\, dt.$$

Daraus folgt, daß die Reihe (10) gleichmäßig konvergent ist, wenn die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} h_n$ es ist.

Durch Differentiieren von (8) bekommt man

$$u_n' = u_{n-1}' - h_{n-1} + L \int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)} h_{n-1}(t)\, dt,$$

und daraus unter Berücksichtigung von (9)

$$u_n' = f(x, u_{n-1}) + L \int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)} h_{n-1}\, dt.$$

Damit wird der durch (9) definierte Fehler h_n

$$(12) \qquad h_n = f(x, u_{n-1}) - f(x, u_n) + L \int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)} h_{n-1}\, dt.$$

Auf Grund der Lipschitz-Bedingung und vermöge (8) folgt daraus

$$(13) \qquad h_n \leqq 2L \int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)} h_{n-1}\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Nunmehr erklären wir eine Funktionenfolge $H_n(x)$ durch

$$(14)\qquad H_n = 2L\int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)} H_{n-1}\,dt \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

wobei $H_0(x) \equiv h_0(x)$ ist. Dann ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} H_n = S$ eine Majorante der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} h_n$.

Diese Majorante läßt sich in geschlossener Form darstellen. Um dies zu zeigen, leiten wir (14) nach x ab und erhalten so

$$H'_n = 2LH_{n-1} - LH_n.$$

Bei Benutzung des symbolischen Differentialoperators schreibt sich die letzte Gleichung

$$(15)\qquad (D + L)H_n = 2LH_{n-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Aus diesem Gleichungssystem folgt, wie man durch vollständige Induktion bestätigt,

$$(16)\qquad (D + L)^n H_n = (2L)^n H_0 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Eine partikuläre Lösung dieser linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten ist[14])

$$(17)\qquad (2L)^n \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-L(x-t)} H_0(t)\,dt \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Bleibt zu zeigen, daß diese partikuläre Lösung dieselben Anfangsbedingungen erfüllt wie $H_n(x)$. Da die Funktionen $H_1, H_2, \ldots$ alle an der Stelle x_0 verschwinden, schließt man aus dem Gleichungssystem (15), daß H_n diejenige Lösung von (16) ist, die an der Stelle x_0 mitsamt ihren $n-1$ ersten Ableitungen verschwindet. Das sind aber dieselben Anfangsbedingungen, denen die partikuläre Lösung (17) genügt. Somit ist

$$H_n = 2L\int_{x_0}^{x} \frac{[2L(x-t)]^{n-1}}{(n-1)!} e^{-L(x-t)} h_0(t)\,dt \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Ist μ_0 die obere Grenze von $h_0(x)$ im Intervall I, dann zeigt eine leichte Abschätzung, daß

$$H_n \leqq \mu_0 \frac{(2La)^n}{n!}.$$

---

[14]) Vgl. z. B. C. DE LA VALLÉE-POUSSIN, Cours d'Analyse Infinitésimale, Bd. II, 6. Aufl., Louvain 1928, S. 211; E. KAMKE, Differentialgleichungen reeller Funktionen, Leipzig 1930, S. 257.

Damit ist die absolute und gleichmäßige Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} H_n$ und zugleich die der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} h_n$ bewiesen.

Die Summe der Majorante ist

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} H_n = h_0 + 2L \int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)} \left[1 + \frac{2L(x-t)}{1!} + \ldots\right] h_0(t)\, dt,$$

oder

$$S = h_0 + 2L \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} h_0(t) dt. \tag{18}$$

Um den vorstehenden Konvergenzbeweis durchführen zu können, hatten wir angenommen, daß es ein Intervall K gibt, in welchem alle u_n existieren. Ob dies der Fall ist, kann man in folgender Weise entscheiden. Zunächst ergibt sich aus (11), daß die Funktion

$$v_0 = u_0 - \int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)} S(t)\, dt$$

die Lösung y nicht übertreffen kann. Auf Grund der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} H_n$ folgt durch Summierung der Gleichungen (14)

$$S = h_0 + 2L \int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)} S(t)\, dt. \tag{19}$$

Vergleichen von (18) und (19) zeigt, daß

$$\int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)} S(t)\, dt = \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} h_0(t)\, dt.$$

Damit erhält man

$$v_0 = u_0 - \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} h_0(t)\, dt. \tag{20}$$

Das ist aber gerade die Unterfunktion, welche nach der in Satz 4 beschriebenen Konstruktion aus der Oberfunktion u_0 hervorkommt.

Nimmt man nun für K das in Satz 4 angegebene Intervall, so existieren in diesem alle Oberfunktionen u_n. Allgemeiner kann man an Stelle der durch (20) erklärten Unterfunktion v_0 irgendeine in einem Intervall I': $x_0 \leqq x \leqq x_0 + a'$ erklärte Unterfunktion v nehmen, wobei $x_0 + a'$ die Abszisse des Punktes ist, in welchem die Kurve von v erstmals den Rand von B trifft. Dann ist K das kleinere der beiden Intervalle I und I'. Da in ihm alle u_n existieren, ist es das Konvergenzintervall des Verfahrens.

Um den Beweis vollständig zu machen, haben wir noch zu zeigen, daß $y(x) = \lim_{n \to \infty} u_n(x)$ Lösung von $y' = f(x, y)$ ist. Hierzu setzen wir den Ausdruck

$$y - u_n + \int_{x_0}^{x} [f(t, u_n) - f(t, y)]\, dt + \int_{x_0}^{x} h_n\, dt = r_n(x). \tag{21}$$

Da die Funktionenfolge der u_n mit wachsendem n in K gleichmäßig gegen y und die der h_n dort gleichmäßig gegen Null geht, strebt die der r_n dort gleichmäßig gegen Null. Aus (21) folgt unter Benutzung von (9)

$$y = u_n + \int_{x_0}^{x} f(t, y)\, dt - \int_{x_0}^{x} u_n'\, dt + r_n,$$

oder, da $u_n(x_0) = y_0$ ist,

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y)\, dt + r_n.$$

Da die Folge der r_n mit wachsendem n gleichmäßig in K gegen Null geht, kommt

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y)\, dt,$$

woraus nach Differentiation folgt, daß y Lösung von $y' = f(x, y)$ ist.

In bekannter Weise zeigt man schließlich noch, daß $y' = f(x, y)$, wenn $f(x, y)$ einer Lipschitz-Bedingung genügt, eine und nur eine Lösung durch den Punkt (x_0, y_0) schicken kann.

Damit ist in allen Teilen der folgende Satz bewiesen:

Satz 5. *Es sei $u_0(x)$ eine durch den Punkt (x_0, y_0) gehende, in einem Intervall I existierende, geeignete Oberfunktion der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$. Konstruiert man von u_0 ausgehend die Folge der Oberfunktionen*

$$u_n = u_{n-1} - \int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)} h_{n-1}(t)\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

wobei

$$h_n = u_n' - f[x, u_n(x)] \qquad (n = 0, 1, \ldots),$$

dann gibt es ein Intervall K, in welchem diese mit wachsendem n abnehmende Folge gleichmäßig gegen die durch (x_0, y_0) gehende Lösung der Differentialgleichung konvergiert. Dabei ist der rechte Endpunkt von K gleich der Abszisse des Punktes, in welchem die Kurve der Unterfunktion

$$v_0 = u_0 - \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} h_0\, dt$$

oder sonst einer durch (x_0, y_0) gehenden geeigneten Unterfunktion erstmals den Rand von B trifft.

§ 6.

Annäherung der Lösung durch eine Folge von Unterfunktionen.

Ebenso wie wir eben die Lösung von $y' = f(x, y)$ aus einer Folge von Oberfunktionen gewinnen konnten, kann man sie auch aus einer Folge von Unterfunktionen erzeugen. Man geht hierbei von einer durch den Punkt (x_0, y_0) gehenden in einem Intervall I erklärten geeigneten Unterfunktion $u_0(x)$ aus, und konstruiert aus ihr nach Satz 3 eine verbesserte Unterfunktion u_1.

$$u_1 = u_0 - \int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)} h_0(t)\, dt.$$

Indem man aus u_1 wiederum eine verbesserte Unterfunktion u_2 erzeugt und in dieser Weise unbegrenzt fortfährt, erhält man eine unendliche Folge von Unterfunktionen: $u_0, u_1, u_2, \ldots$. Auch hier ist die Folge der u_n durch die Gleichungen (8) und (9) bestimmt, nur daß jetzt die h_n negativ sind. Dementsprechend wird man der Einfachheit halber in (12) $h_n = -k_n$ setzen und hat dann eine Folge positiver Funktionen k_n, die nach (12) der Ungleichung

$$k_n \leqq 2L \int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)} k_{n-1}(t)\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

genügen. Mit der in § 5 eingeführten Funktionenfolge der H_n folgt als Majorante der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} k_n$

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} H_n = k_0 + 2L \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} k_0(t)\, dt.$$

Daraus ergibt sich die gleichmäßige Konvergenz der Folge der u_n in einem Intervall K nach denselben Überlegungen wie in § 5. Aus der letzten Formel findet man nach (11) die Oberfunktion

$$v_0 = u_0 - \int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)} S(t)\, dt,$$

die in entsprechender Weise wie in § 5 umgeformt lautet

$$v_0 = u_0 - \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} h_0(t)\, dt.$$

Sie ist identisch mit der Oberfunktion, die nach Satz 4 aus der Unterfunktion u_0 hervorkommt. Damit ist der folgende Satz bewiesen, der ein Gegenstück zu dem vorhergehenden darstellt.

Satz 5'. *Es gilt ein dem Satz 5 in allen Stücken entsprechender Satz, den man aus dem ersteren erhält, indem man „Oberfunktion" mit „Unterfunktion" vertauscht und „abnehmende" durch „zunehmende" ersetzt.*

Beispiel 2. Es soll die durch den Anfangspunkt gehende Lösung der Riccatischen Gleichung $y' = x - y^2$ in dem rechteckigen Bereich

$$B: \qquad 0 \leqq x \leqq \sqrt{2}, \quad |y| \leqq 1$$

durch eine Folge von Oberfunktionen angenähert werden. Wir gehen von der aus $u_0' = x$ folgenden Oberfunktion $u_0 = \frac{1}{2} x^2$ aus. Sie erreicht den Wert 1 gerade für $x = \sqrt{2}$. Da $v = 0$ eine Unterfunktion unserer Gleichung ist, und u_0 und v im Intervall I: $0 \leqq x \leqq \sqrt{2}$ existieren, konvergiert nach Satz 5 die Folge der Oberfunktionen $u_0, u_1, u_2, \ldots$ in diesem Intervall gleichmäßig gegen die durch den Anfangspunkt gehende Lösung der Riccatischen Gleichung. Als verbesserte Oberfunktion u_1 erhält man mit $h_0 = \frac{x^4}{4}$

$$u_1 = \frac{1}{2} x^2 - \int_0^x e^{-2(x-t)} \frac{t^4}{4} dt.$$

Wie man sieht, ist das Konvergenzintervall hier ausgedehnter als dasjenige, zu welchem wir oben beim Picardschen Verfahren gelangt sind.

§ 7.

Vergrößerung des Konvergenzintervalls.

Die bisherigen Ergebnisse über die Annäherung der Lösung durch Folgen von Ober- oder Unterfunktionen legen es nahe, sich von der Einschränkung zu befreien, die durch die bisher benutzte Voraussetzung eines konvexen oder gar rechteckigen Bereiches in die Betrachtungen hineingetragen wird. Dabei zeigt sich dann, daß sich bei geeignetem Bereich ein sehr ausgedehntes Konvergenzintervall unseres Verfahrens angeben läßt.

In der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ sei die rechte Seite in einer gewissen Umgebung des Punktes (x_0, y_0) erklärt und stetig, und es existiere in einem Intervall I: $x_0 \leqq x \leqq x_0 + a$ $(a > 0)$ eine durch den Punkt (x_0, y_0) gehende mit beschränkter integrierbarer Ableitung versehene Ober- und eine solche Unterfunktion von (A). Die Oberfunktion $y = U_0(x)$ werde dargestellt durch die Kurve C, die Unterfunktion $y = u_0(x)$ durch die Kurve C'. Zeichnet man dann eine Vertikale S, welche die Abszissenachse im Punkt $x_0 + a$ schneidet, so wird durch die Kurven C und C' und die Gerade S ein Bereich begrenzt. Bereiche solcher oder ähnlicher Art seien im folgenden mit $\mathfrak{B}$ bezeichnet.

Ist in einem solchen Bereich $\mathfrak{B}$ die Funktion $f(x, y)$ stetig und besitzt sie dort eine Lipschitz-Konstante L, dann kann man entweder von der Oberfunktion U_0 ausgehend eine Folge von Oberfunktionen U_n konstruieren, oder von der Unterfunktion u_0 ausgehend eine Folge von Unterfunktionen u_n.

Jede dieser Folgen konvergiert nach Satz 5 oder 5' im Intervall I gleichmäßig gegen die durch (x_0, y_0) gehende Lösung von $y' = f(x, y)$. Daher gilt:

Satz 6. *Besitzt die Differentialgleichung* $y' = f(x, y)$ *eine in einem Intervall* I: $x_0 \leqq x \leqq x_0 + a$ $(a > 0)$ *existierende, geeignete Ober- und eine solche Unterfunktion, die beide durch* (x_0, y_0) *gehen, und erfüllt* $f(x, y)$ *in dem durch die Vertikale* $x = x_0 + a$ *und die Kurven der Ober- und der Unterfunktion begrenzten Bereich* $\mathfrak{B}$ *die geforderten Voraussetzungen, dann existiert die Lösung der Differentialgleichung im Intervall* I, *und die in den Sätzen* 5 *und* 5' *beschriebenen Folgen von Ober- und Unterfunktionen konvergieren in* I *gleichmäßig gegen die durch* (x_0, y_0) *gehende Lösung der Differentialgleichung.*

Ein wichtiger Sonderfall des eben ausgesprochenen Satzes ist der, daß sich das Intervall I ins Unendliche erstreckt. Wenn sich nämlich eine Ober- und eine Unterfunktion angeben lassen, die beide für endliches $x > x_0$ endlich bleiben, und $f(x, y)$ in dem durch die Kurven der Ober- und der Unterfunktion sowie die mit endlichem positivem a konstruierte Vertikale S begrenzten Bereich $\mathfrak{B}$ die Voraussetzungen des Satzes 6 erfüllt, dann konvergiert unser Verfahren für alle endlichen $x > x_0$ gegen die für alle endlichen $x > x_0$ endliche Lösung.

Beispiel 3. Bei der Riccatischen Differentialgleichung $y' = x - y^2$ ist, wenn man die durch den Anfangspunkt gehende Lösung aufsucht, $u_0 = 0$ eine Unterfunktion und $U_0 = \frac{1}{2} x^2$ eine Oberfunktion. Zieht man die Vertikale $x = a$ $(a > 0)$, dann ist in dem damit abgegrenzten Bereich $\mathfrak{B}$ die Lipschitz-Konstante L gleich dem Maximalbetrag von $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$. Da y in $\mathfrak{B}$ den Maximalbetrag $\frac{1}{2} a^2$ besitzt, kann man $L = a^2$ setzen. Somit bleibt L endlich für jeden endlichen Wert von a und unser Verfahren konvergiert in diesem Fall für alle endlichen positiven x und liefert die für diese existierende Lösung der Riccatischen Gleichung[15]).

Im allgemeinen wird man bei einer Differentialgleichung nur ein Konvergenzintervall von endlicher Länge zu erwarten haben. Die Länge dieses Intervalls wird von den Eigenschaften von $f(x, y)$ abhängen, sei es, daß wie bei $y' = 1 + y^2$, also bei regulärem $f(x, y)$, die Lösung in einem Punkte singulär wird, oder daß die Lösung durch einen im Endlichen gelegenen Punkt geht, in welchem $f(x, y)$ nicht mehr regulär ist. Aus der Fülle der Möglichkeiten, die sich hier darbieten, sollen im folgenden einige typische Beispiele gebracht werden, an denen sich die Leistungsfähigkeit des neuen Verfahrens erweisen wird.

1. Die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ besitze eine durch den Punkt (x_0, y_0) gehende in einem rechts offenen Intervall I erklärte mit endlicher

---

[15]) Vgl. hierzu auch O. Perron, Math. Annalen 76 (1915), S. 480.

integrierbarer Ableitung versehene Unterfunktion $u_0(x)$, die für $x \to x_0 + a$ gegen $+\infty$ geht. In dem durch die Halbgerade $x = x_0$, $y \geqq y_0$ und die Kurve der Unterfunktion $u_0(x)$ begrenzten Gebiet G sei $f(x, y)$ stetig und besitze daselbst für endliches y eine endliche Lipschitz-Konstante. Dann kann man einen in I hinreichend nahe bei $x_0 + a$ gelegenen Punkt mit der Abszisse a_0 angeben (Fig. 6), so daß $b = u_0(a_0) - y_0$ einen beliebig großen positiven Wert annimmt. In dem in G gelegenen Bereich $\mathfrak{B}$, der durch die Gerade $y = y_0 + b$ aus G ausgeschnitten wird, läßt sich jetzt eine Folge von Unterfunktionen

$$u_n = u_{n-1} - \int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)} h_{n-1} dt \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

konstruieren. Dabei existiert nach Konstruktion die Unterfunktion u_n in einem Intervall I_n: $x_0 \leqq x \leqq a_n$, wo a_n diejenige Abszisse ist, in welcher u_n erstmals den Wert $y_0 + b$ erreicht. Da $a_{n+1} \leqq a_n$ und die Folge der a_n beschränkt ist, existiert $\lim_{n \to \infty} a_n = x_0 + a'$, wobei $0 < a' \leqq a$ ist, denn der Schnittpunkt der mit $M \geqq f(x, y)$ gebildeten Oberfunktion $y_0 + (x - x_0) M$ mit der Geraden $y = y_0 + b$ besitzt die Abszisse $x_0 + \frac{b}{M} \leqq x_0 + a'$. In dem damit erklärten Intervall existieren alle u_n, und es konvergiert daher die Folge der u_n in diesem Intervall gleichmäßig gegen die Lösung von $y' = f(x, y)$. Diese nimmt an der Stelle $x = x_0 + a'$ den Wert $y_0 + b$ an.

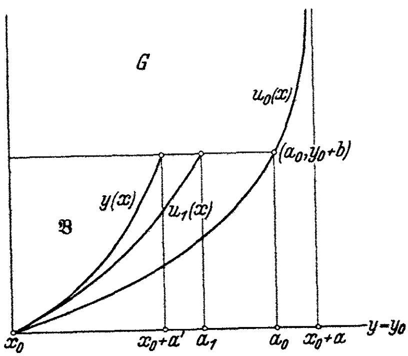

Fig. 6.

Da sich aber a_0 beliebig nahe bei $x_0 + a$ wählen und dadurch b ein beliebig großer positiver Wert erteilen läßt, konvergiert das Verfahren in einem Intervall K: $x_0 \leqq x < x_0 + \delta$, wobei $x_0 + \delta \leqq x_0 + a$ diejenige Abszisse ist, für welche die Lösung gegen $+\infty$ geht.

Besitzt die Differentialgleichung eine Oberfunktion $U_0(x)$, die für $x \to x_0 + a$ gegen $-\infty$ geht, dann kann man in entsprechender Weise eine Folge von Oberfunktionen konstruieren, die gleichmäßig gegen die Lösung konvergiert. *In beiden Fällen reicht das Konvergenzintervall bis zur Abszisse desjenigen Punktes, in welchem die Lösung singulär wird.*

2. Die Differentialgleichung sei von der Form $y' = \frac{1}{\varphi(x, y)}$, wo $\varphi(x, y)$ in der Umgebung von (x_0, y_0) stetig ist, und $\varphi(x_0, y_0) \neq 0$ ist. Geht die durch (x_0, y_0) gehende Lösung dieser Gleichung durch einen Punkt, in welchem $\varphi(x, y)$ verschwindet, dann zeigt die Ableitung der Lösung in diesem Punkt

ein singuläres Verhalten. Für gewöhnlich studiert man die Lösung in der Umgebung eines solchen Punktes, indem man die Gleichung durch Vertauschen der Veränderlichen auf die Form $\frac{dx}{dy} = \varphi(x, y)$ bringt. Wir wollen hier aber zeigen, wie sich die Lösung im neuen Verfahren bis zur singulären Stelle hin konstruieren läßt, wenn man bei der ursprünglichen Form der Gleichung bleibt. Es handelt sich dabei wieder darum, einen möglichst ausgedehnten Bereich $\mathfrak{B}$ zu bestimmen, in welchem die rechte Seite der Differentialgleichung stetig ist und eine Lipschitz-Konstante besitzt. Wie man dabei vorgeht, soll der Einfachheit halber an Hand zweier Beispiele erläutert werden.

Beispiel 4. Es sei $\varphi = 1 - xy$, und es soll die durch den Anfangspunkt gehende Lösung von $y' = \frac{1}{\varphi}$ durch schrittweise Näherungen ermittelt werden[16]). φ verschwindet auf einer Kurve C, der gleichseitigen Hyperbel $xy = 1$ (Fig. 7). Außer C benötigen wir eine Kurve C', die durch $\varphi = \varepsilon$ gegeben ist, wobei ε eine hinreichend kleine positive Zahl ist. C' ist ebenfalls eine gleichseitige Hyperbel. Eine Unterfunktion von $y' = \frac{1}{\varphi}$ ist $u_0(x) = x$, ihre Kurve schneidet C' im Punkte Q_0. Eine Oberfunktion ergibt sich aus der exakten Differentialgleichung

$$y' = \frac{1 + \frac{1}{2} y^2}{1 - xy}.$$

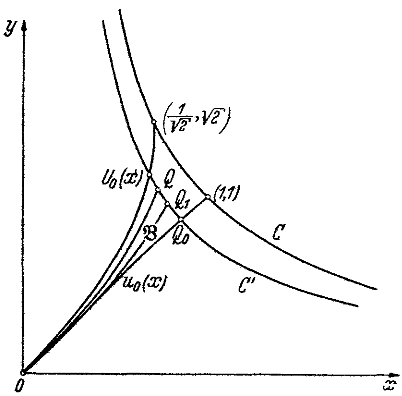

Fig. 7.

Die durch den Anfangspunkt gehende Lösung dieser Gleichung ist durch

$$x = \frac{2\,U_0}{2 + U_0^2}$$

gegeben. Diese Oberfunktion schneidet die Kurve C im Punkte $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right)$.

In dem durch C' sowie die Kurven der Ober- und der Unterfunktion begrenzten Bereich $\mathfrak{B}$ ist $\frac{1}{\varphi}$ stetig und besitzt dort eine Lipschitz-Konstante; es ist $\frac{1}{\varphi} \leqq \frac{1}{\varepsilon}$ und wegen $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varphi}\right) = \frac{x}{(1 - xy)^2}$ und $x < 1$ kann $L = \frac{1}{\varepsilon^2}$ gesetzt werden. Nunmehr kann man nach Satz 3 aus u_0 eine verbesserte Unterfunktion konstruieren, ihre Kurve schneide C' in Q_1. Aus u_1 eine weitere

[16]) Die Gleichung ist elementar integrierbar, ihre Lösung ist $x = \int_0^y e^{\frac{1}{2}(t^2 - y^2)}\, dt$.

Unterfunktion u_2, usw. Auf diese Weise erhält man eine Folge von Unterfunktionen, von der man an Hand ähnlicher Überlegungen wie bei dem vorigen Beispiel zeigt, daß sie in einem Intervall K gleichmäßig gegen die Lösung konvergiert. Die Lösungskurve trifft C' in einem Punkte Q, dessen Abszisse den rechten Endpunkt des Intervalls K liefert. Da sich ε beliebig klein wählen läßt, kann man die Lösung bis zu dem Punkt hin bestimmen, in welchem sie die Kurve C trifft, also bis zu dem Punkt, in welchem ihre Ableitung unendlich wird.

Beispiel 5. Die durch den Punkt (0, 1) gehende Lösung von $y' = -\frac{x}{y}$ ist $y = |\sqrt{1 - x^2}|$. Um sie zu konstruieren, stellt man zunächst fest, daß die rechte Seite der Gleichung auf der x-Achse nicht erklärt ist. Oberhalb der Geraden $y = \varepsilon$, wo ε eine hinreichend kleine positive Zahl ist, ist die rechte Seite stetig und besitzt dort eine Lipschitz-Konstante. Eine durch (0, 1) gehende Oberfunktion ist $U_0 = 1 - \frac{1}{2} x^2$. Das durch die Punkte (0, 0), (0, 1) begrenzte Stück der y-Achse können wir als ausgeartete Unterfunktion ansehen. In dem durch die Kurven der Ober- und der Unterfunktion sowie die Gerade $y = \varepsilon$ begrenzten Bereich $\mathfrak{B}$ ist dann die rechte Seite stetig und besitzt dort eine Lipschitz-Konstante (Fig. 8). Nunmehr kann man von der Oberfunktion U_0 ausgehend eine Folge von Oberfunktionen konstruieren, wobei die Abszissen der rechten Endpunkte der Intervalle, in denen die Oberfunktionen existieren, beständig abnehmen. Es gibt dann wieder ein Intervall K, in welchem alle Oberfunktionen existieren und ihre Folge gleichmäßig gegen die Lösung von $y' = -\frac{x}{y}$ konvergiert. Da sich ε beliebig klein wählen läßt, kann man die Lösung bis zu dem Punkt hin konstruieren, in welchem die Lösungskurve die x-Achse schneidet, d. h. bis zu dem Punkt, in welchem ihre Ableitung unendlich wird.

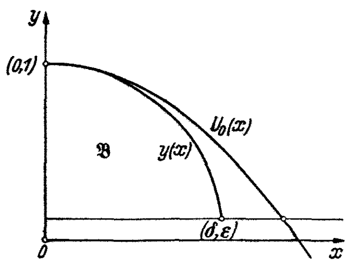

Fig. 8.

3. Wir untersuchen weiter das Konvergenzintervall des Verfahrens an dem Beispiel einer Differentialgleichung vom Typus $y' = \frac{P(x, y)}{Q(x y)}$, wo P und Q in der Umgebung von (x_0, y_0) stetig sind, und $Q(x_0, y_0) \neq 0$ ist; es soll also (x_0, y_0) nicht mit dem singulären Punkt der Gleichung zusammenfallen, d. h. dem Punkt, in welchem P und Q gleichzeitig verschwinden. Geht die durch (x_0, y_0) gehende Lösung nicht durch den nächstgelegenen singulären Punkt der Differentialgleichung, dann kann man unter den üblichen Voraussetzungen die Lösung in einem Intervall konstruieren, dessen rechter Endpunkt

eine größere Abszisse als die des singulären Punktes besitzen kann (vgl. das eben behandelte Beispiel). Bleibt der Fall zu untersuchen, daß die durch (x_0, y_0) gehende Lösung in den singulären Punkt einmüdet. Wir untersuchen diesen Fall an Hand des folgenden Beispiels.

Beispiel 6. Wir zeigen an dem Beispiel der Differentialgleichung $y' = \frac{y}{x - y^2}$, wie man einen Bereich $\mathfrak{B}$ bestimmen kann, in welchem sich die Lösung durch schrittweise Näherungen bis zum singulären Punkt hin gewinnen läßt. Die durch $(-3, 1)$ gehende Lösung dieser Gleichung ist durch $1 - x = (y + 1)^2$ gegeben. Die Lösungskurve ist eine Parabel, deren Scheitel im Punkt $(1, -1)$ liegt, und die durch den singulären Punkt geht, der hier in den Anfangspunkt fällt (Fig. 9). Der Nenner der rechten Seite verschwindet in den auf der Parabel $x = y^2$ gelegenen Punkten, der Zähler in den auf der x-Achse gelegenen. Eine durch $(-3, 1)$ gehende Oberfunktion ist $U_0 = 1$, eine Unterfunktion ist die Gerade $u_0 = -\frac{1}{2}(1 + x)$. Diese berührt die Parabel $x = y^2$ im Punkt $(1, -1)$. Mit Hilfe der Parabel $x - y^2 = -\varepsilon$, wo ε eine hinreichend kleine positive Zahl ist, grenzen wir nun einen Bereich $\mathfrak{B}$ ab; er wird außer durch die eben erwähnte Parabel durch die

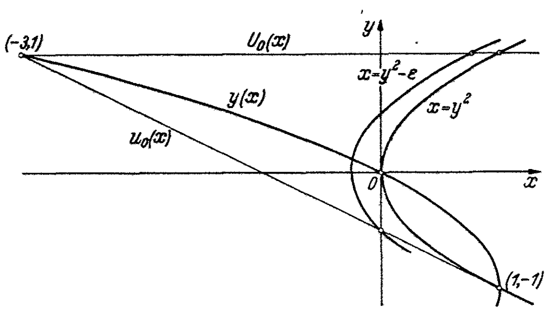

Fig. 9.

Kurven der Ober- und der Unterfunktion begrenzt. In $\mathfrak{B}$ ist die rechte Seite unserer Differentialgleichung stetig und besitzt dort eine Lipschitz-Konstante. Von der Oberfunktion U_0 ausgehend läßt sich jetzt eine Folge von Oberfunktionen konstruieren. Dabei nehmen die Intervalle, in denen die aufeinanderfolgenden Glieder der Folge existieren, in ihrer Länge ab, und es gibt wieder ein Intervall K, in welchem die Folge der U_n gleichmäßig gegen die Lösung geht. Da ε beliebig klein gewählt werden kann, läßt sich auch hier die Lösung bis zum singulären Punkt hin konstruieren.

§ 8.

Einschachtelung der Lösung.

Es sei $\mathfrak{B}$ ein Bereich, der durch die Kurven einer Ober- und einer Unterfunktion sowie eine Vertikale im positiven Abstand a vom Punkte (x_0, y_0), durch welchen die Kurven der beiden Funktionen hindurchgehen, begrenzt wird. In diesem Bereich sei $f(x, y)$ stetig und besitze dort eine Lipschitz-

Konstante. Konstruiert man von einer geeigneten Oberfunktion ausgehend eine Folge von Oberfunktionen, so weiß man, daß diese unter den Voraussetzungen des Satzes 6 gegen die Lösung konvergiert. Das gleiche gilt, wenn man von einer Unterfunktion ausgehend eine Folge von Unterfunktionen konstruiert. Beide Folgen gehen, da $y' = f(x, y)$ zufolge der Lipschitz-Bedingung eine und nur eine Lösung besitzen kann, gegen die Lösung, die Folge der Oberfunktionen von oben her, die der Unterfunktionen von unten her. Man erhält auf diese Weise eine Doppelfolge von Funktionen, durch welche die Lösung eingeschachtelt wird. Ist $U_0, U_1, U_2, \ldots$ die Folge der Oberfunktionen, und $u_0, u_1, u_2, \ldots$ die der Unterfunktionen, dann gilt gleichmäßig in I

$$\lim_{n \to \infty} (U_n - u_n) = 0.$$

Das eben geschilderte Einschachtelungsverfahren machte die Bestimmung zweier getrennter Funktionenfolgen erforderlich, von denen die eine aus einer Ober-, die andere aus einer Unterfunktion gewonnen wurde. Im folgenden zeigen wir, wie man aus einer Ober-(Unter-)funktion allein eine die Lösung einschachtelnde Doppelfolge herstellen kann.

Es sei

$$U_n = U_{n-1} - \int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)} h_{n-1}\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

eine unter den Voraussetzungen des Satzes 6 aus einer Oberfunktion U_0 konstruierte Folge von Oberfunktionen. Aus jeder dieser Oberfunktionen U_n läßt sich nach Satz 4 eine Unterfunktion

$$u_n = U_{n-1} - \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} h_{n-1}\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

gewinnen. Über die so erhaltene Doppelfolge gilt der folgende Satz:

Satz 7. *Ist $U_0, U_1, U_2, \ldots$ eine unter den Voraussetzungen des Satzes* 6 *aus einer Oberfunktion U_0 von $y' = f(x, y)$ konstruierte Folge von Oberfunktionen, so konvergiert die aus ihr nach Satz 4 konstruierte Folge der Unterfunktionen*

$$u_n = U_{n-1} - \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} h_{n-1}\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

in I gleichmäßig gegen die Lösung der Differentialgleichung, vorausgesetzt, daß die erste der Unterfunktionen u_1 in I existiert. Die Folge der Unterfunktionen u_n nimmt mit wachsendem n zu,

$$u_1 \leqq u_2 \leqq \cdots \leqq y \leqq \cdots \leqq U_2 \leqq U_1 \leqq U_0.$$

Beweis. Nimmt man zunächst an, daß alle u_n in I existieren, so folgt aus den beiden Gleichungen

$$U_n = U_{n-1} - \int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)}\, h_{n-1}\, dt, \quad u_n = U_{n-1} - \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)}\, h_{n-1}\, dt \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

$$U_n - u_n = 2 \int_{x_0}^{x} h_{n-1} \operatorname{\mathfrak{Sin}} L(x-t)\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Da die Folge der h_n in I mit wachsendem n gleichmäßig gegen Null geht, gilt

$$\lim_{n \to \infty} (U_n - u_n) = 0,$$

woraus man entnimmt, daß die Folge der Unterfunktionen u_n in I gleichmäßig gegen die Lösung konvergiert.

Bleibt noch zu zeigen, daß alle Unterfunktionen u_n existieren, sobald u_1 existiert. Hierzu weisen wir nach, daß die u_n mit wachsendem n zunehmen. Es ist

$$u_{n+1} - u_n = U_n - U_{n-1} + \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} h_{n-1}\, dt - \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)}\, h_n\, dt,$$

oder, indem man die erste Differenz nach (8) durch ein Integral ersetzt,

$$u_{n+1} - u_n = 2 \int_{x_0}^{x} h_{n-1} \operatorname{\mathfrak{Sin}} L(x-t)\, dt - \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)}\, h_n dt.$$

Setzt man die rechte Seite von (13) gleich g_n, so folgt wegen $h_n \leqq g_n$

$$u_{n+1} - u_n \geqq 2 \int_{x_0}^{x} h_{n-1} \operatorname{\mathfrak{Sin}} L(x-t)\, dt - \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)}\, g_n\, dt.$$

Der Ausdruck rechterhand verschwindet aber identisch in x. Setzt man ihn nämlich G_n, so findet man nach Differentiieren und geeignetem Zusammenfassen

$$G_n' = L\, G_n.$$

Da G_n an der Stelle $x = x_0$ verschwindet, verschwindet es auf Grund der letzten Gleichung identisch in x. Damit ist gezeigt, daß die Unterfunktionen u_n mit wachsendem n zunehmen. Existiert also u_1 in I — dazu ist hinreichend, daß die Kurve von u_1 für alle x aus I in $\mathfrak{B}$ verläuft —, dann existieren erst recht alle weiteren u_n, w. z. b. w.

Bei der praktischen Durchführung dieser Einschachtelung wird man nicht zu jeder Oberfunktion die entsprechende Unterfunktion bestimmen, sondern die Folge der Oberfunktionen bis zu einem gewissen Glied U_{n-1} berechnen und die zu der Oberfunktion U_{n-1} gehörige Unterfunktion u_n aufsuchen. Dann weiß man, daß die Lösung y in I zwischen U_{n-1} und u_n verläuft.

Wir sind eben bei der Bestimmung der Doppelfolge von einer Oberfunktion ausgegangen, haben eine Folge von Oberfunktionen konstruiert und zu jeder derselben eine Unterfunktion. In entsprechender Weise kann man von einer Unterfunktion ausgehen, aus dieser eine Folge von Unterfunktionen gewinnen und aus jeder derselben nach Satz 4 eine Oberfunktion. Von der Folge dieser Oberfunktionen gilt ein dem Satz 7 entsprechender Satz. Sie nimmt mit wachsendem n ab und geht in I gleichmäßig gegen die Lösung.

Neben den beiden eben geschilderten Möglichkeiten, die Lösung einzuschachteln, gibt es noch eine dritte. Sie beruht ebenso wie die vorige auf der in Satz 4 beschriebenen Konstruktion einer Unter-(Ober-)funktion aus einer Ober-(Unter-)funktion. Es sei B ein konvexer Bereich, in welchem $f(x, y)$ stetig ist und einer Lipschitz-Bedingung genügt. Ferner sei $u_0(x)$ eine durch den Punkt (x_0, y_0) gehende, in einem Intervall I existierende, geeignete Oberfunktion von $y' = f(x, y)$. Dann ist nach Satz 4

$$u_1 = u_0 - \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)}\, h_0\, dt$$

eine durch (x_0, y_0) gehende Unterfunktion. Mit derselben Konstruktion folgt aus u_1 die Oberfunktion

$$u_2 = u_1 - \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)}\, h_1\, dt,$$

daraus weiter die Unterfunktion

$$u_3 = u_2 - \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)}\, h_2\, dt,$$

usw. Indem man in dieser Weise unbegrenzt fortfährt, erhält man eine Funktionenfolge $u_0, u_1, u_2, \ldots$, deren Glieder mit geradem Index Ober-, mit ungeradem Index Unterfunktionen sind.

Wir nehmen zunächst wieder an, daß es ein Intervall K gibt, in welchem alle Funktionen dieser Folge existieren. Dann können wir zeigen, daß $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x) = y(x)$ existiert und gleich der durch (x_0, y_0) gehenden Lösung von $y' = f(x, y)$ ist. Dazu hat man die Konvergenz der Reihe

$$y = u_0 + (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \cdots$$

nachzuweisen. Mit

$$u_n - u_{n-1} = -\int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)}\, h_{n-1}\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{22}$$

erhält man

$$y - u_0 = -\int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)}\, (h_0 + h_1 + h_2 + \cdots)\, dt. \tag{23}$$

Ähnlich wie in § 5 wird man auch hier zeigen, daß die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} h_n$ in K absolut und gleichmäßig konvergent ist. Differentiieren von (22) liefert

$$u_n' = f(x, u_{n-1}) - L \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} h_{n-1}\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots);$$

somit ist

$$h_n = f(x, u_{n-1}) - f(x, u_n) - L \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} h_{n-1}\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{24}$$

Auf Grund der Lipschitz-Bedingung und der Gleichung (22) ergibt sich hieraus

$$|h_n| \leqq 2L \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} |h_{n-1}|\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Wie in § 5 suchen wir eine Majorante der Reihe $\sum_{n-0}^{\infty} h_n$ auf. Die Glieder dieser Majorante sind durch die Rekursionsformel

$$H_n = 2L \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} H_{n-1}\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

erklärt, wobei $H_0 = h_0$ gesetzt ist. Durch Ableiten der letzten Gleichung kommt

$$H_n' = 2LH_{n-1} + LH_n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Unter Benutzung des symbolischen Differentialoperators schreibt sich dieses System

$$(D - L) H_n = 2L H_{n-1},$$

aus ihm folgt

$$(D - L)^n H_n = (2L)^n H_0,$$

und daraus nach denselben Überlegungen wie in § 5

$$H_n = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{L(x-t)} (2L)^n H_0\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{25}$$

Ist μ_0 die obere Grenze von $h_0(x)$ im Intervall I, so gilt demnach

$$H_n \leqq \mu_0 \frac{[2L(x-x_0)]^n}{n!} e^{L(x-x_0)}, \qquad x_0 \leqq x \leqq x_0 + a,$$

womit die absolute und gleichmäßige Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} h_n$ nachgewiesen ist. Nach (23) konvergiert somit die Folge der u_n in K gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion, $\lim_{n \to \infty} u_n(x) = y(x)$.

Als Summe der Majorante $\sum_{n=0}^{\infty} H_n$ erhält man

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} H_n = H_0 + 2L \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} \left[1 + \frac{2L(x-t)}{1!} + \frac{[2L(x-t)]^2}{2!} + \dots\right] H_0\, dt$$

oder

$$S = h_0 + 2L \int_{x_0}^{x} e^{3L(x-t)} h_0 dt.$$

In gleicher Weise wie in § 5 zeigt man noch, daß $\lim_{n \to \infty} u_n(x) = y(x)$ Lösung von $y' = f(x, y)$ ist. Da $f(x, y)$ einer Lipschitz-Bedingung genügt, ist sie die einzige Lösung, welche die Gleichung durch den Punkt (x_0, y_0) schickt.

Um den Beweis vollständig zu machen, bleibt noch nachzuweisen, daß es ein Intervall K gibt, in welchem alle u_n existieren. Als K kann man ein Intervall nehmen, in welchem u_0, u_1 und u_2 existieren und $u_0 - u_2 \geqq 0$ ist. Daß es immer ein solches Intervall gibt, kann man so einsehen. Es ist

$$u_0 - u_2 = \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} (h_0 + h_1) dt \geqq \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} (h_0 - H_1)\, dt.$$

Setzt man den Wert von H_1 nach (25) ein, so folgt nach einer leichten Umformung

$$u_0 - u_2 \geqq \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} [1 - 2L(x-t)]\, h_0\, dt \geqq [1 - 2L(x - x_0)] \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} h_0\, dt,$$

woraus man abliest, daß $u_0 - u_2$ mindestens im Intervall $x_0 \leqq x \leqq x_0 + \frac{1}{2L}$ nicht negativ ist. In einem solchen Intervall K verlaufen dann die Kurven aller Funktionen u_n in B, und die Folge der Oberfunktionen nimmt dort mit wachsendem n ab, während die der Unterfunktionen zunimmt. In der Tat, nach (23) ist

$$u_1 - u_3 = \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} (h_1 + h_2)\, dt.$$

Da nach (24)

$$h_1 + h_2 = f(x, u_0) - f(x, u_2) - L(u_0 - u_2)$$

und $u_0 - u_2 \geqq 0$ ist, folgt $h_1 + h_2 \leqq 0$ und damit $u_1 - u_3 \leqq 0$. Daraus schließt man in der gleichen Weise weiter, daß $u_2 - u_4 \geqq 0$, $u_3 - u_5 \leqq 0$ usw., womit gezeigt ist, daß die Folge der Oberfunktionen in K mit wachsendem n abnimmt, während die der Unterfunktionen zunimmt. Allgemeiner kann man sagen, daß man für K jedes Intervall nehmen kann, in welchem die Funktionen $u_0, u_1, \dots, u_n, u_{n+1}, u_{n+2}$ existieren und die Differenz $u_n - u_{n+2}$ bei geradem (ungeradem) n nicht negativ (positiv) ist.

Ein etwas kleineres, dafür aber einfacher zu bestimmendes Konvergenzintervall liefert die folgende Betrachtung. Man kann zeigen, daß alle Funktionen unserer Folge unter einer gewissen Ober- und über einer gewissen Unterfunktion liegen. Um die Oberfunktion zu bestimmen, schreiben wir (23) in der Form

$$u_n = u_{n+1} + \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)}\, h_n\, dt. \tag{26}$$

Ist n gerade, dann ist u_n eine Ober-, u_{n+1} eine Unterfunktion und $h_n \geqq 0$. Ersetzt man auf der rechten Seite von (26) die Unterfunktion u_{n+1} durch die Oberfunktion u_0 und h_n durch H_n, so folgt

$$u_n \leqq u_0 + \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)}\, H_n\, dt,$$

oder, indem man H_n durch die rechte Seite von (25) ausdrückt,

$$u_n \leqq u_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{[2\,L(x-t)]^n}{n!}\, e^{L(x-t)}\, h_0\, dt;$$

somit ist erst recht

$$u_n \leqq u_0 + \int_{x_0}^{x} e^{3\,L(x-t)}\, h_0\, dt.$$

Alle Funktionen u_n liegen also unter der rechten Seite der letzten Ungleichung, von der man leicht zeigt, daß sie eine Oberfunktion von (A) ist.

Ist dagegen n ungerade, also u_n eine Unterfunktion, dann ist u_{n+1} Oberfunktion und $h_n \leqq 0$. Ersetzt man in (26) die Oberfunktion u_{n+1} durch die Unterfunktion u_1 und h_n durch $-H_n$, so kommt

$$u_n \geqq u_0 + (u_1 - u_0) - \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)}\, H_n\, dt,$$

oder

$$u_n \geqq u_0 - \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} \left(1 + \frac{[2\,L(x-t)]^n}{n!}\right) h_0\, dt;$$

somit gilt erst recht

$$u_n \geqq u_0 - \int_{x_0}^{x} e^{3\,L(x-t)}\, h_0\, dt.$$

Alle Funktionen u_n bleiben also oberhalb der rechten Seite dieser Ungleichung, die eine Unterfunktion von (A) ist. Alles zusammengenommen ist damit gezeigt, daß

$$u_0 - \int_{x_0}^{x} e^{3\,L(x-t)}\, h_0\, dt \leqq u_n \leqq u_0 + \int_{x_0}^{x} e^{3\,L(x-t)}\, h_0\, dt \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Daraus schließt man, daß es ein Intervall K gibt, in welchem die Folge der u_n gleichmäßig gegen die Lösung geht. Der rechte Endpunkt von K ergibt sich hier nach denselben Überlegungen, wie wir sie zur Bestimmung des Konvergenzintervalls des Picardschen Verfahrens beim Beweis von Satz 1 benutzt haben. Man hat dabei nur Y mit

$$\int_{x_0}^{x} e^{3L(x-t)} h_0 \, dt$$

zu identifizieren.

Anstatt von einer Oberfunktion auszugehen, kann man das Verfahren auch mit einer Unterfunktion beginnen. Man erhält dann eine Funktionenfolge, bei welcher die Glieder mit geradem Index Unter-, die mit ungeradem Index Oberfunktionen sind. Der Beweis für die Konvergenz der so erhaltenen Funktionenfolge ist Schritt für Schritt beinahe derselbe wie eben. Die Schranken, zwischen denen alle Funktionen der Folge verlaufen, sind hier gegeben durch

$$u_0 + \int_{x_0}^{x} e^{3L(x-t)} h_0 \, dt \leqq u_n \leqq u_0 - \int_{x_0}^{x} e^{3L(x-t)} h_0 \, dt.$$

Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen:

Satz 8. *Ist $u_0(x)$ eine durch den Punkt (x_0, y_0) gehende, in einem Intervall I existierende geeignete Ober-(Unter-)funktion von $y' = f(x, y)$, und konstruiert man von u_0 ausgehend die Funktionenfolge*

$$u_n = u_{n-1} - \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} h_{n-1} \, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

mit

$$h_n = u_n' - f(x, u_n) \qquad (n = 0, 1, \ldots),$$

dann gibt es ein Intervall K, in welchem die Folge der u_n gleichmäßig gegen die durch (x_0, y_0) gehende Lösung von $y' = f(x, y)$ konvergiert. Bei dieser Folge sind die Glieder mit geradem Index Ober-(Unter-)funktionen, die mit ungeradem Unter-(Ober-)funktionen. Als K kann man entweder ein Intervall nehmen, in welchem u_0, u_1 und u_2 existieren und die Differenz $u_0 - u_2$ positiv (negativ) ist, oder allgemeiner eines, in welchem $u_0, u_1, \ldots, u_{n+2}$ existieren und die Differenz zweier aufeinanderfolgender Ober- bzw. Unterfunktionen $u_n - u_{n+2}$ positiv bzw. negativ ist, oder eines, in welchem die beiden Schranken

$$u_0 \pm \int_{x_0}^{x} e^{3L(x-t)} h_0 \, dt$$

existieren.

Zu diesem Satz zwei Beispiele.

Beispiel 7. Wir zeigen am Beispiel der Gleichung $y' = |\sqrt{x^2 + y^2}|$, wie man die durch den Anfangspunkt gehende Lösung für positives x nach dem in Satz 8 geschilderten Verfahren einschachteln kann. Hier ist $\frac{\partial f}{\partial y}$ in der ganzen x, y-Ebene beschränkt, $L = 1$. Bei der Aufstellung der die Lösung einschachtelnden Funktionenfolge gehen wir von der Unterfunktion $u_0(x) = 0$ aus. Mit $h_0 = -x$ erhält man als nächste Näherung die Oberfunktion

$$u_1 = \int_0^x e^{x-t}\, t\, dt = e^x - 1 - x,$$

daher

$$0 \leqq y \leqq e^x - 1 - x.$$

Das Verfahren konvergiert hier für alle positiven x, denn alle u_n liegen zwischen den Schranken

$$-\tfrac{1}{9}(e^{3x} - 1 - 3x) \leqq u_n \leqq \tfrac{1}{9}(e^{3x} - 1 - 3x).$$

Beispiel 9. Es soll die durch den Anfangspunkt gehende Lösung der schon mehrfach behandelten Riccatischen Gleichung $y' = x - y^2$ für positives x eingeschachtelt werden. Eine Unterfunktion ist $u_0 = 0$. Da $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$ ist, kann man in dem Gebietsstreifen $x \geqq 0$, $|y| \leqq 1$ die Lipschitz-Konstante $L = 2$ setzen. Als Schranken der u_n erhält man mit $h_0 = -x$

$$\pm \int_0^x e^{6(x-t)}\, t\, dt = \pm \tfrac{1}{36}(e^{6x} - 1 - 6x).$$

Die u_n existieren demnach in einem Intervall K, in welchem diese Schranken den Betrag 1 nicht überschreiten. Dies ist der Fall für $0 \leqq x \leqq 0{,}19$.

Als nächste Näherung bekommt man die Oberfunktion

$$u_1 = \int_0^x e^{2(x-t)}\, t\, dt = \tfrac{1}{4}(e^{2x} - 1 - 2x).$$

Sie erreicht den Wert 1 für $x = 0{,}97$ und existiert daher im Intervall $0 \leqq x \leqq 0{,}97$. Aus u_1 ergibt sich der Fehler

$$h_1 = \tfrac{1}{2}(e^{2x} - 1) - x + \tfrac{1}{16}(e^{2x} - 1 - 2x)^2,$$

und damit

$$h_0 + h_1 = \tfrac{1}{2}(e^{2x} - 1) - 2x + \tfrac{1}{16}(e^{2x} - 1 - 2x)^2.$$

Wir suchen nun ein Intervall auf, in welchem $u_2 - u_0 = u_2 \geqq 0$ ist. Das ist sicherlich der Fall, solange $h_0 + h_1 \leqq 0$ ist. Da

$$h_0 + h_1 \leqq \tfrac{1}{2}(e^{2x} - 1) - 2x,$$

ist $h_0 + h_1$ sicherlich nicht positiv, wenn es die rechte Seite nicht ist. Diese wechselt ihr Vorzeichen für $x = 0{,}63$. Damit haben wir ein größeres Konvergenzintervall gewonnen. Ein noch größeres erhält man, wenn man die Stelle bestimmt, an welcher u_2 sein Vorzeichen wechselt.

Wie das Beispiel zeigt, ist das mit Satz 6 beschriebene Verfahren der schrittweisen Näherungen dem des letzten Satzes überlegen. Beim ersteren konvergiert das Verfahren für alle positiven x, während beim letzteren der Konvergenznachweis nur für ein kleineres Intervall gelingt.

§ 9.

Über das Picardsche Verfahren.

Das eben beschriebene Verfahren und das Picardsche weisen insofern eine gewisse Ähnlichkeit auf, als man bei ihnen im allgemeinen nur ein kleines Konvergenzintervall angeben kann. Bei beiden tritt auch die bekannte Erscheinung auf, daß es ein größtes Konvergenzintervall gibt. Untersucht man nämlich die Länge des Konvergenzintervalls in Abhängigkeit von der Breite b des Gebietsstreifens, so findet man, daß die Länge des Konvergenzintervalls zunächst mit der Breite des Gebietsstreifens zunimmt, bis sie einen größten Wert erreicht, um dann mit wachsender Breite abzunehmen.

Wenn auch das Picardsche Verfahren im allgemeinen nicht unmittelbar Folgen von Ober- oder Unterfunktionen liefert, so kann man sich doch mit seiner Hilfe eine Folge von Ober- und Unterfunktionen verschaffen, durch welche die Lösung eingeschachtelt wird. Es gilt da folgender Satz:

Satz 9. *Ist $u_0(x)$ eine durch den Punkt (x_0, y_0) gehende, in einem Intervall I erklärte geeignete Ausgangsfunktion, dann gibt es ein Intervall K, in welchem die Picardsche Funktionenfolge*

$$u_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, u_{n-1})\,dt \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

gleichmäßig gegen die Lösung von $y' = f(x, y)$ geht, und die mit dem Fehler

$$h_n = u_n' - f(x, u_n) = f(x, u_{n-1}) - f(x, u_n)$$

gebildete Funktionenfolge

$$V_n = u_n + \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} |h_n(t)|\,dt \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

eine mit wachsendem n abnehmende Folge von Oberfunktionen darstellt, während

$$v_n = u_n - \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} |h_n(t)|\,dt \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

eine zunehmende Folge von Unterfunktionen darstellt. Die beiden letzten Folgen gehen in K gleichmäßig gegen die durch (x_0, y_0) *gehende Lösung von* $y' = f(x, y)$, *liefern somit eine Einschachtelung der Lösung. Das Konvergenzintervall K ist dasselbe wie in Satz* 1.

Beweis. Aus

$$h_n = u_n' - f(x, u_n) = f(x, u_{n-1}) - f(x, u_n) \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

schließt man

$$|h_n| \leqq L\,|u_n - u_{n-1}| \leqq L^n \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,|h_0(t)|\,dt \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

wo die letzte Ungleichung aus den Entwicklungen in § 1 folgt. Daraus entnimmt man, daß die Folge der h_n in K mit wachsendem n gleichmäßig gegen Null geht. Daß die V_n Ober- und die v_n Unterfunktionen von $y' = f(x, y)$ sind, folgt in derselben Weise, wie dies für V und v in § 3 gezeigt wurde. Man hat dort nur überall den Index n an V und v anzuhängen. Damit hat man eine Folge von Oberfunktionen V_n und eine von Unterfunktionen v_n, durch welche die Lösung eingeschachtelt wird. Denn beide Folgen konvergieren, da die h_n in K gleichmäßig gegen Null und die u_n gleichmäßig gegen die Lösung gehen, in K gleichmäßig gegen die Lösung, die erstere von „oben", die letztere von „unten" her.

Bleibt noch zu zeigen, daß die V_n mit wachsendem n abnehmen. Zur Vereinfachung der Schreibweise setzen wir $|h_n(x)| = H_n(x)$. Dann ist zu beweisen, daß

$$V_n - V_{n+1} = u_n - u_{n+1} + \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)}\,[H_n(t) - H_{n+1}(t)]\,dt \geqq 0.$$

Nach § 1 ist

$$H_{n+1} \leqq L|u_{n+1} - u_n| = L\int_{x_0}^{x} H_n\,dt = G_{n+1}.$$

Damit wird

$$V_n - V_{n+1} \geqq \int_{x_0}^{x} (h_n + H_n)\,dt + \left[\int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)}(H_n - G_{n+1})\,dt - \int_{x_0}^{x} H_n\,dt\right].$$

Der in eckige Klammern gesetzte Ausdruck verschwindet aber identisch in x, denn seine Ableitung ist gleich dem mit L multiplizierten Ausdruck, und dieser verschwindet an der Stelle $x = x_0$. Daher

$$V_n - V_{n+1} \geqq \int_{x_0}^{x} (h_n + |h_n|)\,dt \geqq 0,$$

woraus man abliest, daß die Oberfunktionen V_n mit wachsendem n abnehmen.

In entsprechender Weise zeigt man, daß die Unterfunktionen v_n mit wachsendem n zunehmen, womit der Satz bewiesen ist.

Wie bekannt, liefert das PICARDsche Verfahren unter geeigneten Monotonievoraussetzungen über $f(x, y)$ unmittelbar Folgen von Ober- oder Unterfunktionen. Über die Erzeugung solcher Folgen gibt der folgende Hilfssatz Auskunft.

Hilfssatz. *Ist die rechte Seite der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ in der Umgebung des Punktes (x_0, y_0) stetig und $u_0(x)$ eine durch (x_0, y_0) gehende in einem Intervall I existierende geeignete Ober- (Unter-) funktion von $y' = f(x, y)$, deren Fehler dort fast überall positiv (negativ) ist, dann ist die nach PICARD konstruierte nächste Näherung*

$$u_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, u_0)\, dt,$$

sofern sie ebenfalls in I existiert, eine verbesserte Ober- (Unter-) funktion, wenn $f(x, y)$ in der Umgebung von (x_0, y_0) mit wachsendem y monoton zunimmt. Nimmt dagegen $f(x, y)$ monoton ab, so ist u_1 eine Unter- (Ober-) funktion.

Beweis. Nimmt $f(x, y)$ mit wachsendem y monoton zu, und ist $u_0(x)$ eine Oberfunktion mit den geforderten Eigenschaften, $y(x)$ irgendeine durch (x_0, y_0) gehende Lösung von (A), so hat man in I zunächst $u_0 \geqq y$. Ist I so gewählt, daß die nach PICARD gebildete nächste Näherung

$$u_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, u_0)\, dt = u_0 - \int_{x_0}^{x} h_0\, dt$$

in I existiert, so gilt $u_1 < u_0$ für $x > x_0$, denn nach Voraussetzung ist h_0 in I fast überall positiv, d. h. es soll dort nur in einer endlichen Anzahl isolierter Punkte verschwinden. Hier ist aber u_1 eine verbesserte Oberfunktion, denn der Fehler von u_1

$$h_1 = f(x, u_0) - f(x, u_1)$$

ist für $x > x_0$ positiv, und es ist $u_1 \geqq y$, da

$$u_1 - y = \int_{x_0}^{x} [f(t, u_0) - f(t, y)]\, dt.$$

Damit ist gezeigt, daß das PICARDsche Verfahren in diesem Fall eine verbesserte Oberfunktion liefert. Ebenso zeigt man, daß unter den gleichen Bedingungen aus einer Unterfunktion u_0 eine verbesserte Unterfunktion u_1 erzeugt wird.

Nimmt dagegen $f(x, y)$ mit wachsendem y monoton ab, und ist u_0 wieder eine Oberfunktion, dann ist in I wieder $u_0 \geqq y$ und wie eben $u_1 < u_0$ für $x > x_0$. Hier ist aber u_1 eine Unterfunktion, denn der Fehler von u_1

$$h_1 = f(x, u_0) - f(x, u_1)$$

ist für $x > x_0$ negativ, und es ist $u_1 \leqq y$, da

$$u_1 - y = \int_{x_0}^{x} [f(t, u_0) - f(t, y)]\, dt,$$

und $f(x, y)$ mit wachsendem y monoton abnimmt.

Ebenso folgt, daß u_1 eine Oberfunktion ist, wenn u_0 eine Unterfunktion ist.

Über die PICARDsche Funktionenfolge, die auftritt, wenn $f(x, y)$ mit wachsendem y monoton zunimmt, hat I. BENDIXSON [17]) einen Satz bewiesen, der später von M. MÜLLER [18]) richtiggestellt wurde.

Satz von BENDIXSON-MÜLLER. *In der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ sei $f(x, y)$ in der Umgebung des Punktes (x_0, y_0) stetig und die Gleichung besitze eine durch (x_0, y_0) gehende, in einem Intervall I: $x_0 \leqq x \leqq x_0 + a$ existierende geeignete Oberfunktion $U_0(x)$, deren Fehler dort fast überall positiv ist; $u_0(x)$ sei eine in demselben Intervall existierende, ebenfalls durch (x_0, y_0) gehende geeignete Unterfunktion, deren Fehler dort fast überall negativ ist. In dem durch die Vertikale $x = x_0 + a$ und die Kurven von $U_0(x)$ und $u_0(x)$ begrenzten Bereich $\mathfrak{B}$ sei $f(x, y)$ stetig und nehme dort mit wachsendem y monoton zu. Dann ist die aus der Oberfunktion $U_0(x)$ erzeugte PICARDsche Funktionenfolge*

$$U_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, U_{n-1})\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

eine mit wachsendem n monoton abnehmende Folge von Oberfunktionen, die in I gleichmäßig gegen eine Lösung von $y' = f(x, y)$ geht. Die aus der Unterfunktion $u_0(x)$ erzeugte Folge ist eine monoton zunehmende von Unterfunktionen, die ebenfalls gegen eine Lösung von $y' = f(x, y)$ geht.

Beweis. Da $f(x, y)$ in der Umgebung von (x_0, y_0) stetig ist, lassen sich nach den in § 3 unter 1. und 2. beschriebenen Verfahren je eine Ober- und Unterfunktion $U_0(x)$ und $u_0(x)$ von der im Satz angegebenen Art konstruieren. Bei der Beweisführung wollen wir uns auf die aus der Oberfunktion $U_0(x)$ erzeugte Folge von Oberfunktionen beschränken. In dem Bereich $\mathfrak{B}$ ist $f(x, y)$ beschränkt, $|f(x, y)| \leqq M$. Nach unseren Voraussetzungen existieren alle U_n im Intervall I. Bleibt zu beweisen, daß die Folge der U_n in I gleichmäßig konvergent ist. Da

$$|U_n(x') - U_n(x)| = \left| \int_{x}^{x'} f(t, U_{n-1})\, dt \right| \leqq M |x' - x|,$$

[17]) I. BENDIXSON, Sur la convergence uniforme des séries, Ofversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1897, S. 605; vgl. auch P. PAINLEVÉ, Enzykl. d. Math. Wiss., Bd. II, 1. Teil, 1. Hälfte, S. 200.

[18]) M. MÜLLER, Math. Zeitschr. 26 (1927), S. 619, insbes. S. 623.

sind die U_n in I gleichmäßig stetig. Nunmehr unterteilen wir das Intervall I durch die Punkte

$$x_0 = X_0, X_1, X_2, \ldots, X_k = x_0 + a$$

in k Teilintervalle, deren Längen unter einer beliebig klein vorgegebenen positiven Zahl ε bleiben. Dann gibt es immer ein X_i, das sich von einem beliebigen x aus I um weniger als ε unterscheidet. In

$$U_{n+p}(x) - U_n(x) = U_{n+p}(x) - U_{n+p}(X_i) + U_{n+p}(X_i) - U_n(X_i) + \\ + U_n(X_i) - U_n(x)$$

kann man aber $U_{n+p}(X_i) - U_n(X_i)$ durch Wahl eines hinreichend großen Wertes von n kleiner als ε machen, denn die Zahlenfolge der $U_n(X_i)$ besitzt, da sie monoton abnimmt und nach unten beschränkt ist, einen Grenzwert.

Damit ergibt sich

$$|U_{n+p}(x) - U_n(x)| < \varepsilon M + \varepsilon + \varepsilon M = \varepsilon(1 + 2M).$$

Infolgedessen konvergiert die Folge der $U_n(x)$ in I gleichmäßig gegen eine stetige Grenzfunktion. Von dieser zeigt man in der üblichen Weise, daß sie eine Lösung von $y' = f(x, y)$ ist, womit der Satz für die Folge der Oberfunktionen bewiesen ist. Der Beweis für die Folge der Unterfunktionen verläuft entsprechend.

Der folgende Satz bezieht sich auf die PICARDsche Funktionenfolge, die man erhält, wenn $f(x, y)$ mit wachsendem y monoton abnimmt. Er ist ein Gegenstück zu dem Satz von BENDIXSON-MÜLLER.

Satz 10. *Es sei B ein konvexer Bereich, in welchem die rechte Seite der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ stetig ist und mit wachsendem y monoton abnimmt. Ferner sei $u_0(x)$ eine durch den Punkt (x_0, y_0) gehende in einem Intervall I existierende geeignete Ober-(Unter-)funktion von $y' = f(x, y)$, deren Fehler in I fast überall positiv (negativ) ist. Konstruiert man von $u_0(x)$ ausgehend die PICARDsche Funktionenfolge*

$$u_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, u_{n-1})\,dt \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

und gibt es ein Intervall K, in welchem u_0, u_1 und u_2 existieren und $u_0 - u_2$ fast überall positiv (negativ) ist, oder alle Glieder bis zur Ober-(Unter-)funktion u_{n+2} hin existieren und $u_n - u_{n+2}$ fast überall positiv (negativ) ist, dann konvergiert die Teilfolge der Oberfunktionen mit wachsendem n monoton abnehmend gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion und die der Unterfunktionen mit wachsendem n

monoton zunehmend ebenfalls gegen eine Grenzfunktion. Sind die beiden Grenzfunktionen dieselben — dies ist der Fall, wenn gleichmäßig in K $\lim_{n \to \infty} (u_n - u_{n+1}) = 0$ *ist —, so stellen diese die einzige Lösung dar, welche* $y' = f(x, y)$ *besitzt.*

Beweis. Den Beweis führen wir unter der Annahme durch, daß $u_0(x)$ eine Oberfunktion ist. Nachdem man die Funktionen u_1 und u_2 nach Picard konstruiert hat, sucht man ein Intervall K auf, in welchem diese Funktionen existieren und die Differenz $u_0 - u_2$ mit Ausnahme einer endlichen Anzahl isolierter Punkte, in denen sie verschwindet, positiv ist. Dann folgt aus

$$u_3 - u_1 = \int_{x_0}^{x} [f(t, u_2) - f(t, u_0)]\, dt,$$

da $f(x, y)$ nach Voraussetzung mit wachsendem y monoton abnimmt, $u_3 \geqq u_1$, wobei die Gleichheit nur an der Stelle x_0 eintritt. Damit schließt man aus

$$u_4 - u_2 = \int_{x_0}^{x} [f(t, u_3) - f(t, u_1)]\, dt,$$

daß $u_4 \leqq u_2$ ist. Indem man in dieser Weise weiterfährt, erkennt man, daß die Folge der Oberfunktionen (n gerade) in K mit wachsendem n monoton abnimmt, während die der Unterfunktionen (n ungerade) monoton zunimmt. Alle u_n $(n = 2, 3, \ldots)$ verlaufen somit für alle x aus K in dem durch die Kurven von u_0 und u_1, sowie die Vertikale $x = x_0 + \delta$ begrenzten Bereich $\mathfrak{B}$. Da $f(x, y)$ in $\mathfrak{B}$ stetig und damit beschränkt ist, sind die u_n in K gleichmäßig stetig. Für die monoton abnehmende Folge der Oberfunktionen folgt daraus in gleicher Weise wie bei dem Beweis des vorigen Satzes, daß sie in K gleichmäßig konvergent ist. Das gleiche gilt von der Folge der Unterfunktionen. Konvergieren beide Folgen gegen ein und dieselbe Grenzfunktion, das ist der Fall, wenn in K gleichmäßig $\lim_{n \to \infty} (u_n - u_{n+1}) = 0$ ist, dann läßt sich von dieser in der üblichen Weise zeigen, daß sie eine Lösung von $y' = f(x, y)$ ist. Daß dies die einzige Lösung ist, beweist man indirekt. Angenommen, es gäbe zwei Lösungen, sie seien Y und y, und es sei für hinreichend kleines positives $x - x_0$ immer $Y > y$. Dann ergibt sich aus

$$Y' - y' = f(x, Y) - f(x, y),$$

da $f(x, y)$ mit wachsendem y monoton abnimmt, für hinreichend kleines positives $x - x_0$

$$Y' - y' < 0$$

und damit $Y < y$, wodurch der Widerspruch hergestellt ist. Damit ist der Beweis für den Fall erbracht, daß u_0 eine Oberfunktion ist. Der Beweis für den Fall, daß u_0 eine Unterfunktion ist, verläuft entsprechend.

Ein Konvergenzintervall, das größer sein kann als das eben angegebene (vgl. Beispiel 10), erhält man in folgender Weise. Man sucht ein Intervall auf, in welchem alle Glieder der PICARDschen Folge bis zur Ober-(Unter-)funktion u_{n+2} hin existieren und die Differenz $u_n - u_{n+2}$ positiv (negativ) ist. In dem so definierten Intervall konvergieren offenbar die beiden Teilfolgen ebenfalls gleichmäßig. Damit ist der Satz in allen Teilen bewiesen.

Beispiel 9. Als erstes Beispiel nehmen wir die Gleichung $y' = x - |\sqrt{y}|$, und bestimmen deren durch den Anfangspunkt gehende Lösung, wobei wir von der Unterfunktion $u_0 = 0$ ausgehen. Wir erhalten dann nach PICARD

$$u_0 = 0, \quad u_1 = \frac{1}{2} x^2, \quad u_2 = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \frac{x^2}{2},$$

allgemein

$$u_n = C_n x^2.$$

Die u_n mit geradem Index sind Unterfunktionen, die mit ungeradem Oberfunktionen. Beide Folgen konvergieren nach dem letzten Satz für alle $x > 0$, denn es ist für positives x

$$u_2 - u_0 = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \frac{x^2}{2} > 0.$$

Sie gehen in jedem endlichen Intervall gleichmäßig gegen ein und dieselbe Grenzfunktion, nämlich $y = \frac{x^2}{4}$, welches die einzige Lösung unserer Gleichung ist. In der Tat, setzt man

$$C_n = \tfrac{1}{4}(1 + c_n),$$

so erhält man aus der für die C_n gültigen Rekursionsformel $C_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{C_n})$

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{1 - \sqrt{1 + c_n}}{c_n}.$$

Der Betrag der rechten Seite ist aber für $|c_n| < 1$ immer kleiner als 1. Daher ist $\lim\limits_{n \to \infty} c_n = 0$ und $\lim\limits_{n \to \infty} C_n = \frac{1}{4}$, w. z. b. w.

Beispiel 10. Wir wollen die durch den Anfangspunkt gehende Lösung der RICCATIschen Gleichung $y' = x - y^2$ bestimmen. Als Ausgangsfunktion nehmen wir die Unterfunktion $u_0 = 0$. Dann erhält man nach PICARD

$$u_1 = \frac{1}{2} x^2, \quad u_2 = \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{20}, \quad u_3 = \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{20} + \frac{x^8}{160} - \frac{x^{11}}{4400}, \quad \text{usw.}$$

Die u_n mit geradem Index sind Unterfunktionen, die mit ungeradem Index Oberfunktionen. Zur Bestimmung des Konvergenzintervalls untersuchen wir zunächst die Differenz $u_2 - u_0$. Aus

$$u_2 - u_0 = \frac{x^2}{2}\left(1 - \frac{x^3}{10}\right)$$

schließt man, daß diese Differenz im Intervall $0 \leqq x \leqq \sqrt[3]{10}$ fast überall positiv ist. In diesem Intervall konvergiert somit jede der beiden Teilfolgen gleichmäßig. Da die rechte Seite unserer Gleichung überdies einer Lipschitz-Bedingung genügt, gehen beide Teilfolgen gegen dieselbe Grenzfunktion, welche die Lösung unserer Gleichung ist.

Ein größeres Konvergenzintervall erhält man mit der nächsten Differenz

$$u_1 - u_3 = \frac{x^5}{20}\left(1 - \frac{x^3}{8} + \frac{x^6}{220}\right).$$

Da sie für $x > 0$ ihr Vorzeichen nicht wechselt, geht die Folge der u_n in jedem Intervall $0 \leqq x \leqq a$ mit endlichem a gleichmäßig gegen die Lösung unserer Gleichung. Daran erkennt man wieder, inwiefern beim Picardchen Verfahren die Länge des Konvergenzintervalls von der Güte abhängt, mit welcher die Ausgangsfunktion die Lösung annähert.

(Eingegangen am 4. Januar 1942.)