Differentialgeometrie des isotropen Raumes. III.

Flächentheorie.

Von

Karl Strubecker in Straßburg.

Einleitung.

Gestützt auf die Theorie der Kurven des isotropen Raumes, welche ich in der ersten Arbeit dieser Reihe[1]) in ihren Grundzügen entwickelt habe, werden hier die Elemente der isotropen Flächentheorie dargelegt. Die Arbeit ist als Grundlage für eine Reihe weiterer Untersuchungen gedacht und bringt daher vorerst nur wenige der möglichen Anwendungen ihrer Ergebnisse. Über eine erste solche Anwendung, nämlich über die Geometrie der Flächen fester Relativkrümmung K des isotropen Raumes, d. h. über die so oft studierten Integralflächen der Monge-Ampèreschen Gleichung

$$K = rt - s^2 = \text{const.} \neq 0 \tag{*}$$

habe ich vor kurzem berichtet[2]).

Um jedoch die vorliegende Arbeit für sich lesbar zu gestalten, habe ich an ihren Anfang eine knappe Zusammenstellung einiger Hauptpunkte der Geometrie, insbesondere der Metrik und Kinematik und der Kurventheorie des isotropen Raumes gesetzt.

Die Geometrie des isotropen Raumes läßt sich als ein Ausschnitt der euklidischen vierdimensionalen Raumgeometrie auffassen. Ihr Schauplatz ist dort ein Tangentialraum der absoluten Fläche zweiter Ordnung, und ihr eigenes absolutes Gebilde daher ein schneidendes Geradenpaar der Fernebene $t = 0$ des Raumes (x, y, z), das wir aus Realitätsgründen gerne in der Form

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 0 \\ t &= 0 \end{aligned}\right\}$$

annehmen, so daß das isotrope Bogenelement ds die Gestalt

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \tag{**}$$

annimmt.

[1]) K. Strubecker, Differentialgeometrie des isotropen Raumes I. Theorie der Raumkurven. Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien, Abt. IIa, **150** (1941), S. 1—53.

[2]) K. Strubecker, Differentialgeometrie des isotropen Raumes II. Die Flächen konstanter Relativkrümmung $K = rt - s^2$. Math. Zeitschr. **47** (1942), S. 743—777.

Über die Eigenarten der Geometrie des isotropen Raumes habe ich nun schon bei verschiedenen Gelegenheiten mitgeteilt[3]). Ein besonderes Kennzeichen dieser Geometrie ist es, daß viele ihrer gebräuchlichen algebraischen und differentiellen Invarianten, wie z. B. Längen, Winkel, Krümmungen, Krümmungsmaß usw., gelegentlich oder stets durch identisches Verschwinden versagen können. Es zeigt sich aber, daß in allen diesen Fällen geeignete Ersatzinvarianten zur Verfügung stehen, mit deren Hilfe sich die isotrope Raumgeometrie dann weiterentwickeln läßt.

So folgt z. B. aus der Form (**) des isotropen Bogenelementes, daß das Gausssche Krümmungsmaß K_a der Flächen des isotropen Raumes identisch verschwindet. Dafür gibt es eine gewisse Ersatzinvariante, nämlich die sogenannte Relativkrümmung K der Fläche

$$K = \frac{1}{R_1 R_2}, \tag{***}$$

die eine Reihe gewohnter und wichtiger Eigenschaften und Funktionen der versagenden Gaussschen Krümmung übernimmt.

Die Geometrie des isotropen Raumes ist (wie die elliptische und quasielliptische Geometrie, mit denen sie überdies in enger Berührung steht) hinsichtlich Lage und Maß in sich dual, und könnte daher auch formal in völlig selbstdualer Weise entwickelt werden. Das ist hier nicht vollends geschehen, teils aus Raumgründen, teils aus Gründen der Terminologie, die ja nicht nur unter dem Einflusse dieser Dualität sich verdoppeln würde, die vielmehr wegen der erwähnten natürlichen Verdoppelung der isotropen Invarianten sich in ihrem Umfange vervierfachen müßte, wollte man sie konsequent ausbauen. Einige wichtige und interessante Punkte dieser Dualität sind aber doch zur Sprache gekommen. Ich erwähne hier die Dualisierung der Kurventheorie, die bis zur Berechnung der sogenannten Biegung der Zylinder getrieben wurde, ferner die Herleitung der isotropen Gegenstücke der zu den Sätzen von Euler und Meusnier dualen Theoreme von Blaschke und Mannheim.

Stärker als sonst üblich mußte der Abschnitt über die isotropen Krümmungslinien der Flächen ausfallen. Hier galt es vor allem auch die Beziehungen zur relativen Differentialgeometrie von E. Müller herzustellen und auf mannigfache Zusammenhänge mit vorhandener Literatur

---

[3]) K. Strubecker, a) Beiträge zur Geometrie des isotropen Raumes. Journ. f. reine u. angew. Math. **178** (1938), S. 135—173. — b) Die Geometrie des isotropen Raumes und einige ihrer Anwendungen. Jahresber. Deutsch. Math.-Vereinigung **48** (1938), S. 236—257. — c) Über die Eulersche Transformation. Comptes rendus instit. sci. de Roumanie **3** (1939), S. 150—155. — Vgl. ferner die Arbeiten I[1]) und II[2]) dieser Reihe. — Über den Gegenstand der vorliegenden Arbeit habe ich im März 1941 auch in *Hamburg* und *Wien* vorgetragen.

einzugehen. In der Tat sind die Kurven, denen in meiner Auffassung die Rolle der isotropen Krümmungslinien zukommt, von verschiedenen Autoren, wie A. RIBAUCOUR, J. EIESLAND, É. TURRIÈRE, E. MÜLLER, und unter den verschiedensten (nichtisotropen) Gesichtspunkten studiert worden.

Die Ableitungsgleichungen der isotropen Flächentheorie weisen zum Teil, nämlich im Hinblick auf das Theorema egregium und die CODAZZI-MAINARDIschen Gleichungen die vom euklidischen Falle her bekannte formale Struktur auf. Diese Ähnlichkeit entfällt jedoch vollkommen bei den nach WEINGARTEN bezeichneten Gleichungen. Das hängt mit dem Umstande zusammen, daß im isotropen Raume alle Flächennormalen untereinander parallel, nämlich vollisotrop, d. h. z-parallel sind. Das zwingt, zur Festlegung der Stellung einer Tangentialebene zu Bivektoren zu greifen.

Ein Kapitel über sphärische Abbildung leitet über zu einem wieder durch seine großen Abweichungen vom gewohnten euklidischen Falle interessanten Abschnitt über die Minimalflächen des isotropen Raumes. Hier muß man, um diese Flächen überhaupt durch ein sinnvolles Variationsproblem definieren und sie mit den Flächen verschwindender isotroper mittlerer Krümmung

$$(\dagger) \qquad H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{2}\Delta z = \frac{1}{2}(r+t)$$

identifizieren zu können, zu MINKOWSKIS Begriff der Relativoberfläche (hinsichtlich einer isotropen Kugel als Eichfläche) greifen. *Dabei ist es bemerkenswert, daß diese etwa durch die Formel*

$$(\dagger\dagger) \qquad O^* = \tfrac{1}{2}\iint\limits_{\mathfrak{B}} \nabla z\, dx\, dy = \tfrac{1}{2}\iint\limits_{\mathfrak{B}} (p^2 + q^2)\, dx\, dy$$

erklärbare Relativoberfläche O^* eines Flächenstückes $\mathfrak{B}$ zwar an sich nicht invariant ist (gegenüber Bewegungen des isotropen Raumes), daß aber wohl den Extremalen des zugehörigen Variationsproblems, d. i. den isotropen Minimalflächen, invarianter Charakter zukommt.

Als isotrope Minimalflächen ergeben sich Flächen einer Klasse, die schon oft wegen ihrer funktionentheoretischen Bedeutung Interesse erregt hat. In der Tat handelt es sich nach (†) um die Integralflächen $z = z(x, y)$ der LAPLACEschen Gleichung

$$(\dagger\dagger\dagger) \qquad \Delta z(x, y) = 0,$$

die, wie man aus der Funktionentheorie weiß, als Extremalen des DIRICHLETschen Integrals (††) auftreten. Auch für diese wohl erstmalig vom Standpunkte der (euklidischen) Differentialgeometrie durch U. DINI, und später vollkommener durch K. KOMMERELL behandelten „Potentialflächen" steht in der Differentialgeometrie des isotropen Raumes ein neues adäquates

Forschungsmittel bereit, das jedoch systematisch erst in einer Fortsetzung dieser Arbeit angewandt werden soll. Hier mußte ich mich damit begnügen, in allgemeiner Darstellung die isotropen Minimalflächen als Extremalen des Variationsproblems der Relativoberfläche einzuführen und die Notwendigkeit des Verschwindens ihrer mittleren Krümmung abzuleiten. Ihre allgemeine geometrische Theorie, vor allem der Begriff der assoziierten und adjungierten Minimalflächen, die Möglichkeit, sie im isotropen Sinne in einem wohldefinierten und nichttrivialen Sinne aufeinander abzuwickeln, und Ähnliches konnte hier vorerst nur angedeutet werden. Als ein interessantes Beispiel, das die volle Analogie aufzeigen sollte, die mit der euklidischen, so wohl entwickelten Theorie der Minimalflächen besteht, habe ich das isotrope Gegenstück der EnnEPERschen Minimalflächen und die Schar ihrer Assoziierten als Abschluß der Arbeit in Kürze vorgeführt.

Inhaltsübersicht.

I. Die Geometrie des isotropen Raumes[1]).

1. Das absolute Gebilde. Ein Raum (x, y, z) soll isotrop heißen, wenn seine Metrik von einem schneidenden Geradenpaare seiner Fernebene ω

$$\omega \ldots t = 0 \tag{1, 1}$$

reguliert wird. Wir bezeichnen die Fernebene ω als absolute Ebene des isotropen Raumes und wählen als absolutes Geradenpaar die beiden konjugiert-komplexen Ferngeraden (i_1, i_2)

$$\left.\begin{aligned} x + iy &= 0 \\ t &= 0 \end{aligned}\right\} i_1, \qquad \left.\begin{aligned} x - iy &= 0 \\ t &= 0 \end{aligned}\right\} i_2. \tag{1, 2}$$

Ihr Schnittpunkt U ist der Fernpunkt der z-Achse. Wir nennen ihn den absoluten Punkt des isotropen Raumes.

Wegen der selbstdualen Struktur des absoluten Gebildes ist *die Geometrie des isotropen Raumes nach Lage und Maß völlig in sich dual.*

2. Die isotropen Bewegungen. Das absolute Geradenpaar (2) gestattet eine stetige achtgliedrige Gruppe G_8 räumlich-kollinearer Automorphien, die wir als die Ähnlichkeiten des isotropen Raumes bezeichnen. Sie lauten

$$(1, 3) \qquad \left.\begin{aligned} x' &= a + h_1 x - h_2 y \\ y' &= b + h_2 x + h_1 y \\ z' &= c + c_1 x + c_2 y + c_3 z \end{aligned}\right\} \ldots G_8.$$

Darin ist eine ausgezeichnete Untergruppe G_6 enthalten, deren Transformationen wir als Bewegungen des isotropen Raumes (oder kurz als isotrope Bewegungen) erklären wollen. Ihre Darstellung ist:

$$(1.4) \qquad \left.\begin{aligned} x' &= a + \cos\varphi \cdot x - \sin\varphi \cdot y \\ y' &= b + \sin\varphi \cdot x + \cos\varphi \cdot y \\ z' &= c + c_1 x + c_2 y + z \end{aligned}\right\} \ldots G_6.$$

Bezeichnen wir die Normalrisse der Raumfiguren auf die (x, y)-Ebene als ihre „Grundrisse", so gilt der Satz:

Die isotropen Bewegungen äußern sich im Grundrisse als gewöhnliche ebene euklidische Bewegungen[4]).

3. Abstand zweier Punkte und Winkel zweier Ebenen. Man kann im Sinne F. Kleins die Geometrie des isotropen Raumes als die Invariantentheorie seiner Bewegungsgruppe G_6(4) erklären. Dabei ergeben sich die folgenden metrischen Grundinvarianten:

Die *Entfernung d zweier Punkte* $P_\alpha(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha)$ ist definiert durch die Formel

$$(1, 5) \qquad d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$

der eine duale Formel für den *Winkel ϑ zweier Ebenen* π_α gegenübersteht. Sind nämlich

$$(1, 6) \qquad \pi_\alpha \ldots z = u_\alpha x + v_\alpha y + w_\alpha$$

die Gleichungen der Ebenen, so ist für den Winkel ϑ

$$(1, 7) \qquad \vartheta^2 = (u_2 - u_1)^2 + (v_2 - v_1)^2.$$

Dabei waren die beiden Punkte P_α als eigentliche vorausgesetzt und (dual) die beiden Ebenen π_α(6) als nicht-isotrop, d. h. als nicht z-parallel angenommen.

---

[4]) Allgemeiner kann man die sich aus (3) für $h_1 = \cos\varphi$, $h_2 = \sin\varphi$ ergebenden Transformationen als Bewegungen des isotropen Raumes auffassen. Auch für sie gilt unser Satz; im Gegensatze zu den Bewegungen (4) aber sind die Rauminhalte gegen diese allgemeineren „modularen Bewegungen" nicht invariant.

4. Ersatzinvarianten. *Diese Invarianten d und ϑ können verschwinden, ohne daß die beiden Punkte oder Ebenen identisch wären, nämlich dann, wenn die Punkte und Ebenen parallel sind,* d. h. wenn für ihre Koordinaten

$$x_1 = x_2 \quad \text{und} \quad y_1 = y_2 \tag{1, 8}$$

bzw. dual

$$u_1 = u_2 \quad \text{und} \quad v_1 = v_2 \tag{1, 9}$$

gilt. Die Grundrisse der Punkte decken sich dann, und die Ebenen sind im gewöhnlichen Sinne parallel.

In diesen Fällen gibt es als Ersatz andere (rationale) Invarianten, nämlich für die parallelen Punkte (8) ihre Spanne

$$l = z_2 - z_1, \tag{1, 10}$$

und für die parallelen Ebenen (9) ihre Distanz

$$\lambda = w_2 - w_1. \tag{1, 11}$$

5. Winkel zweier Geraden. Nach (5) *kann man den isotropen Abstand zweier Punkte aus ihrem Grundrisse in euklidischer Weise ablesen. Das gleiche gilt auch für den Winkel φ zweier Vektoren.*

Wenn also die Grundrisse der Vektoren

$$\mathfrak{x}_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha), \tag{1, 12}$$

die wir uns im Sinne von (5) als Einheitsvektoren denken, lauten

$$\bar{\mathfrak{x}}_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha), \tag{1, 13}$$

so gilt für ihren Winkel φ:

$$\begin{cases} \cos\varphi = (\bar{\mathfrak{x}}_1 \bar{\mathfrak{x}}_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2, \\ \sin\varphi = [\bar{\mathfrak{x}}_1 \bar{\mathfrak{x}}_2] = x_1 y_2 - x_2 y_1. \end{cases} \tag{1, 14}$$

6. Neigung zweier Geraden. Auch diese Invariante φ kann verschwinden, ohne daß die beiden Vektoren identisch wären, nämlich dann, wenn die Grundrißvektoren $\bar{\mathfrak{x}}_\alpha$ (13) zusammenfallen und die Vektoren $\mathfrak{x}_\alpha$ (12) selbst eine isotrope, d. i. z-parallele Ebene aufspannen. Auch in diesem Falle gibt es wieder eine *Ersatzinvariante*, nämlich die *Neigung* oder *Sperrung* ψ der beiden Vektoren, definiert durch

$$\psi = z_2 - z_1. \tag{1, 15}$$

7. Die vollisotrope Richtung. Nach (14) sind die nach dem absoluten Punkte U des isotropen Raumes zielenden vollisotropen Vektoren

$$\mathfrak{l} = (0, 0, 1) \tag{1, 16}$$

zu allen anderen Vektoren und damit auch zu allen Ebenen normal.

Es werden also im isotropen Raume die zu den Schmiegebenen einer Kurve normalen Binormalen und ebenso die zu den Tangentialebenen einer Fläche normalen Flächennormalen sämtlich zueinander parallel, nämlich vollisotrop sein.

8. Neigung einer Geraden gegen eine Ebene. Die isotropen Invarianten aller anderen Elementenpaare können aus den bisher erklärten unschwer abgeleitet werden.

Eine (nicht isotrope) Ebene π und eine sie schneidende (nicht vollisotrope) Gerade g z. B. bestimmen eine Bewegungsinvariante, ihre Neigung. Legt man nämlich durch die Gerade g die isotrope Ebene γ, so schneidet sie die Ebene π nach einer zweiten Geraden p. Die nach (15) erklärte Neigung von g und p ist die gesuchte Neigung der Geraden g gegen die Ebene π.

Dual hierzu wäre der Abstand eines (eigentlichen) Punktes P von einer Geraden g. Er äußert sich als euklidischer Abstand der Grundrisse dieser beiden Figuren.

In beiden Fällen sind wieder Grenzlagen möglich, die auf einfache Ersatzinvarianten führen.

9. Die metrische Dualität als Nullsystem oder Polarität. Durch das Nullsystem $\mathfrak{N}$

$$z - Z = Xy - Yx \tag{1, 17}$$

des Gewindes $\mathfrak{G}$

$$dz = x\,dy - y\,dx \tag{1, 18}$$

(und die dazu im Sinne der isotropen Raumgeometrie kongruenten Nullsysteme) werden die metrischen Größen dual gepaart. Der Winkel zweier Ebenen ist also gleich dem Abstande ihrer Nullpunkte usw. Damit können einfache geometrische Deutungen der isotropen Metrik gewonnen werden.

Gleiches gilt, wenn man vom Vorzeichen bei der Spanne paralleler Punkte, Ebenen usw. absieht, für die Polaritäten der beiden Drehparaboloide

$$z = \pm \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2) \tag{1, 19}$$

und ihrer Kongruenten, die wir als die Einheitskugeln des isotropen Raumes bezeichnen können.

10. Isotrope Kugeln, Kreise und Drehkegel. Allgemein werden wir nämlich als isotrope Kugeln die regulären Flächen zweiter Ordnung durch das absolute Geradenpaar (2) erklären, also die Drehparaboloide mit vollisotroper Durchmesserrichtung der Form

$$z = \frac{A}{2}(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D. \tag{1, 20}$$

Ihre ebenen Schnitte liefern die Kreise des isotropen Raumes. Es sind das für nicht-isotrope Schnittebenen Ellipsen mit kreisförmigen Grundrissen, für isotrope Schnittebenen aber Parabeln mit vollisotroper Durchmesserrichtung, sogenannte parabolische Kreise.

Dual dazu sind die Tangentenkegel der isotropen Kugeln im isotropen Raume als Drehkegel aufzufassen. Wie die Kreise gestatten sie eine eingliedrige isotrope Drehungsgruppe um eine vollisotrope Achse. Sie tragen eine einzige Schar von isotropen Kreisen. Diese liegen in parallelen Ebenen. Darunter kommt auch der Berührungskreis mit der Kugel vor. Ihre Erzeugenden sind gegen diese Ebenen gleich-geneigt. Die Fernebene insbesondere schneidet die Drehkegel nach sogenannten Fernkreisen, d. h. nach Kegelschnitten, welche die beiden absoluten Geraden (2) berühren. Die Berührungssehne soll als Achse des Fernkreises bezeichnet werden.

11. Die Geometrie der nichtisotropen Ebenen. Die in einer beliebigen nicht-isotropen Ebene durch die isotrope Bewegungsgruppe G_6 (4) induzierte Geometrie fällt mit jener parabolischen Geometrie zusammen, welche sich auf die beiden konjugiert komplexen Schnittpunkte der Ebene mit dem Paare der absoluten Geraden (2) stützt. Sie ist im Grundrisse mit der gewöhnlichen euklidischen Geometrie identisch.

Die Differentialgeometrie einer ebenen Kurve wird also, falls die Kurvenebene nicht-isotrop ist, identisch sein mit der gewöhnlichen euklidischen Differentialgeometrie des Kurvengrundrisses. Ihre Invarianten, wie die Bogenlänge s oder die Krümmung $\varkappa$ der Kurve können direkt ihrem Grundrisse entnommen werden.

12. Die Geometrie der isotropen Ebenen[5]). Von ganz neuartigem Charakter ist aber jene Geometrie, welche durch unsere Bewegungsgruppe G_6 (4) in einer isotropen Ebene hervorgerufen wird. Wegen der Bewegungsinvarianz der Begriffe genügt es, nur die isotrope Ebene

$$y = 0 \tag{1, 21}$$

zu studieren. In ihr wird durch G_6 eine dreigliedrige Gruppe G_3 von sogenannten Grenzbewegungen induziert, der Darstellung:

$$\left.\begin{aligned} x' &= a + x \\ z' &= c + c_1 x + z \end{aligned}\right\} \cdots G_3. \tag{1, 22}$$

Ihre metrischen Grundinvarianten, nämlich den (im Grundrisse ablesbaren) Abstand zweier Punkte und die Neigung zweier Geraden kennen wir schon aus den Nrn. 3 und 6. Das invariante Bogenelement der isotropen Ebene (21) ist

$$ds = dx. \tag{1, 23}$$

---

[5]) Vgl. H. Beck, Zur Geometrie der Minimalebene. Sitz.-Ber. Berlin. Math. Ges. **12** (1912), S. 14—30.

13. Abweichung und Normalkrümmung. *Die Krümmung $\varkappa$ einer Kurve*

$$z = f(x) \tag{1, 24}$$

der isotropen Ebene (21) *verschwindet* wegen ihres geradlinigen Grundrisses. Als Ersatz tritt an ihre Stelle die sogenannte *Abweichung* $\varkappa^*$ der Kurve, nämlich der Quotient aus Kontingenzsperrung der Tangenten und Bogenelement, d. i. der Ausdruck

$$\varkappa^* = \lim_{dx \to 0} \frac{f'(x + dx) - f'(x)}{dx} = f''(x). \tag{1, 25}$$

Durch Vorgabe dieser Krümmungsinvariante als Funktion des Bogens

$$\varkappa^* = \varkappa^*(s) \tag{1, 26}$$

ist die Kurve der isotropen Ebene bis auf ihre Lage, d. i. bis auf Grenzbewegungen aus G_3 (22) *bestimmt.*

Insbesondere sind die Kurven fester Abweichung die parabolischen Kreise. Sie gestatten, ähnlich den gewöhnlichen Kreisen, eine eingliedrige Gruppe von Bewegungen aus G_3 in sich.

Aus Gründen der Permanenz der euklidischen Terminologie werden wir insbesondere in der Flächentheorie die Abweichung einer Kurve der isotropen Ebene gerne auch als ihre Normalkrümmung und ihren Reziprokwert

$$R = \frac{1}{\varkappa^*} \tag{1, 27}$$

als den Radius der Normalkrümmung bezeichnen.

Man hat dann z. B. die folgende einfache geometrische Deutung: Der Radius R der Normalkrümmung der Kurve (24) *in einer isotropen Ebene ist gleich dem (elementaren, aber auch gegen die isotropen Bewegungen aus G_3 invarianten) Parameter des parabolischen Kreises, welcher die Kurve* (24) *an der betrachteten Stelle oskuliert.*

II. Kurventheorie des isotropen Raumes[1]).

14. Bogenelement. Nach (1, 5) ist das invariante Bogenelement ds des isotropen Raumes bestimmt durch die quadratische Differentialform des Ranges zwei

$$ds^2 = dx^2 + dy^2. \tag{2, 1}$$

Man kann also die Länge einer Raum- oder Flächenkurve direkt aus dem Grundriß ablesen.

15. Krümmung und Windung. Es sei nun

$$\mathfrak{x}(s) = \{x(s),\ y(s),\ z(s)\} \tag{2, 2}$$

eine bereits laut (1) auf ihren Bogen s bezogene Raumkurve und

$$\bar{\mathfrak{x}}(s) = \{x(s),\ y(s)\} \tag{2, 3}$$

ihr „Grundrißvektor“.

Die Raumkurve hat dann hinsichtlich der Bewegungsgruppe G_6 des isotropen Raumes zwei Differentialinvarianten niedrigster Ordnung, nämlich ihre Krümmung $\varkappa$, die man durch eine Verabredung sogar rational ausdrücken kann durch

$$\varkappa = [\bar{\mathfrak{x}}'\,\bar{\mathfrak{x}}''] = \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} \tag{2, 4}$$

und *die man direkt aus dem Grundrisse der Kurve (als dessen gewöhnliche Krümmung) ablesen kann*, und weiter ihre Windung oder Torsion τ, definiert durch

$$\tau = \frac{[\mathfrak{x}'\,\mathfrak{x}''\,\mathfrak{x}''']}{[\bar{\mathfrak{x}}'\,\bar{\mathfrak{x}}'']^2} = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2}\,. \tag{2, 5}$$

16. Begleitendes Dreibein. Frenetsche Formeln. Man kann mit der Raumkurve (2) invariant gegen isotrope Bewegungen ein begleitendes Dreibein verbinden, bestehend aus

1) dem Tangentenvektor $\mathfrak{t}$

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{x}'(s), \tag{2, 6}$$

der (im Sinne der isotropen Metrik) ein Einheitsvektor ist,

2) dem dazu normalen und in der Schmiegebene enthaltenen Hauptnormalenvektor $\mathfrak{h}$

$$\mathfrak{h} = \frac{1}{\varkappa}\,\mathfrak{x}''(s), \tag{2, 7}$$

der gleichfalls ein Einheitsvektor ist, und

3) dem zu diesen beiden Vektoren normalen Binormalenvektor $\mathfrak{b}$

$$\mathfrak{b} = (0, 0, 1), \tag{2, 8}$$

der vollisotrop und von der Spanne Eins ist.

Für sie gilt als Analogon der Frenetschen Formeln das folgende System von Ableitungsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{rcccc} \mathfrak{t}' = & \cdot & \varkappa\mathfrak{h} & \cdot \\ \mathfrak{h}' = & -\varkappa\mathfrak{t} & \cdot & +\tau\mathfrak{b} \\ \mathfrak{b}' = & \cdot & \mathfrak{o} & \cdot \end{array}\right\}. \tag{2, 9}$$

17. Kurven in isotropen Ebenen. Das begleitende Dreibein fehlt an solchen Stellen der Kurve, wo $\varkappa = 0$ ist. Wegen der Orthogonalität von $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{x}''$ ist dies reell nur dadurch möglich, daß der Vektor $\mathfrak{x}''$, der Hauptnormalenrichtung hat, vollisotrop ist, d. h.

$$\mathfrak{x}'' = z''\mathfrak{b} \tag{2, 10}$$

ist. Liegt dann kein Wendepunkt vor, d. h. ist $z'' \neq 0$, so ist die Schmiegebene an dieser Stelle isotrop.

Die Gleichung

$$\varkappa(s) \equiv 0 \tag{2, 11}$$

kennzeichnet danach die Kurven in isotropen Ebenen, deren Krümmungsinvariante nach Nr. **13** und (1, 25) die Größe

$$\varkappa^*(s) = z''(s) \tag{2, 12}$$

ist, welche als Abweichung oder Normalkrümmung der Kurve bezeichnet wurde.

Kurvenstellen mit vollisotropen Tangenten sind auszuschließen. Ebenso solche (komplexe) Stellen, deren Tangente isotrop ist, d. h. isotropen Grundriß hat.

18. Natürliche Gleichungen. Die natürlichen Gleichungen

$$\varkappa = \varkappa(s), \quad \tau = \tau(s) \tag{2, 13}$$

bestimmen, falls $\varkappa(s) \not\equiv 0$ ist, eine Raumkurve ihrer Gestalt nach, d. h. bis auf Bewegungen des isotropen Raumes. Insbesondere kennzeichnet so

$$\tau(s) \equiv 0 \tag{2, 14}$$

die Kurven in nichtisotropen Ebenen.

Ist jedoch $\varkappa(s) \equiv 0$, so liegt, wie erwähnt, die Kurve in einer isotropen Ebene, und zu ihrer Festlegung (bis auf isotrope Bewegungen) dient die neue natürliche Gleichung

$$\varkappa^* = \varkappa^*(s). \tag{2, 15}$$

19. Schraublinien und Kreise. Als einfache Beispiele erwähnen wir die Schraublinien des isotropen Raumes. Ihre Krümmung und Windung sind konstant:

$$\varkappa = \varkappa_0 \neq 0, \quad \tau = \tau_0 \neq 0; \tag{2, 16}$$

ihre Grundrisse sind Kreise der Krümmung $\varkappa_0$.

Für $\tau_0 = 0$ entstehen daraus die Kreise in nicht-isotropen Ebenen, das sind Ellipsen mit kreisförmigem Grundrisse.

Für die in isotropen Ebenen enthaltenen parabolischen Kreise ist

$$\varkappa = 0, \quad \varkappa^* = \varkappa_0^* = \text{const.} \neq 0. \tag{2, 17}$$

Wie schon in Nr. **13** erwähnt wurde, ist der Normalkrümmungsradius R eines parabolischen Kreises gleich seinem elementargeometrischen Parameter p, d. h.

$$R = \frac{1}{\varkappa^*} = p. \tag{2, 18}$$

Für

$$\varkappa = 0, \quad \varkappa_0^* = 0 \tag{2, 19}$$

ergeben sich schließlich die (weder isotropen noch vollisotropen) Geraden.

20. Die isotrope Geometrie der Ebenenscharen. Wir beenden diese Zusammenstellung mit der Bemerkung, daß sich der Theorie der Raumkurven vermöge der metrischen Dualität des isotropen Raumes eine formal völlig gleichartige Theorie der Ebenenscharen (Torsen) an die Seite stellen läßt.

Sind nämlich die Koordinaten (u, v, w) einer Ebene

$$z = ux + vy + w \tag{2, 20}$$

Funktionen eines willkürlichen Parameters t

$$\left.\begin{aligned} u &= u(t), \\ v &= v(t), \\ w &= w(t), \end{aligned}\right\} \cdots \mathfrak{U} = \mathfrak{U}(t), \tag{2, 21}$$

so läßt sich (dual zum Bogen einer Raumkurve) dieser Ebenenschar (Torse) im isotropen Raume ein *invarianter (natürlicher) Parameter* ϑ zuordnen, den man als ihren *konischen Winkel* bezeichnen könnte. Nach Formel (1, 7) hat man für ihn mit einer zur früheren analogen Bezeichnung:

$$d\vartheta^2 = du^2 + dv^2 = (\dot{u}^2 + \dot{v}^2)\, dt^2 = \dot{\overline{\mathfrak{U}}}^2(t)\, dt^2. \tag{2, 22}$$

Dual zur Krümmung und Torsion der Raumkurve besitzt auch die Ebenenschar $\mathfrak{U}(\vartheta)$, die wir uns auf den natürlichen Parameter ϑ bezogen denken, *zwei elementare Differentialinvarianten zweiter und dritter Ordnung*, nämlich

$$\left\{\begin{aligned} K &= [\overline{\mathfrak{U}}', \overline{\mathfrak{U}}''] = \begin{vmatrix} u' & v' \\ u'' & v'' \end{vmatrix}, \\ T &= \frac{[\mathfrak{U}', \mathfrak{U}'', \mathfrak{U}''']}{[\overline{\mathfrak{U}}', \overline{\mathfrak{U}}'']^2}. \end{aligned}\right. \tag{2, 23}$$

Diese Größen hängen natürlich in einfacher Weise mit Bogen s, Krümmung $\varkappa$ und Torsion τ der Gratlinie $\mathfrak{x}(s)$ der Ebenenschar zusammen. Man hat:

$$\left\{\begin{aligned} & d\vartheta = \tau\, ds, \\ & K = \frac{\varkappa}{\tau}, \qquad T = \frac{1}{\tau}. \end{aligned}\right. \tag{2, 24}$$

K ist also, mit einer von J. PLÜCKER stammenden Bezeichnung, die sogenannte *konische Krümmung* der Torse.

21. Die Biegung zylindrischer Ebenenscharen. Wie die Krümmung $\varkappa$ einer Raumkurve, *kann auch diese konische Krümmung K durch identisches Verschwinden als Invariante versagen.* Die Ebenen der Schar umhüllen dann einen Zylinder, dessen Erzeugendenrichtung nicht-vollisotrop (im komplexen auch nicht isotrop) ist. Es gibt in diesem Falle (der dual ist zu den Kurven in isotropen Ebenen) wieder eine einfache *Ersatzinvariante,* nämlich die Größe

$$K^* = \frac{d^2 w(\vartheta)}{d\vartheta^2} = w''(\vartheta). \tag{2,25}$$

Wir bezeichnen diese (zur Abweichung $\varkappa^*$ oder Normalkrümmung $\frac{1}{R}$ duale) Invariante als die „*Biegung*" *des Zylinders* und nennen ihren Kehrwert

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{K^*} \tag{2,26}$$

seinen „*Biegungsradius*".

Als einfache Anwendung bestimmen wir *die Biegung der (parabolischen) Zylinder, die sich der isotropen Kugel*

$$z = \frac{1}{2p}(x^2 + y^2) \tag{2,27}$$

vom Parameter p umschreiben lassen.

Wegen der isotropen Beweglichkeit der Kugel in sich ist diese Biegung für alle umschriebenen Zylinder vom gleichen konstanten Wert. Es genügt daher, einen einzigen Zylinder zu nehmen.

Zunächst ist

$$p(u^2 + v^2) + 2w = 0 \tag{2,28}$$

die Ebenengleichung der Kugel (27). Zusammen mit $v = 0$, der Ebenengleichung des Fernpunktes der y-Achse, gibt sie den in y-Richtung umschriebenen Zylinder. Dessen Parameterdarstellung kann also lauten:

$$\mathfrak{U}(t) \ldots u = t, \qquad v = 0, \qquad w = -\frac{p}{2}t^2. \tag{2,29}$$

Für ihn erhalten wir aus Formel (22) zunächst den natürlichen Parameter ϑ. Man findet einfach

$$\vartheta = t. \tag{2,30}$$

Daher liefert (25) für die Biegung den festen Wert

$$K^* = \frac{1}{\mathfrak{R}} = -p. \tag{2,31}$$

Also gilt der Satz:

Die Biegungen $K^* = \frac{1}{\Re}$ *aller einer isotropen Kugel vom Parameter* p *umschriebenen Zylinder sind konstant, nämlich gleich dem negativen Parameter.*

III. Geometrie der Streifen des isotropen Raumes.

22. Die Streifennormale. Die auf ihren Bogen s bezogene Raumkurve

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s) = \{x(s),\ y(s),\ z(s)\} \tag{3, 1}$$

und eine sie begleitende nicht isotrope Berührungsebene π bestimmen einen *Streifen* des isotropen Raumes. Wir denken uns die *Streifenebene* π aufgespannt durch den (nichtisotropen) Tangentenvektor $\mathfrak{t}$ der Raumkurve

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{x}'(s), \tag{3, 2}$$

der ein Einheitsvektor ist:

$$\bar{\mathfrak{t}}^2 = 1, \tag{3, 3}$$

und durch einen dazu normalen Einheitsvektor

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{y}(s) = \{\xi(s),\ \eta(s),\ \zeta(s)\},\quad \bar{\mathfrak{y}}^2 = 1, \tag{3, 4}$$

der gleichfalls nicht isotrop (also auch nicht vollisotrop) ist. Wir bezeichnen $\mathfrak{y}$ als den *Normalvektor des Streifens*; und nehmen an, daß sein Grundriß $\bar{\mathfrak{y}}$ aus dem Grundrisse $\bar{\mathfrak{t}}$ des Tangentenvektors $\mathfrak{t}$ durch positive Vierteldrehung hervorgehe. Seine Trägerin heißt auch Streifennormale.

23. Natürliche Gleichungen. Wenn dann die *Schmiegebene* σ *der Raumkurve nicht isotrop* ist, d. h. ihre Krümmung

$$\boxed{\varkappa \neq 0} \tag{3, 5}$$

ist und *die Raumkurve* (1) *also auch keiner isotropen Ebene angehört*, wird auch ihre Hauptnormale

$$\mathfrak{h} = \frac{1}{\varkappa}\,\mathfrak{x}'' \tag{3, 6}$$

nicht vollisotrop sein und sich im Grundriß mit der Streifennormalen $\mathfrak{y}$ decken. Die Vektortripel $\mathfrak{t}, \mathfrak{h}, \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{t}, \mathfrak{y}, \mathfrak{b}$ sind dann linear unabhängig und es ist

$$[\mathfrak{t}, \mathfrak{h}, \mathfrak{b}] = [\mathfrak{t}, \mathfrak{y}, \mathfrak{b}] = +1. \tag{3, 7}$$

Die Vektoren $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{y}$ unterscheiden sich dabei nur um einen vollisotropen Vektor, so daß etwa gilt:

$$\boxed{\mathfrak{y} = \mathfrak{h} - \vartheta(s)\cdot\mathfrak{b}}\,. \tag{3, 8}$$

Die Größe $\vartheta(s)$ ist eine isotrope Invariante des Streifens und bedeutet geometrisch den (nach Nr. 3 definierten) Winkel, unter dem die Schmiegebene σ gegen die Streifenebene π der Kurve geneigt ist.

Ist für die Kurve $\mathfrak{x}(s)$ *die Krümmung* $\varkappa(s) \neq 0$, *so ist durch die Gleichungen*

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s), \quad \vartheta = \vartheta(s) \tag{3, 9}$$

der Streifen und seine Lage im isotropen Raume eindeutig bestimmt. Durch seine drei Invarianten, d. h. durch die drei natürlichen Gleichungen

$$\varkappa = \varkappa(s), \quad \tau = \tau(s), \quad \vartheta = \vartheta(s) \tag{3, 10}$$

ist der Streifen bis auf seine Lage, d. i. bis auf isotrope Bewegungen festgelegt.

24. Ableitungsgleichungen. Man kann mit dem Streifen ein bewegungsinvariantes begleitendes Dreibein verknüpfen, bestehend aus der Kurventangente $\mathfrak{t}$, der Streifennormalen $\mathfrak{y}$ und der vollisotropen Binormalen $\mathfrak{b}$. Man hat dann nach den Frenetschen Formeln (2, 9)

$$\begin{aligned} \mathfrak{t}' &= \varkappa\mathfrak{h} = \varkappa(\mathfrak{y} + \vartheta\,\mathfrak{b}), \\ \mathfrak{y}' &= \mathfrak{h}' - \vartheta'\mathfrak{b} = -\varkappa\mathfrak{t} + (\tau - \vartheta')\,\mathfrak{b}, \\ \mathfrak{b}' &= \mathfrak{o}, \end{aligned}$$

und erhält insgesamt das folgende System von Ableitungsgleichungen:

$$\boxed{\begin{array}{llccc} \mathfrak{t}' & = & \cdot & \varkappa\mathfrak{y} & +\ \varkappa\vartheta\mathfrak{b} \\ \mathfrak{y}' & = & -\varkappa\mathfrak{t} & \cdot & +\ (\tau - \vartheta')\,\mathfrak{b} \\ \mathfrak{b}' & = & \cdot & \mathfrak{o} & \cdot \end{array}}\,. \tag{3, 11}$$

25. Die Invarianten des Streifens. Geodätische Streifen. Die drei hier auftretenden Koeffizienten liefern ein zu (10) *äquivalentes System von Invarianten des Streifens*, nämlich seine

$$\left\{ \begin{array}{lll} \textit{Geodätische Windung:} & a = \tau - \vartheta', \\ \textit{Normalkrümmung:} & b = \varkappa\,\vartheta, \\ \textit{Geodätische Krümmung:} & c = \varkappa. \end{array} \right. \tag{3, 12}$$

Durch Angabe von

$$a = a(s), \quad b = b(s), \quad c = c(s) \tag{3, 13}$$

als neuem System natürlicher Gleichungen ist der Streifen wieder bis auf seine Lage bestimmt.

Die geodätische Krümmung c des Streifens ist nach (12) *gleich der isotropen Krümmung der Streifenkurve, d. h. gleich der gewöhnlichen Krümmung des Kurvengrundrisses.*

Nach (3, 5) ist die geodätische Krümmung zunächst von Null verschieden genommen. Ihr *Verschwinden* kennzeichnet die sogenannten *geodätischen Streifen*, d. h. jene, deren Streifenkurve einer *isotropen Ebene* angehört. Deren *Grundriß* ist *geradlinig*, sie selbst sind also wirklich für das Bogenelement (2, 1) des isotropen Raumes für den Streifen *geodätische Linien.*

26. Die Erzeugende der Torse des Streifens. Ist $\mathfrak{z}$ der Ortsvektor eines laufenden Punktes der Berührungsebene des Streifens, so kann ein Vektor $\mathfrak{e}$ der *Erzeugenden der Torse des Streifens* jedenfalls in der Form geschrieben werden:

$$(3,14) \qquad \mathfrak{e} = \mathfrak{z} - \mathfrak{x} = \alpha\,\mathfrak{t} + \beta\,\mathfrak{y}.$$

Wir bezeichnen diese Tangente $\mathfrak{e}$ des Streifens als seine zur Kurventangente $\mathfrak{t}$ konjugierte Tangente. Sie liegt in der Tangentialebene π mit der Gleichung

$$(3,15) \qquad \pi \ldots [\mathfrak{z} - \mathfrak{x}, \mathfrak{t}, \mathfrak{y}] = 0$$

und ist ihr Schnitt mit der Nachbarebene, so daß auch die Gleichung

$$(3,16) \qquad \frac{d}{ds}[\mathfrak{z} - \mathfrak{x}, \mathfrak{t}, \mathfrak{y}] = 0$$

erfüllt ist. Die Ableitungsgleichungen (11) geben zusammen mit (8) dafür:

$$(3,17) \qquad \frac{d}{ds}[\mathfrak{z} - \mathfrak{x}, \mathfrak{t}, \mathfrak{y}] = [\mathfrak{z} - \mathfrak{x}, \varkappa\,\mathfrak{h}, -\vartheta\,\mathfrak{b}] + [\mathfrak{z} - \mathfrak{x}, \mathfrak{t}, a\,\mathfrak{b}] = 0,$$

woraus man im Verein mit (15) unter Beachtung von (14), (8) und (12) für α und β die Gleichung

$$(\alpha\,b + \beta a)\,[\mathfrak{t}, \mathfrak{h}, \mathfrak{b}] = 0$$

erhält, aus der man mittels (7) das einfache Ergebnis folgert:

$$(3,18) \qquad \alpha = a, \quad \beta = -b.$$

Damit ist die Erzeugende $\mathfrak{e}$ *der Torse des Streifens, oder die zur Kurventangente* $\mathfrak{t}$ *konjugierte Streifentangente gegeben durch den Vektor*

$$(3,19) \qquad \boxed{\mathfrak{e} = a\,\mathfrak{t} - b\,\mathfrak{y}}\,.$$

27. Krümmungs- und Schmiegstreifen. Aus dieser Formel kann man sofort die geometrische Bedeutung des Verschwindens der Invarianten a und b entnehmen. Es gilt:

$a \equiv 0$ *ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die konjugierten Tangentenpaare* $\mathfrak{t}$ *(Kurventangente) und* $\mathfrak{e}$ *(Erzeugende des Streifens) zueinander normal sind. Der Streifen wird dann als ein Krümmungsstreifen des isotropen Raumes bezeichnet.*

$b \equiv 0$ *aber ist notwendig und hinreichend dafür, daß die konjugierten Tangenten* $\mathfrak{t}$ *und* $\mathfrak{e}$ *zusammenfallen. Der Streifen ist dann ein Schmiegstreifen.*

Man beachte dabei, daß seit (5) immer $\varkappa \neq 0$ angenommen war. Der Streifen sollte also nach Nr. **23** kein geodätischer sein, d. h. seine Kurve (1) nicht einer isotropen Ebene angehören.

Man ergänzt aber aus seiner Definition leicht, daß *ein solcher geodätischer Streifen stets dann und auch nur dann ein Krümmungsstreifen ist, wenn er zylindrisch ist und seine Erzeugenden normal (d. h. im Grundriß normal) sind zu der isotropen Ebene, der seine Trägerkurve angehört.*

Ferner ist ein geodätischer Streifen ersichtlich dann und nur dann ein Schmiegstreifen, wenn er geradlinig ist.

28. Neue Darstellung der Streifeninvarianten. Aus den Ableitungsgleichungen (11) erhält man die folgenden *Darstellungen der drei Streifeninvarianten* a, b, c:

(3, 20)
$$\begin{cases} a = [\mathfrak{x}', \mathfrak{y}, \mathfrak{y}'], \\ b = -[\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \mathfrak{y}], \\ c = [\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \mathfrak{b}]. \end{cases}$$

Wir wollen mit ihrer Hilfe die wichtigen *geometrischen Bedeutungen von a und b* angeben. Die Deutung der geodätischen Krümmung c ist uns aus Nr. 23 schon bekannt.

29. Erste Deutung der Normalkrümmung. *Um eine erste geometrische Deutung der Normalkrümmung b zu erhalten, projizieren wir die Raumkurve $\mathfrak{x}(s)$ in der Richtung der Streifennormalen $\mathfrak{y}$* (8) *des Kurvenpunktes s_0 auf die $\mathfrak{x}$ in s_0 berührende isotrope Ebene γ.* Ist $\mathfrak{z}(s)$ der Ortsvektor dieser Projektion, so ist $\mathfrak{z} - \mathfrak{x}_0$ einerseits als Vektor der in $\mathfrak{x}_0$ berührenden isotropen Ebene γ darstellbar in der Form

(3, 21)
$$\mathfrak{z} - \mathfrak{x}_0 = A\mathfrak{t}_0 + B\mathfrak{b};$$

andererseits hat man laut Konstruktion von $\mathfrak{z} - \mathfrak{x}_0$ als Projektion von $\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0$ in Richtung von $\mathfrak{y}$

(3, 22)
$$\mathfrak{z} - \mathfrak{x}_0 = \mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0 - C\mathfrak{y}_0.$$

Durch Vergleich der rechten Seiten dieser Darstellungen (21) und (22) folgt wegen (8)

(3, 23)
$$\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0 = A\mathfrak{t}_0 + B\mathfrak{b} + C(\mathfrak{h}_0 - \vartheta_0\mathfrak{b}),$$

d. h. A, B, C sind die Koordinaten der Zerlegung des Vektors $\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0$ in Richtung der Vektoren $\mathfrak{t}_0$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{h}_0 - \vartheta_0\mathfrak{b}$. Also ist wegen (7)

(3, 24)
$$\begin{cases} A = [\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0, \mathfrak{h}_0, \mathfrak{b}], \\ B = [\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0, \mathfrak{t}_0, \mathfrak{h}_0 - \vartheta_0\mathfrak{b}], \\ C = -[\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0, \mathfrak{t}_0, \mathfrak{b}]. \end{cases}$$

Die gesuchte Projektion $\mathfrak{z}$ von $\mathfrak{x}$ auf die berührende isotrope Ebene γ lautet daher nach (21) oder (22)

(3, 25)
$$\mathfrak{z} = \mathfrak{x}_0 + [\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0, \mathfrak{h}_0, \mathfrak{b}]\,\mathfrak{t}_0 + [\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0, \mathfrak{t}_0, \mathfrak{h}_0 - \vartheta_0\mathfrak{b}]\,\mathfrak{b}.$$

Von dieser Kurve $\mathfrak{z}(s)$ der isotropen Ebene γ wollen wir nun an der Stelle s_0 die Abweichung $\varkappa_0^*$ oder Normalkrümmung $\frac{1}{R}$ berechnen. Es ist nach (1, 26) und (1, 27) wegen der Gleichheit der Bogenelemente ds und $d\sigma$ der Kurven $\mathfrak{x}(s)$ und $\mathfrak{z}(s)$ an der Berührungsstelle s_0

$$(3,26) \qquad \varkappa_0^* = \frac{1}{R} = Z''(s_0),$$

wenn $X(s)$, $Y(s)$, $Z(s)$ die Koordinaten der Punkte von $\mathfrak{z}(s)$ sind.

Man hat zunächst aus (25)

$$(3,27) \qquad \begin{cases} \mathfrak{z}' = [\mathfrak{x}', \mathfrak{h}_0, \mathfrak{b}]\,\mathfrak{t}_0 + [\mathfrak{x}', \mathfrak{t}_0, \mathfrak{h}_0 - \vartheta_0\mathfrak{b}]\,\mathfrak{b}, \\ \mathfrak{z}'' = [\mathfrak{x}'', \mathfrak{h}_0, \mathfrak{b}]\,\mathfrak{t}_0 + [\mathfrak{x}'', \mathfrak{t}_0, \mathfrak{h}_0 - \vartheta_0\mathfrak{b}]\,\mathfrak{b} \end{cases}$$

und erhält für die Stelle $s = s_0$ wegen (6) und (7)

$$(3,28) \qquad \mathfrak{z}'' = \varkappa_0\vartheta_0\mathfrak{b}.$$

Also ist

$$(3,29) \qquad Z''(s_0) = \varkappa_0\vartheta_0$$

und für die gesuchte Abweichung oder Normalkrümmung von $\mathfrak{z}(s)$ ergibt sich nach (12) und (26):

$$(3,30) \qquad \varkappa_0^* = \frac{1}{R} = \varkappa_0\,\vartheta_0 = b.$$

30. Zusammenfassend haben wir also folgende erste Deutung der Normalkrümmung des Streifens:

Projiziert man die Kurve $\mathfrak{x}(s)$ des Streifens in der Richtung der Streifennormalen $\mathfrak{y}_0$ des Kurvenpunktes $\mathfrak{x}(s_0)$ auf die isotrope Ebene γ, welche die Kurve $\mathfrak{x}$ im Punkte s_0 berührt, so ist die Normalkrümmung (= Abweichung) $\varkappa_0^* = \frac{1}{R}$ der entstehenden Projektion $\mathfrak{z}(s)$ im Punkte s_0 gleich der Normalkrümmung b des Streifens in s_0.

Für den Kehrwert

$$(3,31) \qquad R = \frac{1}{b},$$

d. h. für den Radius der Normalkrümmung des Streifens ergibt sich aus Nr. **13** eine einfache geometrische Deutung: *R ist gleich dem Parameter des parabolischen Schmiegkreises der eben genannten Projektion $\mathfrak{z}(s)$ im Punkte s_0.*

31. Zweite Deutung der Normalkrümmung, Meusniersche Kugel. Es gibt noch eine *zweite geometrische Deutung für die Normalkrümmung b eines Streifens*, die für uns gleichfalls von Wichtigkeit ist. Um sie direkt zu gewinnen, berechnen wir den (gegen isotrope Bewegungen invarianten) Parameter p jener isotropen Berührungskugel des Streifens, welche im

Punkte s_0 die Kurve $\mathfrak{x}(s)$ des Streifens oskuliert. Wir bezeichnen sie kurz als die isotrope Meusnier-Kugel des Streifens an der Stelle s_0.

Wir suchen also (Nr. **10**) die isotrope Kugel

$$(3, 32)\qquad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + u(x - x_0) + v(y - y_0) + w(z - z_0) = 0,$$

welche schon den Punkt $\mathfrak{x}_0 = \mathfrak{x}(s_0)$ enthält und die man mittels des Hilfsvektors

$$(3, 33)\qquad \mathfrak{u} = (u, v, w)$$

kürzer so schreiben kann:

$$(3, 34)\qquad (\bar{\mathfrak{x}} - \bar{\mathfrak{x}}_0)^2 + \mathfrak{u} \cdot (\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0) = 0,$$

so einzurichten, daß sie die Kurve $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s)$ im Punkte s_0 oskuliert.

Die Kugelgleichung (32) soll also durch die Taylor-Entwicklung der Kurve $\mathfrak{x}(s)$ bei s_0

$$(3, 35)\qquad \mathfrak{x}(s_0 + ds) = \mathfrak{x}_0 + \mathfrak{x}_0' ds + \frac{\mathfrak{x}_0''}{2!} ds^2 + \cdots$$

bis auf Glieder dritter und höherer Ordnung in ds identisch erfüllt werden. Somit ist

$$(3, 36)\qquad \begin{cases} \mathfrak{u} \cdot \mathfrak{x}_0' = 0, \\ \bar{\mathfrak{x}}_0'^2 + \frac{1}{2}\, \mathfrak{u} \cdot \mathfrak{x}_0'' = 0. \end{cases}$$

Wegen $\bar{\mathfrak{x}}_0'^2 = 1$ ergibt sich aus der letzten Gleichung

$$(3, 37)\qquad \mathfrak{u} \cdot \mathfrak{x}_0'' = -2.$$

Soll die Oskulationskugel noch weiter den Streifen berühren, so muß die Streifennormale von s_0, d. i. die Gerade

$$(3, 38)\qquad \mathfrak{x}^* = \mathfrak{x}_0 + \lambda \mathfrak{y}_0$$

mit ihr zwei zusammenfallende Schnittpunkte haben. Wenn wir also dies $\mathfrak{x}^*$ an Stelle von $\mathfrak{x}$ in (34) eintragen, so muß die entstehende quadratische Gleichung

$$\lambda^2 \bar{\mathfrak{y}}^2 + \lambda (\mathfrak{u}\mathfrak{y}_0) = 0$$

die Doppelwurzel $\lambda = 0$ aufweisen. Somit ist also

$$(3, 39)\qquad \mathfrak{u}\mathfrak{y}_0 = 0.$$

Tragen wir hier für $\mathfrak{y}_0$ seine Bedeutung (8) ein, so entsteht die Gleichung

$$\mathfrak{u} \cdot (\mathfrak{h}_0 - \vartheta_0 \mathfrak{b}) = \mathfrak{u} \cdot \left(\frac{\mathfrak{x}_0''}{\varkappa_0} - \vartheta_0 \mathfrak{b}\right) = 0,$$

oder, da $\varkappa_0 \neq 0$ war, die Gleichung

$$(3, 40)\qquad \mathfrak{u} \cdot \mathfrak{x}_0'' - \varkappa_0 \vartheta_0 (\mathfrak{u}\mathfrak{b}) = 0.$$

Nun ist nach (33) $(\mathfrak{u}\mathfrak{b}) = w$ und daher schließlich wegen (37)

$$(3, 41)\qquad \varkappa_0 \vartheta_0 w = -2.$$

Beachtet man jetzt die Gleichung (30) für den Normalkrümmungsradius R und die Tatsache, daß die isotrope Kugel (32) den Parameter

$$p = -\frac{w}{2} \tag{3, 42}$$

hat, so folgt das einfache Ergebnis

$$R = p. \tag{3, 43}$$

32. Zusammenfassend gewinnen wir also die folgende zweite Deutung der Normalkrümmung eines Streifens:

Der Radius R der Normalkrümmung $b = \frac{1}{R}$ eines Streifens des isotropen Raumes ist gleich dem Parameter p seiner Meusnier-Kugel, d. h. jener isotropen Kugel, welche den Streifen berührt und dabei die Trägerkurve $\mathfrak{x}$ des Streifens oskuliert.

33. Zusammenhang beider Deutungen. Dritte Deutung der Normalkrümmung. Um den *Zusammenhang zwischen unseren beiden Deutungen der Normalkrümmung eines Streifens* herzustellen, bemerken wir, daß (Nr. **13**) der Parameter p einer isotropen Kugel gleich ist den Normalkrümmungsradien R aller auf ihr liegenden parabolischen Kreise. Greift man also auf der Meusnier-Kugel des Streifens jenen parabolischen Kreis heraus, der seine Trägerkurve $\mathfrak{x}(s)$ berührt, so ist auch sein Parameter p gleich dem Normalkrümmungsradius R des Streifens. Nun überzeugt man sich sofort, daß dieser parabolische Berührungskreis mit dem Schmiegkreis der Projektion $\mathfrak{z}(s)$ der Streifenkurve $\mathfrak{x}(s)$ in Richtung der Streifennormalen $\mathfrak{y}(s_0)$ auf die $\mathfrak{x}(s)$ in s_0 berührende isotrope Ebene γ zusammenfällt, so daß in der Tat die zweite Deutung der Normalkrümmung eines Streifens auf die erste zurückführt.

Zugleich folgt aus diesem Zusammenhange eine dritte wichtige Deutung für die Normalkrümmung eines Streifens: *Schneidet man die Torse des Streifens mit der isotropen Berührungsebene der Streifenkurve, so liegt der parabolische Schmiegkreis der entstehenden Schnittkurve auf der Meusnier-Kugel. Der Parameter p des parabolischen Schmiegkreises ist gleich dem Normalkrümmungsradius R des Streifens.*

Man kann das natürlich auch direkt, etwa mit Hilfe der kanonischen Entwicklung der Raumkurve nachweisen.

34. Die Deutung der geodätischen Windung. Nachdem die geodätische Krümmung c und die Normalkrümmung b eines Streifens des isotropen Raumes ihre geometrischen Deutungen gefunden haben, ist es noch unsere Aufgabe, auch für seine geodätische Windung $a = \tau - \vartheta'$ eine elementare Deutung zu ermitteln.

Wir betrachten hierzu die von den Streifennormalen (Nr. 22) gebildete Regelfläche. Deren Darstellung ist

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{x}(s) + t \cdot \mathfrak{y}(s). \tag{3, 44}$$

Zwei Nachbarerzeugende $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{z} + d\mathfrak{z}$ bestimmen einen Winkel $d\lambda$ (der im Grundriß direkt ablesbar ist) und eine auf ihrer vollisotropen Transversalen, d. h. auf ihrem „Gemeinlot", ablesbare Lotspanne dl. Wir suchen den „Drall" p

$$p = \frac{dl}{d\lambda} \tag{3, 45}$$

der Regelfläche zu berechnen.

35. Das Gemeinlot trifft die Erzeugende $\mathfrak{z}$ (44) an jener Stelle t, wo sich die Nachbarerzeugende $\mathfrak{z} + d\mathfrak{z}$ von ihr nur um einen vollisotropen Vektor $d\mathfrak{z}$ unterscheidet. Nun ist der Vektor $d\mathfrak{z}$ nach (44) und den Ableitungsgleichungen (11)

$$\begin{aligned} d\mathfrak{z} &= (\mathfrak{x}' + t\mathfrak{y}')\, ds \\ &= [(1 - \varkappa t)\mathfrak{t} + t(\tau - \vartheta')\mathfrak{b}]\, ds. \end{aligned} \tag{3, 46}$$

Er ist vollisotrop, wenn

$$t = \frac{1}{\varkappa} \tag{3, 47}$$

ist. Dieser Wert liefert also, in (44) eingetragen, die isotrope Striktionslinie dervon den Streifennormalen gebildeten Regelfläche (44); in (46) eingetragen, ergibt sich

$$d\mathfrak{z} = \frac{\tau - \vartheta'}{\varkappa}\, ds \cdot \mathfrak{b}, \tag{3, 48}$$

so daß man die Lotspanne

$$dl = \frac{\tau - \vartheta'}{\varkappa}\, ds \tag{3, 49}$$

erhält.

Der Winkel $d\lambda$ benachbarter Streifennormalen ist gleich dem Winkel benachbarter Normalen des Grundrisses der Kurve $\mathfrak{x}(s)$ unseres Streifens, d. h. man hat

$$d\lambda = \varkappa\, ds. \tag{3, 50}$$

Somit ist der Drall der von den Streifennormalen (44) *gebildeten Regelfläche*

$$p = \frac{dl}{d\lambda} = \frac{\tau - \vartheta'}{\varkappa^2} = \frac{a}{c^2}, \tag{3, 51}$$

worin die gesuchte geometrische Deutung der geodätischen Windung a des Streifens enthalten ist.

36. Die Sätze von Beltrami und Joachimsthal. Krümmungsstreifen des isotropen Raumes waren (Nr. 25) jene, deren geodätische Windung

$$a = \tau - \vartheta' \tag{3, 52}$$

verschwindet.

Aus ihrer Definition folgt, daß *die geodätische Windung eines Streifens sich nicht ändert, wenn man seine Berührungsebenen* π *um die darin liegenden Kurventangenten* $\mathfrak{t}$ *durch konstante Winkel* ϑ^* *dreht.* In der Tat wird dabei nur ϑ (d. i. der Neigungswinkel von π gegen die Schmiegebene der Streifenkurve) durch $\vartheta + \vartheta^*$ ersetzt und a bleibt ungeändert.

Für Krümmungsstreifen folgen daraus die Übertragungen der bekannten Sätze von F. Joachimsthal und der hierzu metrisch-dualen Sätze von E. Beltrami auf den isotropen Raum. Bezeichnet man als Krümmungslinie einer Fläche eine solche, deren Berührungsstreifen ein Krümmungsstreifen ist, so gilt:

Satz von Joachimsthal. Im isotropen Raume folgt aus je zweien der folgenden Eigenschaften die dritte: 1) Der von zwei Flächen F_1 *und* F_2 *längs ihrer Schnittkurve c gebildete Schnittwinkel ist konstant; 2) Die Schnittkurve c ist auf* F_1 *Krümmungslinie; 3) Die Schnittkurve c ist auf* F_2 *Krümmungslinie.*

Satz von Beltrami. Im isotropen Raume folgt aus je zweien der folgenden Eigenschaften die dritte: 1) Die von zwei Flächen F_1 *und* F_2 *auf den Erzeugenden der gemeinsam umschriebenen Torse* Γ *abgeschnittenen Strecken haben konstante Länge; 2) Die Torse* Γ *berührt* F_1 *nach einer Krümmungslinie; 3) Die Torse* Γ *berührt* F_2 *nach einer Krümmungslinie.*

37. Geodätische Streifen. Im ganzen letzten Abschnitt war nach (5) für die Streifenkurve $\mathfrak{x}(s)$ die Krümmung $\varkappa(s) \neq 0$ angenommen worden.

Es bliebe also noch die *Theorie der geodätischen Streifen* zu entwickeln, d. h. jener, für deren Kurve $\mathfrak{x}(s)$ $\varkappa(s) \equiv 0$ ist. Es sind das die *Streifen über Kurven in isotropen Ebenen.*

Wir übergehen diese, der allgemeinen durchaus analogen Theorie hier aus Gründen der Kürze. Der Leser wird sie leicht selber ergänzen können. Im übrigen wird sie in einer späteren Abhandlung dieser Reihe benötigt und dort ausführlicher entwickelt werden.

38. Dualisierung. Da die Figur des Streifens in sich dual ist, im isotropen Raume außerdem die Metrik in sich duale Struktur hat, *kann man die Differentialgeometrie der Streifen auch in dualer Weise entwickeln.* Man gelangt so zu drei Streifeninvarianten A, B, C, welche in einfacher Weise mit unseren Invarianten a, b, c zusammenhängen.

IV. Elemente der Flächentheorie des isotropen Raumes.

39. Bezeichnungen. Es sei

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v) \tag{4, 1}$$

der Ortsvektor eines Flächenpunktes

$$\left.\begin{aligned} x &= x(u, v), \\ y &= y(u, v), \\ z &= z(u, v) \end{aligned}\right\} \cdots \mathfrak{x}(u, v) \tag{4, 2}$$

einer auf die Gaussschen Parameter (u, v) bezogenen Fläche des isotropen Raumes. Sein Grundrißvektor

$$\bar{\mathfrak{x}} = \bar{\mathfrak{x}}(u, v) \tag{4, 3}$$

hat die Koordinaten

$$\left.\begin{aligned} x &= x(u, v) \\ y &= y(u, v) \end{aligned}\right\} \cdots \bar{\mathfrak{x}}(u, v). \tag{4, 4}$$

Alle auftretenden Funktionen seien — wenigstens in geeigneten gemeinsamen Existenzbereichen $\{u, v\}$ — mit allen benötigten Regularitäts- und Ableitungseigenschaften ausgestattet.

40. Reguläre Flächen. Wir setzen zweckmäßig weiter voraus, daß die Funktionaldeterminante von (4) im betrachteten (u, v)-Bereiche nicht verschwinde:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = [\bar{\mathfrak{x}}_u \bar{\mathfrak{x}}_v] \neq 0. \tag{4, 5}$$

Es sollen also insbesondere die *Zylinder mit vollisotroper Erzeugendenrichtung* von unserer Untersuchung *ausgeschlossen* sein, für welche wegen des kurvenhaften Grundrisses die Funktionaldeterminante (5) identisch verschwindet. Deren besondere (einfache) Theorie müßte für sich entwickelt werden; sie wird aber einstweilen noch nicht benötigt.

Die zugelassenen Flächen können also jedenfalls in der expliziten Form

$$z = z(x, y) \tag{4, 6}$$

dargestellt werden.

Flächenpunkte mit isotropen Tangentialebenen sind nach (5) gleichfalls ausgeschlossen. Das Netz der Gaussschen Parameterlinien der Fläche erscheint wegen (5) im Grundriß im untersuchten Bereiche überall regulär.

41. Bogenelement. Für das Bogenelement ds der Fläche (1) erhält man nach (2, 1)

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = d\bar{\mathfrak{x}}^2 = (\bar{\mathfrak{x}}_u\, du + \bar{\mathfrak{x}}_v\, dv)^2. \tag{4, 7}$$

Wenn man die isotropen Fundamentalgrößen erster Art einführt:

$$(4,8)\qquad \begin{cases} E = \bar{\mathfrak{x}}_u^2 = x_u^2 + y_u^2, \\ F = \bar{\mathfrak{x}}_u \bar{\mathfrak{x}}_v = x_u x_v + y_u y_v, \\ G = \bar{\mathfrak{x}}_v^2 = x_v^2 + y_v^2, \end{cases}$$

ergibt sich die erste Grundform der Flächentheorie des isotropen Raumes:

$$(4,9)\qquad \boxed{I = ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}.$$

Wegen

$$(4,10)\qquad W^2 = EG - F^2 = [\bar{\mathfrak{x}}_u, \bar{\mathfrak{x}}_v]^2 > 0$$

ist sie im ganzen Bereiche positiv-definit. Hinsichtlich des Vorzeichens von W wollen wir übereinkommen, in Hinkunft

$$(4,11)\qquad W = \sqrt{EG - F^2} = [\bar{\mathfrak{x}}_u, \bar{\mathfrak{x}}_v]$$

zu setzen.

42. Winkel- und Flächenmetrik. Geodätische Krümmung. Nach (7) *stimmt die* RIEMANN*sche Metrik* (9) *der Flächen des isotropen Raumes überein mit der Euklidischen Metrik ihres Grundrisses.*

Das gilt insbesondere für die *Winkelmetrik*. Z. B. ist auch hier $F = 0$ kennzeichnend für *orthogonale Parameternetze.*

Entsprechend kann man auch das gegen isotrope Bewegungen invariante elementare Inhaltsmaß $f_{\mathfrak{B}}$ eines Flächenstückes $\mathfrak{B}$ direkt dem Grundriß $\mathfrak{B}'$ entnehmen. Es gilt also folgende *elementare Inhaltsformel*:

$$(4,12)\qquad f_{\mathfrak{B}} = \iint_{\mathfrak{B}'} dx\,dy = \iint_{\mathfrak{B}} \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,du\,dv = \iint_{\mathfrak{B}} W\,du\,dv.$$

Die *geodätische Krümmung* c einer Flächenkurve stimmt nach Nr. 25 mit der elementaren Krümmung $\varkappa$ ihres Grundrisses überein. Man erhält sie in der RIEMANNschen Metrik (9) in bekannter Weise. Ist die Kurve etwa durch die Gleichung $\varphi(u, v) = 0$ gegeben, so kann man ihre geodätische Krümmung $\varkappa$ in parameterinvarianter Weise mittels der hinsichtlich der ersten Grundform (9) zu nehmenden BELTRAMI*schen Differentiatoren*[6] $\nabla\varphi$ und $\Delta\varphi$ durch folgende BELTRAMI*sche Formel* berechnen, die in ihrer ausführlicheren Form von BONNET herrührt:

$$(4,13)\qquad \begin{cases} \varkappa = -\dfrac{\Delta\varphi}{\sqrt{\nabla\varphi}} - \nabla\left(\varphi, \dfrac{1}{\sqrt{\nabla\varphi}}\right) \\ \quad = \dfrac{1}{W}\left\{\left(\dfrac{F\varphi_v - G\varphi_u}{\sqrt{E\varphi_v^2 - 2F\varphi_u\varphi_v + G\varphi_u^2}}\right)_u + \left(\dfrac{F\varphi_u - E\varphi_v}{\sqrt{E\varphi_v^2 - 2F\varphi_u\varphi_v + G\varphi_u^2}}\right)_v\right\}. \end{cases}$$

[6]) Für deren bekannte Definition vgl. die Formeln (7, 4) und (5, 4).

43. Absolutkrümmung und Geodätische Linien. *Die Gausssche Krümmung des Bogenelementes* (9), *die wir als die absolute Krümmung K_a der Fläche des isotropen Raumes bezeichnen, ist stets identisch Null.*

Diese Tatsache, von der wir einige metrische Auswirkungen soeben in Nr. 42 verspürten, ist es vor allem, welche es mit sich bringt, daß die Flächentheorie des isotropen Raumes in mancher Hinsicht ein einfacheres und durchsichtigeres Gepräge trägt, als man es etwa vom euklidischen Raume her gewöhnt ist. Es kommt zu dieser Eigenschaft der inneren Geometrie der Flächen noch die besondere Eigenart der metrischen Struktur des isotropen Raumes, in den die Fläche eingebettet ist. Diese wirkt sich gleichfalls schon in obigen Theoremen aus, ebenso wie z. B. in der uns aus Nr. 7 geläufigen Tatsache, daß alle *Flächennormalen untereinander parallel*, nämlich von *vollisotroper Richtung* sind. Eine Folge von alledem ist dann der Satz:

Auf den Flächen des isotropen Raumes haben die Geodätischen geradlinige Grundrisse. Sie werden aus der Fläche von den isotropen Ebenen ausgeschnitten.

44. Allgemeine Bemerkung über isotrope Flächentheorie. Gleichwohl wäre es sehr voreilig, etwa den Schluß zu ziehen, daß die Flächentheorie oder die Geometrie des isotropen Raumes überhaupt uninteressant oder gar trivial sein müßte. *Man darf nämlich den Umstand nicht übersehen (der gerade der isotropen Raumgeometrie besonderes Interesse verleiht), daß im isotropen Raume an die Stelle der (gelegentlich oder stets) durch identisches Verschwinden versagenden Invarianten immer gewisse andere neue Größen als Ersatzinvarianten treten.* So tritt gelegentlich, wie wir aus den Nrn. 3—6 wissen, an die Stelle der Länge einer Strecke ihre Spanne, oder an die Stelle des Winkels zweier Richtungen ihre Sperrung oder Neigung; oder es tritt, wie aus den Nrn. 17—19 bekannt ist, gelegentlich an die Stelle der Krümmung einer ebenen oder gewundenen Kurve ihre Abweichung (= Normalkrümmung) usw.

In gleicher Weise wird sich uns in der Flächentheorie des isotropen Raumes an Stelle der durch identisches Verschwinden stets versagenden Absolutkrümmung K_a (d. i. der Gaussschen Krümmung ihres isotropen Bogenelementes) als Ersatz von selbst eine andere Invariante darbieten, die wir als ihre Relativkrümmung $K_r = K$ bezeichnen werden. *Mit ihrer Hilfe gestaltet sich nun auch die Flächentheorie des isotropen Raumes im Wesen ebenso vielgestaltig und formenreich, wie die eines anderen Raumes.*

Ein, wie mir scheint, sehr schlagender Beleg hierfür ist z. B. die von mir bereits an anderer Stelle[2]) entwickelte Theorie der Flächen konstanter Relativkrümmung des isotropen Raumes. Ein weiterer Beleg dafür wäre die Theorie der isotropen Minimalflächen.

45. Die Streifennormale einer Flächenkurve. Wir wollen nun zur Entwicklung der Krümmungstheorie der Flächen des isotropen Raumes schreiten, und bestimmen zunächst die Normalkrümmung b eines durch die Flächenkurve

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s) \tag{4, 14}$$

gegebenen Flächenstreifens.

Nach den Formeln (3, 20) und (3, 30) ist

$$b = \frac{1}{R} = -[\mathfrak{x}'\mathfrak{x}''\mathfrak{y}], \tag{4, 15}$$

wobei sich für die *Tangente* $\mathfrak{x}'$ und *Hauptnormale* $\mathfrak{x}''$ der Flächenkurve ergibt:

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{x}' &= \mathfrak{x}_u \frac{du}{ds} + \mathfrak{x}_v \frac{dv}{ds}, \\ \mathfrak{x}'' &= \mathfrak{x}_{uu}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\,\mathfrak{x}_{uv}\frac{du}{ds}\,\frac{dv}{ds} + \mathfrak{x}_{vv}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + \mathfrak{x}_u \frac{d^2u}{ds^2} + \mathfrak{x}_v \frac{d^2v}{ds^2}. \end{aligned}\right. \tag{4, 16}$$

Die *Streifennormale* $\mathfrak{y}$ läßt sich als Linearkombination der Tangentenvektoren $\mathfrak{x}_u$ und $\mathfrak{x}_v$ so bestimmen, daß 1) $\mathfrak{y} \perp \mathfrak{x}'$, d. h. $(\overline{\mathfrak{x}'\mathfrak{y}}) = 0$ und 2) $[\mathfrak{x}'\mathfrak{y}\mathfrak{b}] = +1$ ist. Man findet leicht

$$\mathfrak{y} = -\frac{1}{W}\left\{\left(F\frac{du}{ds} + G\frac{dv}{ds}\right)\mathfrak{x}_u - \left(E\frac{du}{ds} + F\frac{dv}{ds}\right)\mathfrak{x}_v\right\}. \tag{4, 17}$$

46. Die Normalkrümmung. Um die gewünschte Normalkrümmung $b = \frac{1}{R}$ zu errechnen, tragen wir (16) und (17) in die Determinante (15) ein, und entwickeln diese nach der zweiten Zeile. Führen wir die isotropen Fundamentalgrößen zweiter Art ein:

$$\left\{\begin{aligned} L &= \frac{[\mathfrak{x}_u\,\mathfrak{x}_v\,\mathfrak{x}_{uu}]}{W}, \\ M &= \frac{[\mathfrak{x}_u\,\mathfrak{x}_v\,\mathfrak{x}_{uv}]}{W}, \\ N &= \frac{[\mathfrak{x}_u\,\mathfrak{x}_v\,\mathfrak{x}_{vv}]}{W}, \end{aligned}\right. \tag{4, 18}$$

so erhalten wir für die *Normalkrümmung* den Ausdruck:

$$\boxed{\frac{1}{R} = \frac{L\,du^2 + 2\,M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2} = \frac{II}{I}}\,. \tag{4, 19}$$

47. Der Satz von Meusnier. Diese die Krümmungstheorie der Flächen des isotropen Raumes beherrschende Formel enthält unmittelbar den

Satz von MEUSNIER: *Alle Flächenstreifen, welche einen Flächenpunkt (u, v) in derselben Richtung $(du:dv)$ passieren, haben dort dieselbe Normalkrümmung.*

Mit Rücksicht auf die Resultate der Nr. **33** läßt sich der MEUSNIERsche Satz auch so formulieren:

Alle Flächenkurven, welche einen Flächenpunkt in derselben Richtung passieren, haben dort Schmiegkreise, welche einer festen (parabolischen) Kugel des isotropen Raumes, nämlich der MEUSNIER*schen Kugel dieser Richtung angehören. Der Parameter p der* MEUSNIER*schen Kugel ist gleich dem Radius R der gemeinsamen Normalkrümmung der zugehörigen Flächenstreifen. Die* MEUSNIER*sche Kugel einer Flächenrichtung ist eindeutig bestimmt durch die Tangentialebene der Fläche und durch den parabolischen Schmiegkreis jenes Normalschnittes, den die isotrope Ebene dieser Richtung aus der Fläche ausschneidet. Auch der Parameter p dieses parabolischen Normalschnittschmiegkreises ist gleich dem Normalkrümmungsradius R dieser Flächenrichtung.*

48. Die isotrope Meusnier-Formel. Der metrische Zusammenhang zwischen dem Krümmungsradius $r = \frac{1}{\varkappa}$ einer Flächenkurve und dem Radius $R = \frac{1}{\varkappa^*}$ der Normalkrümmung der zugehörigen Flächenrichtung wird durch die Formel (3, 30) geliefert. Bezeichnet ϑ den Winkel, unter dem die Schmiegebene σ der Kurve gegen die Tangentialebene τ der Fläche geneigt ist, so lautet dieser *analytische Ausdruck des* MEUSNIER*schen Satzes*:

$$\boxed{r = R \cdot \vartheta}. \tag{4, 20}$$

49. Asymptotenlinien. Durch die Gleichung

$$II = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = 0 \tag{4, 21}$$

werden die Asymptotenlinien der Fläche geliefert. Das Verschwinden der Polarform der zweiten Grundform kennzeichnet konjugierte Flächenrichtungen. Also ist für konjugierte Parameternetze $M = 0$.

Die Parameterlinien sind *normal und auf der Fläche konjugiert* für

$$F = 0, \quad M = 0. \tag{4, 22}$$

Die zugehörigen Flächenstreifen sind dann im Sinne der Nr. 24 *Krümmungsstreifen*, die Linien selber nennen wir *isotrope Krümmungslinien* der Fläche.

50. Cartesische Form der Normalkrümmung. Deutet man in der Grundformel (19) für die Flächenkrümmung R laut Nr. 47 als Radius der Normalkrümmung des zur Richtung $du : dv$ gehörigen isotropen Normalschnittes, so ist in ihr, wie im euklidischen Falle, das isotrope Gegenstück des EULERschen Satzes enthalten.

Um es einfach herzuleiten, gehen wir von der expliziten Gleichung der Fläche

$$z = z(x, y) \tag{4, 23}$$

aus. Für die Parameter x, y hat man nach (8), (11) und (18) folgende Werte der **Fundamentalgrößen**:

$$\left\{\begin{array}{l} E = 1, \quad F = 0, \quad G = 1, \\ \qquad\quad W = 1, \\ L = r, \quad M = s, \quad N = t. \end{array}\right. \tag{4, 24}$$

Die Krümmungsformel (19) lautet jetzt:

$$\boxed{\frac{1}{R} = \frac{r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2}{dx^2 + dy^2} = \frac{II}{I}}. \tag{4, 25}$$

51. Der Eulersche Satz. Verlegt man an einer Stelle (x, y) die beiden (sicher reell vorhandenen) im Sinne der Metrik des isotropen Raumes *normalen und konjugierten Flächenrichtungen*, d. i. die Tangenten der isotropen Krümmungslinien oder die beiden *Hauptkrümmungsrichtungen* nach $dx = 0$ und $dy = 0$, so wird dort $M = s = 0$ und man findet aus (25), wenn φ den Winkel einer beliebigen Flächenrichtung $dx : dy$ gegen die erste Hauptkrümmungsrichtung bezeichnet, also

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi \tag{4, 26}$$

bedeutet, und wenn ferner noch mit

$$\frac{1}{R_1} = r, \quad \frac{1}{R_2} = t \tag{4, 27}$$

die Normalkrümmungen der beiden isotropen **Hauptnormalschnitte** bezeichnet werden, die bekannte Form des *Eulerschen Satzes*:

$$\boxed{\frac{1}{R} = \frac{\cos^2 \varphi}{R_1} + \frac{\sin^2 \varphi}{R_2}}. \tag{4, 28}$$

52. Dualisierung. Nach dem metrischen Dualitätsgesetz des isotropen Raumes entsprechen den Sätzen von Meusnier und Euler duale Gegenstücke, die man als die isotropen Übertragungen der euklidischen Sätze von A. Mannheim[7] und W. Blaschke[8] auffassen kann. Ihre analytische Formulierung könnte man aus der (hier aus Gründen der Kürze unterdrückten) Herleitung des dualen Gegenstückes der Geometrie der Streifen (vgl. Nr. 38) entnehmen. Man kann sie aber (wie im euklidischen Falle) auch **direkt** ableiten.

53. Das Schmiegparaboloid. Durch eine isotrope Bewegung kann man nämlich den auf seine Krümmungsverhältnisse zu untersuchenden (regulären) Flächenpunkt P in den Koordinatenanfangspunkt O und seine Tangentialebene τ in die (x, y)-Ebene bringen. Das aus der Taylor-Entwicklung der Flächengleichung zu entnehmende

---

[7]) A. Mannheim, Géométrie cinématique, Paris 1894, S. 158.

[8]) W. Blaschke, Kreis und Kugel, Leipzig 1916, S. 118.

Schmiegparaboloid zweiter Ordnung wird dann, wenn die x- und y-Achse die Hauptkrümmungsrichtungen sind, lauten:

$$z = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{R_1} + \frac{y^2}{R_2}\right). \tag{4, 29}$$

Seine Krümmungsverhältnisse sind dieselben wie die der Ausgangsfläche (23).

54. Der Krümmungskegel. Um die *isotrope Form des* MANNHEIM*schen und* BLASCHKE*schen Satzes* zu erhalten, ermitteln wir die Berührungskegel, welche sich der Fläche (29) aus den Punkten einer festen Tangente t von O umschreiben lassen, und fragen nach *deren Krümmungskegeln*, d. i. nach jenen Schmiegkegeln, welche (nach Nr. **10**) die Fernebene nach Fernkreisen schneiden, d. h. welche Drehkegel sind. Diese Kegel sind ja metrisch dual zu den Krümmungskreisen der ebenen Schnitte durch eine feste Tangente der Fläche.

Benutzt man zur Darstellung der nichtisotropen Ebenen

$$z = ux + vy + w \tag{4, 30}$$

zweckmäßig die (inhomogenen) Koordinaten (u, v, w), so lautet die Ebenengleichung der Fläche (29)

$$R_1 u^2 + R_2 v^2 + 2w = 0. \tag{4, 31}$$

Ist nun

$$X = (r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ 0) \tag{4, 32}$$

ein beliebiger Punkt der Tangentialebene $z = 0$ von O, deren Ebenenkoordinaten

$$(u, v, w) = (0, 0, 0) \tag{4, 33}$$

sind, und ist

$$X = r\cos\varphi \cdot u + r\sin\varphi \cdot v + w = 0 \tag{4, 34}$$

die Ebenengleichung dieses Punktes X, so geben die beiden Gleichungen (31) und (32) zusammen die analytische Darstellung des Tangentenkegels zweiter Ordnung, den man aus dem Punkte X (32) an die Fläche (31) legen kann. Eliminiert man aus ihnen für den Augenblick w, so ergibt sich die Ebenengleichung des Kegelschnittes f, in dem der Tangentenkegel die Fernebene schneidet. Sie lautet

$$f(u, v) = R_1 u^2 + R_2 v^2 - 2r(u\cos\varphi + v\sin\varphi) = 0, \tag{4, 35}$$

und liefert zusammen mit (34) wieder den Tangentenkegel selber.

55. Der gesuchte oskulierende Drehkegel wird nun seinerseits die Fernebene nach einem f oskulierenden Fernkreise k schneiden, das ist nach einem Kegelschnitt, der die beiden absoluten Geraden (1, 2) des isotropen Raumes berührt. Die Berührungssehne oder Achse a dieses Fernkreises kann durch ihre Linienkoordinaten (U, V) festgelegt werden. Bedeutet nämlich $\mathfrak{r}$ die als Kegelöffnung bezeichnete feste Neigung der Erzeugenden des Schmiegkegels gegen die Verbindungsebene des Kegelscheitels X mit der Achse a (vgl. Nr. **8**), so wird die *Liniengleichung des Fernkreises* die Form haben

$$(u - U)^2 + (v - V)^2 = \mathfrak{r}^2, \tag{4, 36}$$

wobei die Größen U, V, $\mathfrak{r}^2$ aus der Liniengleichung $f(u, v) = 0$ der gegebenen Fernkurve durch dieselben Formeln hervorgehen, welche (dual) den Mittelpunkt und Radius des Schmiegkreises einer ebenen Kurve $f(x, y) = 0$ liefern. Man hat also mit der Abkürzung

$$D = \begin{vmatrix} f_{uu} & f_{uv} & f_u \\ f_{vu} & f_{vv} & f_v \\ f_u & f_v & 0 \end{vmatrix} \tag{4, 37}$$

für die *Achse* (U, V) *und Öffnung* $\mathfrak{r}$ *des Fernkreises:*

$$(4,38)\qquad \begin{cases} U = u + \dfrac{f_u\,(f_u^2 + f_v^2)}{D}, \\ V = v + \dfrac{f_v\,(f_u^2 + f_v^2)}{D}, \\ \mathfrak{r}^2 = \dfrac{(f_u^2 + f_v^2)^3}{D^2}. \end{cases}$$

Die Ableitungen von $f(u, v)$ sind dabei an jener Stelle (u, v) zu nehmen, wo die Oskulation stattfinden soll. Dies ist im vorliegenden Falle nach (33) die Ferngerade $(u, v) = (0, 0)$ der Tangentenebene $z = 0$.

Aus (35) ergibt sich so leicht die Achse (U, V) und (nach einer Vorzeichenübereinkunft) die Öffnung $\mathfrak{r}$ des Fernkreises unseres Krümmungskegels:

$$(4,39)\qquad \begin{cases} U = \dfrac{r\cos\varphi}{R_1\sin^2\varphi + R_2\cos^2\varphi}, \\ V = \dfrac{r\sin\varphi}{R_1\sin^2\varphi + R_2\cos^2\varphi}, \\ \mathfrak{r} = \dfrac{r}{R_1\sin^2\varphi + R_2\cos^2\varphi}, \end{cases}$$

und damit aus (36) die *Gleichung dieses Fernkreises* in Ebenenkoordinaten:

$$(4,40)\qquad u^2 + v^2 - 2r\,\frac{u\cos\varphi + v\sin\varphi}{R_1\sin^2\varphi + R_2\cos^2\varphi} = 0.$$

Das Paar der Gleichungen (34) *und* (40) *stellt damit den gesuchten Krümmungskegel dar, der zum Punkte* X (32) *der Tangente* $\varphi = const.$ *der Fläche* (29) *gehört.*

56. Die Mannheim-Kugel. Lassen wir nun den Scheitel X (34) des Krümmungskegels eine Flächentangente $\varphi = \text{const.}$ durchlaufen, so bestimmt der Kegel selber ein Hüllgebilde, dessen Gleichung sich durch Elimination des Parameters r aus dem Gleichungspaare (34) und (40) ergibt. Man erhält so als Hülle eine isotrope Kugel mit der Ebenengleichung

$$(4,41)\qquad u^2 + v^2 + \frac{2w}{R_1\sin^2\varphi + R_2\cos^2\varphi} = 0,$$

Dies ist die zur Flächentangente t ($\varphi = \text{const.}$) *gehörige* MANNHEIM-*Kugel.* Ihre cartesische Gleichung ist

$$(4,42)\qquad x^2 + y^2 = 2\,(R_1\sin^2\varphi + R_2\cos^2\varphi)\cdot z.$$

57. Die Formeln von Mannheim und Blaschke. Für ihren Parameter p oder die Biegung $\dfrac{1}{\mathfrak{R}}$ der ihr umschriebenen parabolischen Zylinder erhält man (nach Nr. **21**) den Wert

$$(4,43)\qquad p = -\frac{1}{\mathfrak{R}} = R_1\sin^2\varphi + R_2\cos^2\varphi.$$

Wie wir aus Nr. **21** wissen, ist die Biegung eines der Fläche umschriebenen Zylinders der zur Abweichung oder Normalkrümmung eines ebenen (isotropen) Normalschnittes der Fläche duale Krümmungsbegriff.

Die Gleichung (43) gibt für variables φ, d. h. bei variabler Richtung der Berührungserzeugenden t der umschriebenen parabolischen Zylinder, die Beziehung an, welche zwischen dem Neigungswinkel φ der Tangenten t gegen die erste Hauptnormalrichtung und der Biegung $\frac{1}{\mathfrak{R}}$ der Berührungszylinder bzw. dem Parameter p der MANNHEIM-Kugeln, welche zu den Tangenten t gehören, besteht. Sie ist damit dual zur EULERschen Formel und liefert das *isotrope Gegenstück der Formel von* BLASCHKE.

Da sich für die beiden Hauptkrümmungsrichtungen $\left(\varphi = 0, \frac{\pi}{2}\right)$ die Werte der „*Hauptbiegungsradien*“

$$\mathfrak{R}_1 = -\frac{1}{R_2}, \quad \mathfrak{R}_2 = -\frac{1}{R_1} \tag{4, 44}$$

ergeben, können wir die *Formel von* BLASCHKE symmetrischer und mit vollständigerem Ausdruck der metrischen Dualität, die sie mit der EULERschen Formel (28) verbindet, so schreiben:

$$\boxed{\frac{1}{\mathfrak{R}} = \frac{\cos^2\varphi}{\mathfrak{R}_1} + \frac{\sin^2\varphi}{\mathfrak{R}_2}}. \tag{4, 45}$$

Durch Vergleich der Formeln (39) und (43) und eine Vorzeichenübereinkunft ergibt sich jetzt auch noch der *analytische Ausdruck des isotropen Gegenstückes zum Satze von* MANNHEIM:

$$\boxed{\mathfrak{r} = \mathfrak{R}\, r}, \tag{4, 46}$$

wieder in vollständiger Dualität zur MEUSNIERschen Formel (20).

58. Die Sätze von Mannheim und Blaschke. Fassen wir diese Ergebnisse nochmals in Worten zusammen!

Es seien R_1 und R_2 die beiden Hauptkrümmungsradien eines Flächenpunktes O und $\mathfrak{R}_1 = -\frac{1}{R_2}$ bzw. $\mathfrak{R}_2 = -\frac{1}{R_1}$ die zugehörigen Hauptbiegungsradien der Zylinder, welche der Fläche in der ersten bzw. zweiten Hauptkrümmungsrichtung umschrieben werden können. Es sei weiter φ der Neigungswinkel einer beliebigen Flächentangente t gegen die erste Hauptnormalrichtung. Dann gilt:

1) *Der Satz von* MANNHEIM: *Die aus den Punkten X der Flächentangente t an die Fläche gelegten Tangentenkegel besitzen längs t oskulierende Drehkegel (= Krümmungskegel), welche eine isotrope Kugel umhüllen, die wir als die* MANNHEIM-*Kugel der Tangente t bezeichnen. Der Biegungsradius $\mathfrak{R}$ des Krümmungszylinders, den man ihr in Richtung t umschreiben kann, hängt mit der Öffnung $\mathfrak{r}$ der Krümmungskegel und dem Abstande r ihrer Scheitel X vom Flächenpunkte O durch die Relation* (46) *zusammen, welche dual ist zur Formel* (20) *von* MEUSNIER, *und als isotropes Gegenstück der euklidischen* MANNHEIM*schen Formel zu deuten ist.*

2) *Der Satz von* BLASCHKE: *Der Biegungsradius $\mathfrak{R}$ des Berührungszylinders, der zur variablen Tangentenrichtung t gehört, hängt mit den beiden (zu den Hauptkrümmungsrichtungen gehörigen) Hauptbiegungsradien $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ durch die zur* EULER*schen Formel* (28) *duale Formel von* BLASCHKE (45) *zusammen.*

V. Isotrope Krümmungslinien.

59. Mittlere und relative Krümmung. Wie wir aus Nr. 51 wissen, gibt es auch im isotropen Raume in jedem Punkte einer regulären Fläche zwei Hauptkrümmungsrichtungen. Sie sind zueinander zugleich normal und auf der Fläche konjugiert und die zugehörigen Hauptnormalkrümmungen $\frac{1}{R_1}$ bzw. $\frac{1}{R_2}$ sind die beiden Extremwerte unter den im Flächenpunkte möglichen Normalkrümmungen.

Von ihren Mittelwerten

(5, 1)
$$\boxed{\begin{aligned} K &= \frac{1}{R_1 R_2} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \\ H &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2} \end{aligned}}$$

bezeichnen wir (im Anschluß an die Terminologie, die L. Bianchi für den elliptischen Raum prägte), K als die *Relativkrümmung* der Fläche (4, 2) und H als ihre *mittlere Krümmung*.

Die Relativkrümmung kann im isotropen Raume, wie schon in den Nrn. **43** und **44** bemerkt wurde, als Ersatzinvariante für die durch identisches Verschwinden versagende *Absolutkrümmung* K_a der Fläche, d. h. als Ersatz für die verschwindende *Gaussche Krümmung* ihres Bogenelementes (4, 7) bzw. (4, 9) aufgefaßt werden.

Die mittlere Krümmung H kann man noch auf eine andere, für die isotrope Flächentheorie sehr wichtige Art schreiben. Berechnen wir nämlich die Werte der Krümmungen (1) für die explizite Darstellung $z = z(x, y)$ der Fläche, so finden wir nach (4, 24)

(5, 2)
$$\boxed{\begin{aligned} K &= rt - s^2, \\ H &= \tfrac{1}{2}(r + t) = \tfrac{1}{2}\Delta z(x, y), \end{aligned}}$$

wobei $\Delta z(x, y)$ den Laplaceschen Ausdruck von $z(x, y)$ für cartesisches Bogenelement (2, 1) bedeutet. Daher läßt sich die *mittlere Krümmung H in parameterinvarianter Weise* so schreiben:

(5, 3)
$$\boxed{H = \tfrac{1}{2}\Delta z(u, v)},$$

wobei $\Delta z(u, v)$ den für die z-Koordinate $z(u, v)$ der Fläche (4, 2) hinsichtlich ihres Bogenelementes (4, 9) gebildeten *zweiten Beltramischen Differentiator* bedeutet, also den Ausdruck

(5, 4)
$$\Delta z(u, v) = \frac{1}{W}\left\{\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E z_v - F z_u}{W}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G z_u - F z_v}{W}\right)\right\}.$$

60. Flächen konstanter Relativkrümmung. Minimalflächen. Ich habe bereits an anderer Stelle[2]) gezeigt, wie einfach sich die Theorie der Flächen konstanter Relativkrümmung, d. h. die Theorie der vielfach untersuchten Integralflächen der MONGE-AMPÈREschen Gleichung

$$rt - s^2 = K = \text{const.} \neq 0 \tag{5, 5}$$

mittels der Idee des isotropen Raumes gestalten läßt.

Man kann nämlich — und das ist der geometrische Sinn der einfachen integrallosen Darstellung, die G. DARBOUX für diese Flächen fand — *die Flächen fester Relativkrümmung* (5) *durch isotrope CLIFFORDsche Schiebung ihrer Asymptotenlinien aneinander in ähnlicher Weise erzeugen, wie dies nach L. BIANCHI im elliptischen Raume für dessen Flächen mit verschwindender Absolutkrümmung möglich ist.*

In einer Fortsetzung dieser Reihe werde ich auch die durch *verschwindende mittlere Krümmung*, d. i. durch die LAPLACEsche Gleichung

$$2H = \Delta z(x, y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \tag{5, 6}$$

gekennzeichneten *Minimalflächen des isotropen Raumes*, von denen auch der letzte Abschnitt dieser Note handelt, und die schon von vielen anderen geometrischen und analytischen Gesichtspunkten aus Interesse gefunden haben, ausführlicher studieren. Es wird sich dabei neben den schon bisher bekannten Eigenschaften dieser vor allem für die Funktionentheorie bemerkenswerten Flächen (6) eine Reihe neuer beachtenswerter Tatsachen und *Analogien zur Lehre der euklidischen Minimalflächen* ergeben. Auf einige davon bin ich am Ende dieser Arbeit kurz eingegangen.

61. Krümmungslinien. Jede im Sinne von Nr. 40 reguläre reelle Fläche des isotropen Raumes trägt ein *orthogonales Netz konjugierter Kurven*, das Netz ihrer (*isotropen*) *Krümmungslinien*. Dieses ist (außer bei nicht-isotropen Ebenen und isotropen Kugeln, vgl. Nr. 62) eindeutig bestimmt und entsteht durch Integration der Hauptkrümmungsrichtungen der Fläche. Wegen unserer Art der Winkelmetrik (Nr. 5) gilt folgender einfache Satz:

Die Krümmungslinien einer Fläche des isotropen Raumes fallen mit jenem Netz konjugierter Kurven zusammen, welches im Grundriß als Orthogonalnetz erscheint.

Als Differentialgleichung der isotropen Krümmungslinien ergibt sich, wie im euklidischen Falle, aus (4, 19)

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -du\,dv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0. \tag{5, 7}$$

Sie lautet bei expliziter Darstellung der Fläche $z = z(x, y)$ nach (4, 24):

$$s\,dx^2 - (r - t)\,dx\,dy - s\,dy^2 = 0. \tag{5, 8}$$

62. Nabelpunkte. Als Nabelpunkte bezeichnen wir jene Flächenpunkte, deren Normalkrümmungsradien sämtlich gleich sind, für die also $L : M : N = E : F : G$ oder $r = t$ und $s = 0$ ist.

Es gibt auch im isotropen Raume *Flächen mit lauter Nabelpunkten und lauter Krümmungslinien.* Für sie muß

$$s \equiv 0, \quad r \equiv t \tag{5, 9}$$

sein.

Das gibt sofort die Flächen

$$z = A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D, \tag{5, 10}$$

also *die isotropen Kugeln und die nicht-isotropen Ebenen.*

63. Ebene und sphärische Krümmungslinien. Daraus folgt im Verein mit den Ergebnissen der Nr. **36** als Anwendung wie im euklidischen Falle die bekannte Kennzeichnung der sphärischen und der ebenen Krümmungslinien durch den

Satz von Joachimsthal: *Ein sphärischer oder (nichtisotroper) ebener Schnitt einer Fläche ist im isotropen Raume dann und nur dann auf ihr Krümmungslinie, wenn der Schnittwinkel der Fläche mit der isotropen Kugel bzw. der nicht-isotropen Ebene konstant ist.*

Es folgt z. B., daß auf einer Drehfläche des isotropen Raumes die Parallelkreise, also auch die dazu normalen Meridiane Krümmungslinien sind. Ebenso sind auch die Schnitte einer isotropen Böschungsfläche mit den parallelen Böschungsebenen Krümmungslinien. Endlich auch bei einer Gesimsfläche mit vollisotropem Grundzylinder die von den Profilpunkten beschriebenen, in parallelen Ebenen liegenden Evolventen des Grundzylinders. Dabei liegen die Krümmungslinien der anderen Schar (wie auch in den beiden vorausgehenden Beispielen) in isotropen Ebenen, auf die sich hier der Satz von Joachimsthal nicht ohne weiteres anwenden läßt.

64. Die isotropen Krümmungslinien bei Ribaucour und Turrière. Die von mir in dieser Auffassung eingeführten Krümmungslinien einer Fläche des isotropen Raumes[3c]) treten früher schon bei É. Turrière[9]) auf, der sie

---

[9]) É. Turrière, a) Sur les réseaux conjugués orthogonaux en projection sur un plan. Nouv. Ann. de Math. (4) **12** (1912), S. 364—374; auf S. 367 dieser Note weist Turrière auf die sinnfälligen Analogien dieser Kurven zu den (gewöhnlichen) Krümmungslinien hin. — b) Étude des réseaux conjugués orthogonaux en projection sur un plan. Bull. Soc. Math. France **40** (1912), S. 228—238. — c) Sur une congruence de droites associée au réseau conjugué d'une surface orthogonau en projection sur un plan. Nouv. Ann. de Math. (4) **13** (1913), S. 163—176.

— ohne irgendwelchen Zusammenhang mit einem Krümmungsbegriff — als jenes *Netz konjugierter Flächenkurven* behandelt, *die sich in der Projektion auf eine Ebene als Orthogonalnetz abbilden.* TURRIÈRE studiert auch verschiedene besondere Flächen und ihre (in meiner Ausdrucksweise) isotropen Krümmungslinien, so z. B. den Fall der Flächen zweiter Ordnung[10]), der sich sehr einfach erledigen läßt[11]).

Die Frage nach diesen Kurven hat übrigens bei Flächen zweiter Ordnung schon A. RIBAUCOUR[12]) gestellt. Sie wurde vor É. TURRIÈRE schon vollständig durch den Mediziner A. GUÉBHARD[13]) beantwortet, und zwar mit rechnerischen Mitteln, wobei auch vielleicht erstmalig die Differentialgleichung (8) auftritt.

65. Die isotrope Geraden-Kugel-Transformation. In den eben angeführten Noten[11]) habe ich gezeigt, daß der isotrope Raum eine *Geraden-Kugel-Transformation* besitzt. Es ist dies im Wesen die sogenannte *EULERsche Transformation.* Schreibt man das Bogenelement (2, 1) des isotropen Raumes (mit einfacher Realitätsverschiebung) in der indefiniten Form

$$ds^2 = dx \cdot dy, \tag{5, 11}$$

so kann man die EULERsche Transformation involutorisch so ansetzen[14]):

$$X = -p, \quad Y = -y, \quad Z = px - z, \quad P = -x, \quad Q = q. \tag{5, 12}$$

Mit der euklidischen teilt diese isotrope Geraden-Kugel-Transformation die wichtige Eigenschaft, Asymptotenlinien in isotrope Krümmungslinien zu verwandeln und umgekehrt.

So kann man also auch durch die EULERsche Transformation zu den Krümmungslinien in einem (zunächst freilich indefiniten) isotropen Raum gelangen. Und auf diesem Wege ist in der Tat J. EIESLAND[15]) zu ihnen gekommen, wobei übrigens keinerlei Zusammenhang mit der uns leitenden Idee des isotropen Raumes auftritt. Es wird jedoch nicht einmal die seit LIE bekannte Tatsache erwähnt, daß die EULERsche Transformation als ein gewisser Grenzfall der übrigen (euklidischen bzw. nichteuklidischen)

---

[10]) É. TURRIÈRE, [9a]) auf S. 367/368.

[11]) Vgl. auch K. STRUBECKER, a) Über die EULERsche Transformation. Comptes rendus instit. des sci. de Roumanie **3** (1939), S. 150—155; insbes. Nr. 6. — b) Die Geometrie des isotropen Raumes und einige ihrer Anwendungen. Jahresber. Deutsch. Math.-Ver. **48** (1938), S. 236—257; insbes. Nr. 17.

[12]) A. RIBAUCOUR, Question 975 in Nouv. ann. de math. (2) **8** (1869), S. 563.

[13]) A. GUÉBHARD, Nouv. ann. de math. (2) **11** (1872), S. 177—181.

[14]) K. STRUBECKER, [11a]) auf S. 150; [11b]) auf S. 251.

[15]) J. EIESLAND, Conjugated lines connected with EULERs transformation. Trans. Amer. math. soc. **6** (1905), S. 450—471, insbes. S. 454—455.

Geraden-Kugel-Transformation aufgefaßt werden kann[16]). EIESLAND bezeichnet diese Kurven auch mit einem völlig neutralen Namen: er nennt sie „EULERsche Linien" der Fläche, betrachtet übrigens auch ihren Grundriß, freilich ohne zu bemerken, daß sie im Sinne der pseudoeuklidischen Metrik vom Bogenelement (11) ein Orthogonalsystem bilden.

66. Die Beziehungen zur relativen Differentialgeometrie von E. Müller. Am nächsten stehen aber unserer Auffassung dieser Flächenkurven als isotrope Krümmungslinien die Gedanken, welche EMIL MÜLLER zu wiederholten Malen[17]) zu ihnen von seiner *relativen Differentialgeometrie* her geführt haben. Wenn auch bei E. MÜLLER die Idee des isotropen Raumes und seiner Flächentheorie noch nicht vorhanden ist, so lassen sich doch seine Gedanken mit erleichterter Terminologie in unseren isotropen Begriffen ausdrücken.

E. MÜLLER betrachtet nämlich die (isotropen) Kugeln (z-parallelen Drehparaboloide), welche eine Fläche in einem ihrer (regulären) Punkte berühren, und zeigt, daß es darunter im allgemeinen (d. h. außer an unseren „Nabelpunkten") genau zwei Hauptkugeln gibt, welche stationär, d. h. noch in einem Nachbarpunkte berühren. Die beiden damit in jedem Flächenpunkte definierten Richtungen sind (immer in unserer isotropen Ausdrucksweise) zueinander normal und auf der Fläche konjugiert, und fallen daher mit den isotropen Hauptkrümmungsrichtungen zusammen. Die Integralkurven der Richtungen stationärer Berührung stimmen also mit unseren isotropen Krümmungslinien überein. Sie werden von E. MÜLLER als die *„relativen Krümmungslinien" der Fläche hinsichtlich der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{P}$ der (von uns als isotrope Kugeln aufgefaßten) Drehparaboloide mit z-paralleler Achsenrichtung* bezeichnet.

Übrigens treten bei E. MÜLLER [17a]) auch die Größen K und H [in der cartesischen Form (2)] auf, ohne daß eine eigentliche Krümmungstheorie im Sinne unserer Hauptformel (4, 19) oder (4, 25) vorhanden wäre. E. MÜLLER bezeichnet im Rahmen seiner auf die z-parallelen Drehparaboloide $\mathfrak{P}$ gestützten Relativgeometrie K als die *$\mathfrak{P}$-Krümmung* und H als die *mittlere $\mathfrak{P}$-Krümmung* der Fläche.

67. Invarianz der Krümmungslinien bei isotropen Kugeltransformationen. Dieser MÜLLERschen Auffassung unserer isotropen Krümmungslinien entnimmt man sofort ihre *Invarianz gegen alle Kugeltransformationen*

---

[16]) Vgl. hierzu die ausführliche Darstellung bei E. A. WEISS, Die EULERsche Transformation. Monatshefte f. Math. u. Phys. **44** (1936), S. 326—342 und die dort angegebene Literatur.

[17]) E. MÜLLER, a) Relative Minimalflächen. Monatshefte f. Math. u. Phys. **31** (1921), S. 1—19, insbes. Nr. 4 und S. 17/18. — b) Punktmittenflächen und eine Art relativer Flächentheorie. Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien, Abt. IIa, **134** (1925), S. 255 —280, insbes. Nr. 13.

des isotropen Raumes, d. h. gegenüber jenen räumlichen Cremonatransformationen, welche die isotropen Kugeln untereinander vertauschen. Diese isotropen Analoga der Möbiusschen Kugelverwandtschaften bilden eine von elf Parametern abhängige gemischte Gruppe (G_{11}, H_{11}).

Ein komplex-isomorphes Gegenstück davon, das in unserer Ausdrucksweise zu einem indefiniten isotropen Raum gehören würde, dessen absolutes Geradenpaar (1, 2) reell, nämlich von der Form

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 0 \\ t &= 0 \end{aligned}\right\} e_1, \qquad \left.\begin{aligned} x - y &= 0 \\ t &= 0 \end{aligned}\right\} e_2 \tag{5, 13}$$

wäre, ist (ohne Eingehen auf seine Bedeutung für den isotropen Raum) bereits von H. Beck sehr ausführlich untersucht worden[18]). Die analytische Darstellung dieser isotropen Kugeltransformationen gelingt leicht auf Grund der Bemerkung, daß sie sich im Grundriß als gewöhnliche (direkte bzw. indirekte) Möbiussche Kreistransformationen auswirken. Wie H. Beck gezeigt hat, und man aus allgemeineren Entwicklungen von D. Barbilian[19]) entnehmen kann, eignen sich aber vor allem Ternionen zur Darstellung dieser aus verschiedenen Gründen interessanten Gruppe. Ich gedenke auf sie im Zusammenhang mit den Bemerkungen der Nr. 65 zurückzukommen.

68. Weitere Bemerkungen über relative und isotrope Differentialgeometrie. Wie bekannt, stützt sich E. Müllers fruchtbare Idee der relativen Differentialgeometrie auf einen älteren Gedanken von S. Lie[20]) über eine Verallgemeinerung des Begriffes der Krümmungslinien. Vor allem aber stellt sie den Zusammenhang her mit den allgemeinen, von Minkowski eingeführten relativen Maßbestimmungen, bei denen eine beliebige Eichfläche und ein beliebiger Punkt als ihr „Mittelpunkt" die Rolle der euklidischen Einheitskugel und ihres Mittelpunktes übernehmen.

Es läge in unserem Falle nahe, auch für die Differentialgeometrie des isotropen Raumes den analytischen Apparat von vornherein anzuwenden, über den heute die relative Differentialgeometrie, diese vielleicht am weitesten gedrungene Schöpfung meines Lehrers E. Müller, verfügt, vor allem dank der Arbeiten von W. Süss, W. Blaschke, A. Duschek, T. Kubota,

[18]) H. Beck, a) Eine Cremonasche Raumgeometrie. Journ. f. reine u. angew. Math. **175** (1936), S. 129—158. — b) Über Ternionen in der Geometrie. Math. Zeitschr. **40** (1935), S. 509—520, insbes. § 17.

[19]) D. Barbilian, Galileische Gruppen und quadratische Algebren (mit einem Anhang: Grundriß einer geometrischen Algebrenlehre). Bull. math. soc. Roum. de sci. **40** (1938), S. 7—64.

[20]) S. Lie, Über Komplexe, insbesondere Linien- und Kugelkomplexe. Math. Annalen **5** (1872), S. 195ff., insbes. Nr. 46 = Ges. Abhandl. II. Bd., 2. Abt., 1. Teil, S. 55/56.

J. Hirakawa, L. Berwald u. a. Als Eichfläche könnte dabei eine isotrope Einheitskugel und als Mittelpunkt ein beliebiger Raumpunkt dienen.

Wenn dies hier nicht geschieht, so hat das in der Hauptsache zwei sich ergänzende Gründe. Der erste (an sich weniger wesentliche) Grund ist der, daß die meisten Anwendungen der relativen Differentialgeometrie, ja sogar manche ihrer mit Minkowski ab ovo durchgeführten Entwicklungen als Eichfläche ein geschlossenes Oval voraussetzen, das dann auch gerne zentriert gedacht wird[21]), wobei ihr Zentrum (oder doch irgendein anderer ausgezeichneter eigentlicher Punkt) als Eichmittelpunkt dient. Die Radien nach den Punkten der Eichfläche übernehmen dabei die Rolle der Normalen („Relativnormalen") des Flächenpunktes und der auf die Eichfläche durch parallele Tangentialebenen bezogenen Flächen im Raume. — Im Gegensatz dazu ist nun die im isotropen Raume als Eichfläche zu verwendende isotrope Kugel als Paraboloid eine offene Fläche. Überdies ist, das macht den zweiten, wesentlicheren Grund, im Hinblick auf die isotrope Bewegungsgruppe (1, 4) keiner ihrer inneren Punkte vor dem anderen ausgezeichnet, so daß er als natürlicher Mittelpunkt der Eichfläche vorzugsweise in Frage käme. Es gibt im isotropen Raume und hinsichtlich seiner Kugeln überhaupt nur einen ausgezeichneten Punkt, nämlich seinen *absoluten Punkt*, den Fernpunkt U aller vollisotropen Geraden (Nr. **1**). Die auf ihn zu gründende relative Definition der Flächennormalen stimmt zwar mit der isotropen Definition (Nr. **43**) überein, eine Anwendung des analytischen Apparates der relativen Differentialgeometrie für einen Fernpunkt als Mittelpunkt der Eichfläche ist aber nicht möglich.

Aus diesen Gründen erweist es sich am günstigsten, die Entwicklung der Differentialgeometrie des isotropen Raumes in erster Linie auf die isotrope Bewegungsgruppe G_6 (1,4) zu stützen und sie als deren Invariantentheorie zu entwickeln, und die Gedanken der relativen Differentialgeometrie erst dann heranzuziehen, wenn es durch das Versagen oder Trivialwerden gewisser metrischer Begriffe des isotropen Raumes unumgänglich wird. Eine solche Notwendigkeit wird sich z. B. einstellen, wenn wir bei späterer Ge-

[21]) Wie ausschließlich man gerne in der relativen Differentialgeometrie an *geschlossene Eichflächen* denkt, zeigt ein von T. Kubota [Krümmungstheorie in der relativen Flächentheorie. Japan. Journ. of Mathem. XII/2 (1935), S. 21—26] formuliertes *Theorem über die Gültigkeit des Meusnierschen Satzes in der relativen Differentialgeometrie*: „Wenn die durch eine feste Flächentangente möglichen ebenen Schnitte einer beliebigen (regulären) Fläche *Relativschmiegkreise* haben sollen, die einer *Meusnierschen Relativkugel* angehören, *so muß die Eichfläche notwendig ein Ellipsoid sein.*" — Der hier gegen das Resultat unserer Nr. **47** auftretende Widerspruch ist nur scheinbar. Kubota legt eben seiner Untersuchung stillschweigend eine geschlossene Eichfläche zugrunde, so daß der im isotropen Raum realisierte Fall des Paraboloids als weitere mögliche Eichfläche nicht erfaßt wird.

legenheit (Abschn. **VIII**) versuchen werden, die in Nr. **60** definierten *isotropen Minimalflächen* dadurch als ihres Namens berechtigt nachzuweisen, daß wir ein (geometrisch nur aus Relativbegriffen zu gewinnendes) Variationsproblem aufstellen, dessen Extremalflächen sie sind.

69. Relativgeometrische Kennzeichnung der isotropen Krümmungslinien. Gleichwohl ist es manchmal auch aus anderen, z. B. elementargeometrischen Gründen von Vorteil, die Ideen der relativen Differentialgeometrie heranzuziehen. Das ist der Fall, wenn es sich z. B. in unserem Falle darum handelt (ähnlich wie im euklidischen Falle), eine Kennzeichnung der Krümmungslinien durch das Verhalten der Flächennormalen zu gewinnen. Man kann dann nämlich mit E. Müller[17a]) eine beliebige isotrope Kugel als Eichfläche und einen beliebigen (z. B. inneren) Punkt O als ihren Mittelpunkt nehmen. Erklärt man dann die von O ausstrahlenden Radien der Kugel als „Relativnormalen" ihrer Tangentialebenen — eine Definition, die natürlich isotropen Bewegungen gegenüber nicht invariant ist —, so gilt das folgende Müllersche Theorem:

Längs der isotropen Krümmungslinien bilden die (wie erwähnt: nicht bewegungsinvarianten) Relativnormalen einer Fläche Torsen.

Man kann diesem Satze durch besondere Wahl der Kugelmitte O eine bemerkenswerte Form geben, die gleichfalls von E. Müller[22]) herrührt. Erklärt man nämlich den Brennpunkt der isotropen Kugel als ihre Relativmitte, so kann man sagen, daß *die Relativnormalen einer Fläche aus den z-parallelen Geraden (d. h. aus den isotropen Flächennormalen!) durch elementargeometrische Spiegelung (Reflexion) an der Fläche entstehen.* Man hat so die folgende bemerkenswerte *elementargeometrische Kennzeichnung der isotropen Krümmungslinien*:

Werden die zur z-Achse parallelen Strahlen (= die isotropen Flächennormalen) an einer Fläche reflektiert, so erhält man eine Strahlenkongruenz, die man als Relativnormalenkongruenz der Fläche deuten kann. Die Torsen dieser Kongruenz schneiden die Fläche nach ihren isotropen Krümmungslinien.

Diesem interessanten elementargeometrischen Ergebnis kommt jedoch — der fehlenden isotropen Bewegungsinvarianz wegen — an sich, wie schon gesagt, keine eigentliche Bedeutung im Rahmen der Geometrie des isotropen Raumes zu.

---

[22]) E. Müller, [17a]) Satz 2. — Die Brennflächen dieser Kongruenz von Relativnormalen sind die elementargeometrischen Brennpunktsörter der isotropen Hauptkugeln der Fläche, d. h. die relativgeometrischen Gegenstücke der Zentraflächen.

70. Isotrope Kennzeichnung der Krümmungslinien. Es gibt aber natürlich auch einfache *isotrop-geometrische Kennzeichnungen* dieser *Krümmungslinien,* in Formulierungen, die auch im euklidischen Falle Bestand haben. Zwar kann man dazu die untereinander parallelen isotropen Flächennormalen nicht heranziehen, wohl aber z. B. die in Nr. 21 eingeführten Streifennormalen. In der Tat gilt (wie im euklidischen Falle) folgender Satz:

Längs der isotropen Krümmungslinien einer Fläche bilden die Streifennormalen Torsen. Dies ändert sich nicht, wenn man die Streifennormalen um die Kurventangenten um denselben Neigungswinkel ψ dreht[23]).

Natürlich bleibt die Streifennormale dabei in einer und derselben isotropen Ebene und der Neigungswinkel ψ ist im Sinne der Formel (1, 15) eigentlich als Neigung schlechthin zu verstehen.

71. Die krümmungsfesten Ähnlichkeiten. Wir haben in den Abschnitten **IV** und **V** die Krümmungstheorie der Flächen des isotropen Raumes als Invariantentheorie den Flächen gegenüber der G_6 von isotropen Bewegungen (1, 4) entwickelt. Daraus darf man nicht folgern, daß alle unsere Ergebnisse für die Krümmungsverhältnisse der Flächen nur dieser Gruppe gegenüber geometrische Bedeutung haben müßten. In der Tat stellt man [z. B. an Hand der expliziten Darstellung $z = z(x, y)$ der Fläche] leicht fest, daß sich die mittlere und die relative Krümmung H und K und damit die Normal-Krümmungsverhältnisse einer Fläche überhaupt sogar gegenüber der siebengliedrigen Gruppe G_7 von isotropen Ähnlichkeiten

$$(5, 14)\qquad \left.\begin{aligned} x' &= a + d_1 x - d_2 y \\ y' &= b + d_2 x + d_1 y \\ z' &= c + c_1 x + c_2 y + (d_1^2 + d_2^2) z \end{aligned}\right\} \cdots G_7$$

invariant verhalten. Man wird diese Transformation darum als die krümmungsfesten Ähnlichkeiten des isotropen Raumes bezeichnen können. Die Invarianz erstreckt sich jedoch nur auf die Normalkrümmung, nicht auch auf die gewöhnliche isotrope Kurvenkrümmung $\varkappa$.

VI. Die Ableitungsgleichungen der isotropen Flächentheorie.

72. Die Gaußschen Ableitungsgleichungen. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{n}$ den vollisotropen Normalenvektor

$$(6, 1)\qquad \mathfrak{n} = (0, 0, 1)$$

der Fläche

$$(6, 2)\qquad \mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v),$$

[23]) Darin steckt natürlich der Satz von JOACHIMSTHAL. Vgl. V. u. K. KOMMERELL, Theorie der Raumkurven und krummen Flächen I. Berlin-Leipzig 1931, S. 64, Satz 2.

so ist unter den in Nr. 40 angenommenen Regularitätsbedingungen

$$[\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \mathfrak{n}] = [\bar{\mathfrak{x}}_u, \bar{\mathfrak{x}}_v] = W \neq 0. \tag{6, 3}$$

Man kann also die abgeleiteten Vektoren $\mathfrak{x}_{uu}$, $\mathfrak{x}_{uv}$, $\mathfrak{x}_{vv}$ linear durch $\mathfrak{x}_u$, $\mathfrak{x}_v$ und $\mathfrak{n}$ ausdrücken, so daß etwa

$$\mathfrak{x}_{uu} = \alpha \mathfrak{x}_u + \beta \mathfrak{x}_v + \gamma \mathfrak{n} \tag{6, 4}$$

wird.

Durch Einsetzen von $\mathfrak{x}_{uu}$ in die Definitionsgleichung (4, 18) von L findet man sofort $\gamma = L$. Es ist weiter

$$\bar{\mathfrak{x}}_{uu} = \alpha \bar{\mathfrak{x}}_u + \beta \bar{\mathfrak{x}}_v, \tag{6, 5}$$

woraus wegen (4, 8) folgt

$$\begin{cases} \bar{\mathfrak{x}}_u \bar{\mathfrak{x}}_{uu} = \alpha E + \beta F, \\ \bar{\mathfrak{x}}_v \bar{\mathfrak{x}}_{uu} = \alpha F + \beta G. \end{cases} \tag{6, 6}$$

Nun ist $\bar{\mathfrak{x}}_u^2 = E$ und $\bar{\mathfrak{x}}_u \bar{\mathfrak{x}}_v = F$, also folgt durch Ableitung nach u:

$$2\,\bar{\mathfrak{x}}_u \bar{\mathfrak{x}}_{uu} = E_u, \quad \bar{\mathfrak{x}}_{uu} \bar{\mathfrak{x}}_v + \bar{\mathfrak{x}}_u \bar{\mathfrak{x}}_{uv} = F_u,$$

d. h. $\bar{\mathfrak{x}}_{uu} \bar{\mathfrak{x}}_v = F_u - \frac{1}{2} E_v$. Daher wird aus (6, 6)

$$\begin{cases} \alpha E + \beta F = \frac{1}{2} E_u, \\ \alpha F + \beta G = F_u - \frac{1}{2} E_v, \end{cases} \tag{6, 7}$$

woraus man folgert

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{E_u G - 2 F_u F + E_v F}{2(EG - F^2)} = \left\{ {1\;1 \atop 1} \right\}, \\[2ex] \beta = \dfrac{-E_u F + 2 F_u E - F_u E}{2(EG - F^2)} = \left\{ {1\;1 \atop 2} \right\}. \end{cases} \tag{6, 8}$$

Ähnlich drücken sich die Ableitungen $\mathfrak{x}_{uv}$ und $\mathfrak{x}_{vv}$ durch die bezüglich der ersten Grundform genommenen Christoffelschen Symbole und die Fundamentalgrößen M und N aus, so daß man insgesamt die *Gaussschen Ableitungsgleichungen der isotropen Flächentheorie* in folgender Gestalt erhält:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathfrak{x}_{uu} &= \left\{ {1\;1 \atop 1} \right\} \mathfrak{x}_u + \left\{ {1\;1 \atop 2} \right\} \mathfrak{x}_v + L\,\mathfrak{n}, \\ \mathfrak{x}_{uv} &= \left\{ {1\;2 \atop 1} \right\} \mathfrak{x}_u + \left\{ {1\;2 \atop 2} \right\} \mathfrak{x}_v + M\,\mathfrak{n}, \\ \mathfrak{x}_{vv} &= \left\{ {2\;2 \atop 1} \right\} \mathfrak{x}_u + \left\{ {2\;2 \atop 2} \right\} \mathfrak{x}_v + N\,\mathfrak{n}. \end{aligned}} \tag{6, 9}$$

Diese Gleichungen stimmen formal mit jenen aus der euklidischen Flächentheorie überein. Der Unterschied besteht natürlich darin, daß die Christoffel-Symbole dort bezüglich des euklidischen, hier bezüglich des isotropen Bogenelementes (4, 9) zu bilden sind.

73. Die Ableitungsformeln von Weingarten. Um zum isotropen Gegenstück der nach WEINGARTEN benannten Gleichungen für die Ableitungen des Vektors der Flächennormalen zu gelangen, genügt es im isotropen Raume offenbar nicht, an die vollisotrope Flächennormale $\mathfrak{n}$ (1) anzuknüpfen. Das würde wegen der Konstanz von $\mathfrak{n}$ ja nur zu den trivialen Gleichungen

$$\mathfrak{n}_u = \mathfrak{o}, \quad \mathfrak{n}_v = \mathfrak{o} \tag{6, 10}$$

führen. Wir werden vielmehr auf die *Stellung der Tangentialebene* und ihren Bivektor

$$[\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v] \tag{6, 11}$$

zurückgreifen müssen, den wir günstig noch durch Division durch seinen (im Grundriß ablesbaren) isotropen Flächeninhalt

$$[\bar{\mathfrak{x}}_u, \bar{\mathfrak{x}}_v] = W \tag{6, 12}$$

zum Betrage eins normieren, d. h. als *Einheitsbivektor der Tangentialebene* wählen und mit $\mathfrak{N}$ bezeichnen:

$$\mathfrak{N} = \frac{[\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v]}{W}. \tag{6, 13}$$

Wir führen daneben noch sinngemäß die beiden Bivektoren ein, welche durch $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{x}_u$ bzw. $\mathfrak{x}_v$ bestimmt sind, und setzen

$$\mathfrak{U} = [\mathfrak{x}_u, \mathfrak{n}], \quad \mathfrak{V} = [\mathfrak{x}_v, \mathfrak{n}]. \tag{6, 14}$$

Mit $\mathfrak{x}_u$, $\mathfrak{x}_v$, $\mathfrak{n}$ sind auch $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{N}$ linear unabhängig, so daß es möglich ist, zu Ableitungsgleichungen dieser Bivektoren zu gelangen.

Zunächst folgt aus (14) und den GAUSSschen Gleichungen (9) das Formelsystem

$$\boxed{\begin{aligned} \mathfrak{U}_u &= \begin{Bmatrix}1 & 1\\ & 1\end{Bmatrix} \mathfrak{U} + \begin{Bmatrix}1 & 1\\ & 2\end{Bmatrix} \mathfrak{V},\\ \mathfrak{U}_v = \mathfrak{V}_u &= \begin{Bmatrix}1 & 2\\ & 1\end{Bmatrix} \mathfrak{U} + \begin{Bmatrix}1 & 2\\ & 2\end{Bmatrix} \mathfrak{V},\\ \mathfrak{V}_v &= \begin{Bmatrix}2 & 2\\ & 1\end{Bmatrix} \mathfrak{U} + \begin{Bmatrix}2 & 2\\ & 2\end{Bmatrix} \mathfrak{V}. \end{aligned}} \tag{6, 15}$$

Ferner erhält man aus (13) durch Ableiten

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{N}_u &= \frac{[\mathfrak{x}_{uu}, \mathfrak{x}_v] + [\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_{uv}]}{W} - \frac{W_u}{W^2}[\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v],\\ \mathfrak{N}_v &= \frac{[\mathfrak{x}_{uv}, \mathfrak{x}_v] + [\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_{vv}]}{W} - \frac{W_v}{W^2}[\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v], \end{aligned}\right. \tag{6, 16}$$

und daraus ergibt sich, wieder auf Grund der GAUSSschen Gleichungen und der Bezeichnungen (14), das *System der* WEINGARTEN*schen Ableitungsgleichungen der isotropen Flächentheorie*:

$$
\boxed{\begin{aligned} \mathfrak{N}_u &= \frac{M}{W}\,\mathfrak{U} - \frac{L}{W}\,\mathfrak{V}, \\ \mathfrak{N}_v &= \frac{N}{W}\,\mathfrak{U} - \frac{M}{W}\,\mathfrak{V}. \end{aligned}} \tag{6, 17}
$$

74. Integrabilitätsbedingungen. Bestimmung einer Fläche durch die beiden Grundformen. Kennen wir mit den GAUSSschen und WEINGARTENschen Formeln das (vollständige) System der Ableitungsgleichungen für die Flächen des isotropen Raumes, so erhebt sich die Frage nach den notwendigen und hinreichenden Bedingungen, unter denen sechs vorgegebene Funktionen E, F, G, L, M, N von u und v die beiden Grundformen einer (nur bis auf isotrope Bewegungen und Umlegungen bestimmten) Fläche $\mathfrak{x}(u, v)$ bestimmen.

Die zwischen den sechs Fundamentalgrößen bestehenden Abhängigkeiten reduzieren sich auf die *Integrabilitätsbedingungen der* GAUSS*schen Ableitungsgleichungen*, d. h. auf

$$
\left\{\begin{aligned} (\mathfrak{x}_{uu})_v &= (\mathfrak{x}_{uv})_u, \\ (\mathfrak{x}_{uv})_v &= (\mathfrak{x}_{vv})_u. \end{aligned}\right. \tag{6, 18}
$$

Die Integrabilitätsbedingungen der WEINGARTENschen Gleichungen, d. h. die Gleichungen

$$
\mathfrak{N}_{uv} = \mathfrak{N}_{vu} \tag{6, 19}
$$

sind eine Folge von ihnen.

Die Integrabilitätsbedingungen (18) bedeuten das Verschwinden der Vektoren

$$
\left\{\begin{aligned} (\mathfrak{x}_{uu})_v - (\mathfrak{x}_{uv})_u &= \alpha_1 \mathfrak{x}_u + \beta_1 \mathfrak{x}_v + \gamma_1 \mathfrak{n}, \\ (\mathfrak{x}_{uv})_v - (\mathfrak{x}_{vv})_u &= \alpha_2 \mathfrak{x}_u + \beta_2 \mathfrak{x}_v + \gamma_2 \mathfrak{n}, \end{aligned}\right. \tag{6, 20}
$$

d. h. das Verschwinden der sechs Koeffizienten rechter Hand.

Wie im euklidischen Falle führen die vier Gleichungen $\alpha_i = 0$ und $\beta_i = 0$ auf dieselbe Bedingung. Sie kann im isotropen Raume dahin formuliert werden, daß die Gleichung

$$
\boxed{K_a = -\frac{1}{4W^4}\begin{vmatrix} E & E_u & E_v \\ F & F_u & F_v \\ G & G_u & G_v \end{vmatrix} - \frac{1}{2W}\left\{\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E_v - F_u}{W}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{F_v - G_u}{W}\right)\right\} = 0} \tag{6,21}
$$

in u und v identisch erfüllt ist. Dies beinhaltet das *Theorema egregium des isotropen Raumes, welches besagt, daß das Bogenelement der Fläche*

(6, 22) $$ds^2 = E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2$$

verschwindende Gausssche oder Absolutkrümmung K_a *hat.*

Die Bedingungen $\gamma_i = 0$ ergeben schließlich, so wie auch im euklidischen Falle, die beiden *Mainardi-Codazzischen Gleichungen*:

(6, 23) $$\boxed{\begin{array}{l} \begin{array}{r}(EG-2FF+GE)\,(L_v-M_u)\\ -(EN-2FM+GL)\,(E_v-F_u)\end{array} + \begin{vmatrix} E & E_u & L \\ F & F_u & M \\ G & G_u & N \end{vmatrix} = 0, \\[2ex] \begin{array}{r}(EG-2FF+GE)\,(M_v-N_u)\\ -(EN-2FM+GL)\,(F_v-G_u)\end{array} + \begin{vmatrix} E & E_v & L \\ F & F_v & M \\ G & G_v & N \end{vmatrix} = 0. \end{array}}$$

Sie würden sich übrigens auch als die Integrabilitätsbedingungen der Weingartenschen Gleichungen (17) ergeben.

Fassen wir das Ergebnis zusammen, so gilt nach den Existenzsätzen aus der Lehre von den partiellen Differentialgleichungen der folgende für die Flächentheorie des isotropen Raumes grundlegende Satz:

Sind das Theorema egregium (21) *und die Mainardi-Codazzischen Gleichungen* (23) *erfüllt, so ist durch die sechs Fundamentalgrößen E, F, G, L, M, N eine Fläche $\mathfrak{x}(u, v)$ des isotropen Raumes festgelegt, und zwar eindeutig bis auf isotrope Bewegungen und Umlegungen.*

75. Eine Anwendung der Codazzischen Gleichungen: Der Satz von G. Scheffers über die Flächen fester Relativkrümmung. Meine vor kurzem erschienene Note über die Flächen fester Relativkrümmung

(6, 24) $$K = rt - s^2 = \text{const.} \neq 0$$

des isotropen Raumes[2]) enthält als eines ihrer hauptsächlichen Ergebnisse eine sehr einfache geometrische Erzeugung dieser aus vielen Gründen bemerkenswerten Flächen. *Man kann nämlich, wie ich bewies und schon erwähnt wurde, diese Flächen* (24) *mit Hilfe der auch im isotropen Raume vorhandenen Cliffordschen Schiebungen aus ihren Asymptotenlinien als Cliffordsche Schiebfläche erzeugen.*

Der Beweis dieses Theorems stützte sich dabei auf folgenden schon von G. Scheffers[24]) stammenden Satz:

Bei den Flächen $rt - s^2 = K = \text{const.}$ $(\neq 0)$, *und nur bei ihnen, bilden die Asymptotenlinien im Grundriß ein Schiebnetz.*

[24]) G. Scheffers, Eigenschaften der Integralflächen der partiellen Differentialgleichung $s^2 - rt = \text{const.}$ Math. Zeitschr. **5** (1919), S. 112—117; insbes. S. 114.

Da die Schiebnetze die einzigen TSCHEBYSCHEFF-Netze (= äquidistante Netze, $E = G = 1$) der Ebene sind, und die isotrope Flächenmetrik sich im Grundriß als gewöhnliche euklidische Metrik äußert, kann dieser Satz von SCHEFFERS in isotroper Ausdrucksweise auch so formuliert werden und bildet dann das isotrope Gegenstück eines bekannten Satzes von HAZZIDAKIS über euklidische Flächen konstanter GAUSSscher Krümmung:

Auf den Flächen fester Relativkrümmung $K = const. \neq 0$ des isotropen Raumes, und nur auf ihnen, bilden die Asymptotenlinien ein äquidistantes (= TSCHEBYSCHEFF-)Netz.

Wir wollen diesen Satz mit unseren Mitteln beweisen, und beziehen zu dem Zwecke die Fläche auf Asymptotenparameter. Man hat dann

$$L = N = 0 \tag{6, 25}$$

und nach (5, 1)

$$K = \frac{-M^2}{EG - F^2} = \text{const.} \neq 0, \tag{6, 26}$$

also

$$M^2 = -K(EG - F^2) \neq 0. \tag{6, 27}$$

Ziehen wir für unsere Fläche konstanter Relativkrümmung die CODAZZI-MAINARDIschen Gleichungen (23) heran! Sie lauten wegen (25) und (27) und nach Kürzung durch $M \neq 0$

$$\begin{cases} +2\,\dfrac{M M_u}{K} + 2F(E_v - F_u) - (EG_u - GE_u) = 0, \\ -2\,\dfrac{M M_v}{K} + 2F(F_v - G_u) - (EG_v - GE_v) = 0. \end{cases} \tag{6, 28}$$

Berechnet man nun die Größen $2\,MM_u$ und $2\,MM_v$ durch Ableitung von (27), so findet man für (28) einfach:

$$\begin{cases} EG_u - FE_v = 0, \\ FG_u - GE_v = 0. \end{cases} \tag{6, 29}$$

Daraus folgt, da die Determinante $EG - F^2 \neq 0$ ist, zunächst

$$E_v = 0, \quad G_u = 0, \tag{6, 30}$$

d. h.

$$E = E(u), \quad G = G(v), \tag{6, 31}$$

und durch Einführung der neuen Parameter

$$u' = \int \sqrt{E(u)}\, du, \quad v' = \int \sqrt{G(v)}\, dv \tag{6, 32}$$

endlich

$$E' = G' = 1. \tag{6, 33}$$

Damit ist zunächst gezeigt, daß die Asymptotenlinien auf den Flächen fester Relativkrümmung wirklich ein äquidistantes Netz bilden.

Bleibt noch die Umkehrung, d. i. der Nachweis dafür, daß äquidistante Netze aus Asymptotenlinien nur auf Flächen fester Relativkrümmung $K = \text{const.}$ möglich sind.

Es sei also für die Asymptotenlinien als Parameterlinien, d. h. für $L = N = 0$ die Bedingung der Äquidistanz

$$E = G = 1 \tag{6, 34}$$

erfüllt. Dann ergeben die Codazzi-Mainardischen Gleichungen:

$$\begin{cases} (1 - F^2) M_u + M F F_u = 0, \\ (1 - F^2) M_v + M F F_v = 0. \end{cases} \tag{6, 35}$$

Dies besagt aber nach (26) und (34), daß für die Relativkrümmung K

$$K_u = 0, \quad K_v = 0 \tag{6, 36}$$

gilt, also in der Tat für die Fläche $K = \text{const.}$ ist.

VII. Sphärische Abbildung und Richtungsbild.

76. Das sphärische Bild. Mehr als die euklidische hat die isotrope Flächentheorie in ihren Problemen mit Vorteil die sphärische Abbildung der Flächen oder deren Verknüpfung mit der stereographischen Projektion, das sogenannte Richtungsbild der Flächen heranzuziehen.

Wir erklären als Einheitskugel des isotropen Raumes die isotrope Kugel vom Parameter minus eins:

$$z = -\tfrac{1}{2}(x^2 + y^2). \tag{7, 1}$$

Bilden wir auf sie vermittels paralleler Tangentialebenen die Punkte $\mathfrak{x}(x, y, z)$ der Fläche

$$\mathfrak{x}(u, v) \cdots \begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v) \end{cases} \tag{7, 2}$$

ab, so ergibt sich der *sphärische Bildpunkt* $\mathfrak{X}(X, Y, Z)$

$$\mathfrak{X}(u, v) \cdots \begin{cases} X = + \dfrac{\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}}{W}, \\[2ex] Y = + \dfrac{\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}}{W}, \\[2ex] Z = -\tfrac{1}{2}(X^2 + Y^2) = -\tfrac{1}{2} \nabla z(u, v), \end{cases} \tag{7, 3}$$

wobei

$$\nabla z(u, v) = \frac{E z_v^2 - 2 F z_u z_v + G z_u^2}{E G - F^2} = -\frac{\begin{vmatrix} E & F & z_u \\ F & G & z_v \\ z_u & z_v & 0 \end{vmatrix}}{E G - F^2} \tag{7, 4}$$

den bezüglich der ersten Grundform (4, 9) genommenen *ersten* BELTRAMI*schen Differentiator* von $z(u, v)$ bedeutet.

77. Das Richtungsbild. Der Übergang zum Grundriß des sphärischen Bildes kann im isotropen Raume als stereographische Projektion der Einheitskugel (1) aus ihrem absoluten Fernpunkt gedeutet werden. Der entstehende Bildpunkt

$$\bar{\mathfrak{x}} = (X, Y) \tag{7, 5}$$

kann im Anschluß an eine Ausdrucksweise der Darstellenden Geometrie als das Richtungsbild des Flächenpunktes $\mathfrak{x}$ bezeichnet werden.

Merken wir noch die Formeln für das sphärische und Richtungsbild der Fläche bei *expliziter* Darstellung

$$z = z(x, y) \tag{7, 6}$$

an. Man hat

$$\mathfrak{x} \cdots \left\{ \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} X = -\,p(x, y) \\ Y = -\,q(x, y) \end{array}\right\} \cdots \bar{\mathfrak{x}}, \\ Z = -\,\tfrac{1}{2}\,\nabla z(x, y) = -\,\tfrac{1}{2}\,(p^2 + q^2). \end{array} \right. \tag{7, 7}$$

78. Die dritte Grundform. Der Satz von Beltrami-Enneper. Aus den Formeln (7) ergibt sich für das *Bogenelement* dS *des sphärischen Bildes* und das ihm gleiche *des Richtungsbildes*

$$dS^2 = III = dX^2 + dY^2 = (r\,dx + s\,dy)^2 + (s\,dx + t\,dy)^2. \tag{7, 8}$$

Mit Hilfe der Formeln (4, 25) und (5, 3) bestätigt man leicht, daß auch im isotropen Raum diese dritte Grundform III mit der ersten und zweiten durch die Relation

$$\boxed{K \cdot I - 2H \cdot II + III = 0} \tag{7, 9}$$

verbunden ist. Wir schreiben allgemein:

$$dS^2 = III = 2\,H \cdot II - K \cdot I = e\,du^2 + 2\,f\,du\,dv + g\,dv^2. \tag{7, 10}$$

Daraus folgert man in bekannter Weise die Gültigkeit des Satzes von BELTRAMI und ENNEPER für die Torsionen τ der sich in einem Flächenpunkte der Relativkrümmung K kreuzenden Asymptotenlinien: Wegen $II = 0$ hat man für sie

$$\tau = \frac{dS}{ds} = \pm \sqrt{\frac{III}{I}} = \pm \sqrt{-K}, \tag{7, 11}$$

was sich übrigens auch ohne (11) durch elementare Rechnung erweisen ließe[2]).

79. Definition der Relativkrümmung K im Sinne von Gauss. Man kann die *Relativkrümmung* K in Übertragung eines GAUSSschen Gedankens als den *Grenzwert* des Quotienten korrespondierender Flächenelemente dF und df

des sphärischen Bildes und der Fläche auffassen. Man hat nämlich nach (4, 12) für die Flächeninhalte korrespondierender Bereiche

$$(7, 12)\qquad \begin{cases} F = \displaystyle\iint_{\mathfrak{B}} \frac{\partial (X, Y)}{\partial (u, v)}\, du\, dv, \\ f = \displaystyle\iint_{\mathfrak{B}} \frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)}\, du\, dv. \end{cases}$$

Zieht man F und f entsprechend auf Punkte zusammen, so hat man nach (7) in der Tat

$$(7, 13)\qquad \lim \frac{dF}{df} = \frac{\partial (X, Y)}{\partial (u, v)} \cdot \frac{\partial (u, v)}{\partial (x, y)} = \frac{\partial (X, Y)}{\partial (x, y)} = \begin{vmatrix} -r & -s \\ -s & -t \end{vmatrix} = K.$$

Daraus folgt z. B., daß für Flächen mit der festen Relativkrümmung $K = +1$ bzw. $K = -1$ die sphärische Abbildung und das Richtungsbild direkt bzw. indirekt flächentreu ausfallen.

80. Die Konformität des sphärischen Bildes der Minimalflächen. Von mehr Interesse ist die Frage nach jenen Flächen, $z = z(x, y)$, deren sphärisches Bild zur Fläche selbst konform ausfällt.

Für die Abbildungsfunktionen (7)

$$(7, 14)\qquad \begin{cases} X = -p(x, y), \quad Y = -q(x, y), \\ \dfrac{\partial (X, Y)}{\partial (x, y)} = K \neq 0 \end{cases}$$

gilt dann

1. im Falle direkter Konformität nach Cauchy-Riemann

$$(7, 15)\qquad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial q}{\partial x},$$

d. h. man hat

$$(7, 16)\qquad r = t, \quad s = 0.$$

Die Fläche hat dann notwendig eine Gleichung der Form

$$(7, 17)\qquad z = \alpha (x^2 + y^2) + \beta x + \gamma y + \delta$$

mit $\alpha \neq 0$, und es folgt der Satz:

Die sphärische Abbildung ist für die isotropen Kugeln, und nur für sie, direkt konform, nämlich eine direkte Ähnlichkeit.

2. Im Falle indirekter Konformität hat man statt (15) die Gleichungen

$$(7, 18)\qquad \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial q}{\partial y}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x},$$

d. h. es muß gelten:

$$(7, 19)\qquad r + t = 0, \quad s = s.$$

Dies bedeutet nach (5, 3), daß die mittlere Krümmung H der Fläche verschwindet. Nach Nr. 60 ergibt sich der Satz:

Die sphärische Abbildung ist für die krummen Minimalflächen des isotropen Raumes ($H = 0$) und nur für sie indirekt konform. Der Grundriß der Fläche ist dann ebenfalls indirekt konform auf das Richtungsbild bezogen.

81. Dualisierung des Bogenelementes. Das im isotropen Raume gültige metrische Dualitätsgesetz legt es nahe, auch die Flächentheorie in einer Weise aufzubauen, die völlig in sich dual ist. Ein solcher *dualistischer Aufbau*, den wir hier aus Gründen der Kürze nicht systematisch durchführten, sondern nur in einigen Punkten besonderen Interesses andeuteten (Nr. 52), würde anzuknüpfen haben an das *zum Bogenelement ds duale Winkelelement $d\vartheta$* zweier benachbarter Tangentialebenen der Fläche. Dieser Winkel $d\vartheta$, dessen Definition durch die Formeln (1, 7) oder (2, 22) geliefert wird, kann auch als der Winkel der parallelen Tangentialebenen des sphärischen Bildpunktes angesehen werden. Er fällt daher (nach den Bemerkungen in Nr. 9) einfach mit dem *Bogenelement dS des sphärischen Bildes* zusammen:

$$\boxed{d\vartheta^2 = dS^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2 = III}. \tag{7,20}$$

VIII. Die Relativoberfläche. Die isotropen Minimalflächen als ihre Extremalen. Assoziierte Minimalflächen. Die isotrope Enneperfläche.

82. Isotroper Flächeninhalt und Plateausches Problem. Das nach Plateau benannte Problem der klassischen Differentialgeometrie verlangt, in eine einfach-geschlossene Raumkurve ein Flächenstück minimalen Inhalts einzuspannen. Es ist heute, wie bekannt, in umfangreichstem Sinne gelöst und man weiß seit Lagrange, daß als seine Lösungen Minimalflächen auftreten, d. h. solche verschwindender mittlerer Krümmung H.

Besieht man das entsprechende Problem des isotropen Raumes, so stellt man sofort fest: Wird die Oberflächendefinition zugrunde gelegt, welche von unserer bisherigen isotropen Inhaltsbestimmung (4, 12) geliefert wird, d. h. mißt man den *Inhalt f des isotropen Flächenstückes $\mathfrak{B}$ durch die elementare Fläche ihres Grundrisses $\mathfrak{B}'$*:

$$f = \iint_{\mathfrak{B}} W\,du\,dv = \iint_{\mathfrak{B}'} dx\,dy, \tag{8,1}$$

so ist die Plateausche Problemstellung deswegen trivial, weil alle in die einfach-geschlossene Kurve eingespannten isotropen Flächenstücke mit einfach überdecktem Grundriß denselben Inhalt, nämlich jenen ihres Grundrisses haben.

Die Inhaltsbestimmung der Formel (1) hat also zwar den Vorteil, gegen isotrope Bewegungen invariant zu sein, sie leistet auch für viele belangvolle geometrische Fragestellungen die vom euklidischen Falle her erwarteten Dienste (man denke etwa an unsere Übertragung der Gaussschen Definition der Relativkrümmung K in Nr. **79**), sie versagt aber, wenn es gilt, das Variationsproblem der Oberfläche im isotropen Raum sinnvoll zu formulieren.

83. Möglichkeit eines nicht-invarianten Oberflächenbegriffes, mit invarianten Extremalen. Es ist aber darum nicht unmöglich, einen neuen Oberflächenbegriff für den isotropen Raum aufzustellen, dessen Variationsproblem gerade von den isotropen Minimalflächen, nämlich jenen mit verschwindender mittlerer Krümmung H gelöst wird. Wir werden dabei allerdings in Kauf nehmen müssen, daß dieser neue Begriff der Oberfläche isotropen Bewegungen gegenüber nicht mehr invariant ist. Das muß aber seinerseits wieder nicht bedeuten, daß auch die Extremalen dieser nicht-bewegungsinvarianten Inhaltsbestimmung gleichfalls nicht-invariant sind. Im Gegenteil! Es wird sich zeigen, daß die Extremalen der jetzt zu definierenden „Relativoberfläche" des isotropen Raumes von durchaus bewegungsinvariantem Charakter sind, nämlich, wie erwähnt, mit seinen Flächen verschwindender mittlerer Krümmung $H = 0$ zusammenfallen.

Damit ist zu den vielen Eigenarten, welche der Geometrie des isotropen Raumes bisher an sich schon anhaften, eine neue, nicht weniger interessante gefügt.

Wenn wir noch an die Bemerkungen in Nr. **44** anschließen, die feststellten, daß im isotropen Raume überall dort, wo eine Invariante immer oder in Einzelfällen versagt, eine andere Invariante als Ersatz vorhanden sei, so werden wir im Hinblick auf die Begriffe *isotrope Oberfläche* und *isotrope Relativoberfläche* feststellen können, daß im isotropen Raume auch dafür gesorgt ist, daß diese Invariante, die Oberfläche, die an sich zwar nichttrivial vorhanden ist, aber gewissen Problemen, wie unserem Variationsproblem gegenüber versagt, ersetzt werden kann durch eine andere, freilich nicht mehr invariante Größe, eben die Relativoberfläche, für die das betreffende Problem wirklich und nichttrivial gelöst werden kann und sogar zu einem durchaus invarianten Resultat, nämlich zu unseren Lösungsflächen verschwindender mittlerer Krümmung führt.

84. Definition der isotropen Relativoberfläche. Wir wählen die isotrope Kugel

(8, 2) $$z = -\tfrac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

als Eichfläche und den beliebigen Raumpunkt $\mathfrak{M}$ vom Ortsvektor

$$(8,3) \qquad \mathfrak{M} = (\xi, \eta, \zeta)$$

als „Mittelpunkt" einer MINKOWSKIschen Maßbestimmung. Es sei weiter

$$(8,4) \qquad \mathfrak{X} = \{X, Y, -\tfrac{1}{2}(X^2 + Y^2)\}$$

der in den Formeln (7, 3) bzw. (7, 7) niedergelegte sphärische Bildpunkt des Punktes

$$(8,5) \qquad \mathfrak{x}(u,v) = \{x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)\}$$

der Fläche (7, 2), und

$$(8,6) \qquad \mathfrak{Y} = \mathfrak{X} - \mathfrak{M}$$

der vom Mittelpunkt $\mathfrak{M}$ zum sphärischen Bildpunkt $\mathfrak{X}$ führende „Radius" der Eichfläche (2), welche auch, wie alle isotropen Kugeln, als Relativkugel bezeichnet wird.

Dann wollen wir mit H. MINKOWSKI[25]) *als isotrope Relativoberfläche O des im Sinne der Nr.* 40 *regulären Flächenstückes* $\mathfrak{B}$ (7, 2) *die Größe*

$$(8,7) \qquad \boxed{O = \iint_{\mathfrak{B}} [\mathfrak{Y}, \mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v]\, du\, dv}$$

definieren. Wir können sie sofort in zwei Teile aufspalten; man hat zunächst nach (6)

$$(8,8) \qquad O = \iint_{\mathfrak{B}} [\mathfrak{X} - \mathfrak{M},\ \mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v]\, du\, dv,$$

also

$$(8,9) \qquad O = \iint_{\mathfrak{B}} [\mathfrak{X}, \mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v]\, du\, dv - \iint_{\mathfrak{B}} [\mathfrak{M}, \mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v]\, du\, dv.$$

85. Umformung der Relativoberfläche mittels Gaußens Integralformel. Hier hängt der erste Teil von der besonderen Lage des Mittelpunktes $\mathfrak{M}$ zwar nicht mehr ab, er hat aber doch im isotropen Raume *keinerlei absolute, d. h. invariante Bedeutung.* In der Tat ist dieser Teil, den wir mit O^* bezeichnen wollen:

$$(8,10) \qquad O^* = \iint_{\mathfrak{B}} [\mathfrak{X}, \mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v]\, du\, dv$$

nichts anderes als *die für den Koordinatenanfang* $\mathfrak{O} = (0, 0, 0)$ *als Mittelpunk der MINKOWSKIschen Metrik genommene Relativoberfläche des Flächenstücks* $\mathfrak{B}$' *also ebensowenig mit der Fläche bewegungsinvariant verknüpft, wie es der Koordinatenanfang* $\mathfrak{O}$ *mit der isotropen Kugel* (2) *ist.*

---

[25]) H. MINKOWSKI, Volumen und Oberfläche. Math. Annalen **57** (1903), S. 447—495; = Ges. Abhandl., II. Bd., Abh. XXVI; insbes. § 8. — Vgl. W. BLASCHKE, Differentialgeometrie II, S. 205.

Man kann O^* in sehr einfacher Weise und parameterinvariant schreiben. In der Tat findet man durch Eintragen von $\mathfrak{X}$ aus (7, 3)

$$\boxed{O^* = \frac{1}{2} \iint\limits_{\mathfrak{B}} \nabla z(u,v) \cdot W\, du\, dv,} \tag{8, 11}$$

unter $\nabla z(u,v)$ den auf die z-Koordinate der Fläche angewandten und bezüglich der ersten Grundform (4, 9) genommenen ersten BELTRAMIschen Differentiator (7, 4) verstanden.

Wenden wir uns noch dem zweiten Teile von (9) zu! Er hängt außer von dem Flächenstück $\mathfrak{B}$ nur noch von dem festen, aber an sich beliebigen Mittelpunktsvektor $\mathfrak{M}$ ab, ist also gegenüber isotropen Bewegungen der Fläche (d. h. der Fläche allein) ebenfalls nicht invariant. Wir können aber weiter leicht feststellen, daß dieses zweite oder, wie wir gerne sagen wollen, *dieses „Zusatzglied"*

$$J = \iint\limits_{\mathfrak{B}} [\mathfrak{M}, \mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v]\, du\, dv \tag{8, 12}$$

lediglich vom Rande $\mathfrak{R}$ des Flächenstückes $\mathfrak{B}$, nicht aber von der speziellen Fläche $\mathfrak{B}$ (7, 2) selbst abhängt.

In der Tat hat man nach dem GAUSSschen Integralsatze

$$\iint\limits_{\mathfrak{B}} [\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v]\, du\, dv = \frac{1}{2} \oint\limits_{\mathfrak{R}} [\mathfrak{x}, d\mathfrak{x}], \tag{8, 13}$$

woraus durch innere Multiplikation mit $\mathfrak{M}$ folgt:

$$\boxed{J = \iint\limits_{\mathfrak{B}} [\mathfrak{M}, \mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v]\, du\, dv = \frac{1}{2} \oint\limits_{\mathfrak{R}} [\mathfrak{M}, \mathfrak{x}, d\mathfrak{x}]}\,. \tag{8, 14}$$

Eine einfache, aber später wichtige Folgerung ist, daß *bei beliebiger Variation des in den Rand $\mathfrak{R}$ eingespannten Flächenstückes $\mathfrak{B}$ das Zusatzintegral J keine Änderung erfährt, d. h. daß*

$$\delta J = 0 \tag{8, 15}$$

ist.

Zusammenfassend lautet also die für den Mittelpunkt $\mathfrak{M}$ der Eichfläche (2) *gebildete Relativoberfläche O eines regulären Stückes $\mathfrak{B}$ der Fläche $\mathfrak{x}(u,v)$*:

$$\boxed{O = O^* - J = \frac{1}{2} \iint\limits_{\mathfrak{B}} \nabla z(u,v) \cdot W\, du\, dv - \frac{1}{2} \oint\limits_{\mathfrak{R}} [\mathfrak{M}, \mathfrak{x}, d\mathfrak{x}]}\,. \tag{8, 16}$$

Dabei stellt O^* die zum Koordinatenumfang $\mathfrak{O} = (0, 0, 0)$ als Mittelpunkt gehörige Relativoberfläche dar, während das von der Verschiedenheit der

Zentren $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{M}$ herrührende Zusatzglied J nur vom Rande $\mathfrak{R}$ des Flächenstückes abhängt.

86. Verhalten der Relativoberfläche bei isotropen Bewegungen. Wird ein Flächenstück $\mathfrak{B}$ im isotropen Raume bewegt, so erfährt sein sphärisches Bild auf der Einheitskugel (2) ebenfalls eine gewisse Bewegung, die im Sinne der isotropen Kinematik als eine Drehung der Eichkugel aufgefaßt werden kann. Wenn der Mittelpunkt $\mathfrak{M}$ bei dieser Kugeldrehung mitgenommen wird, so ist klar, daß die Relativoberfläche des alten Flächenstückes, genommen für das alte Eichzentrum einerseits und die Relativoberfläche der neuen Lage des Flächenstückes bezüglich der neuen Lage des Eichzentrums andererseits einander gleich sind. *Bei gleichzeitiger und korrespondierender isotroper Bewegung der Fläche im Raum und des Eichzentrums im System des sphärischen Bildes ist die Relativoberfläche eine isotrope Invariante.*

Es folgt daraus, daß bei der üblichen Auffassung der Minkowskischen Metrik, bei der doch der Mittelpunkt der Metrik als durchaus fest zu betrachten ist, von einer isotropen Bewegungsinvarianz der Relativoberfläche nicht die Rede sein kann. Wenn wir z. B. den Koordinatenanfang $\mathfrak{O} = (0, 0, 0)$ als rechnerisch bequemstes Zentrum wählen und demgemäß als Relativoberfläche einfach den Ausdruck O^* (10) erklären, so ist das, wie oben schon erwähnt, gewiß keine gegen isotrope Bewegungen invariante Definition. In der Tat ist ja die einzige invariante Flächenmaßbestimmung jene, welche durch die elementare Inhaltsformel (1) erklärt ist.

Gleichwohl ist es jedoch, wie schon erwähnt, möglich, daß das Variationsproblem, das sich mit unserer Definition der isotropen Relativoberfläche verknüpfen läßt, auf eine Klasse von Extremalflächen führt, denen im isotropen Raume durchaus invarianter Charakter zukommt. Diese Möglichkeit beruht offenbar darauf, daß nach (16) die bezüglich zweier beliebiger Eichzentren $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ genommenen Relativoberflächen sich nur um ein Randintegral unterscheiden, oder, was dasselbe ist, um ein Doppelintegral — des Typus (12) —, dessen Integrand ein Divergenzausdruck ist.

87. Die erste Variation der Relativoberfläche. Notwendigkeit von $H = 0$ für isotrope Minimalflächen. *Wir wollen als isotrope Minimalflächen die Extremalen des Variationsproblems der isotropen Relativoberfläche erklären und wollen zeigen, daß für solche Flächen notwendig die mittlere Krümmung H (5, 1) verschwindet.*

Wir fanden für H in (5, 3) die invariante Darstellung:

$$H = \tfrac{1}{2} \varDelta\, z(u, v). \tag{8, 17}$$

Es gilt also, die erste Variation δO der Relativoberfläche zu berechnen, wobei wir uns vorstellen, daß alle zur Konkurrenz zugelassenen Flächenstücke in den Rand $\mathfrak{R}$ eingespannt seien. Da das Zusatzglied J in (16) als Randintegral verschwindende Variation hat, genügt es, die Relativoberfläche durch O^* zu erklären und sie durch die Formel (11) zu definieren.

Das Flächenstück $\mathfrak{B}$ (7, 2) soll dadurch variiert werden, daß wir auf den (vollisotropen, d. i. z-parallelen) Flächennormalen die Strecken $\varepsilon \cdot \lambda(u, v)$ auftragen. Die variierte Fläche $\bar{\mathfrak{B}}$ hat also folgende Form:

$$\bar{\mathfrak{x}}(u,v)\ldots\begin{cases}\bar{x} = x(u,v),\\ \bar{y} = y(u,v),\\ \bar{z} = z(u,v) + \varepsilon\cdot\lambda(u,v),\end{cases} \tag{8, 18}$$

wobei $\lambda(u, v)$ am gemeinsamen Rande $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{B}$ und $\bar{\mathfrak{B}}$ verschwindet.

Die variierte Relativoberfläche $\bar{O}^*$ lautet nach (11) wegen des gemeinsamen Parameterbereiches

$$\bar{O}^* = \tfrac{1}{2}\iint\limits_{\mathfrak{B}} \nabla\, \bar{z}(u,v)\, W\, du\, dv. \tag{8, 19}$$

Nach (18) und bekannten Regeln ist nun

$$\nabla\bar{z} = \nabla[z + \varepsilon\cdot\lambda] = \nabla z + 2\,\varepsilon\,\nabla(z,\lambda) + \varepsilon^2\,\nabla\lambda, \tag{8, 20}$$

wobei

$$\nabla(z,\lambda) = \frac{E\, z_v\,\lambda_v - F\,(z_u\,\lambda_v + z_v\,\lambda_u) + G\, z_u\,\lambda_u}{E\,G - F^2} = -\frac{\begin{vmatrix} E & F & z_u\\ F & G & z_v\\ \lambda_u & \lambda_v & 0\end{vmatrix}}{E\,G - F^2} \tag{8, 21}$$

den gemischten ersten Beltramischen Differentiator bezeichnet. Es folgt

$$\bar{O}^* = O^* + \varepsilon\iint\limits_{\mathfrak{B}} \nabla(z,\lambda)\, W\, du\, dv + \frac{\varepsilon^2}{2}\iint\limits_{\mathfrak{B}} \nabla\lambda\cdot W\, du\, dv. \tag{8, 22}$$

Die erste Variation der Relativoberfläche O^* ist daher

$$\delta O^* = \iint\limits_{\mathfrak{B}} \nabla(z,\lambda)\, W\, du\, dv. \tag{8, 23}$$

Ihr Verschwinden ist ein notwendiges Kennzeichen der isotropen Minimalflächen.

Die Umgestaltung von δO^* durch partielle Integration, d. i. die Anwendung der Greenschen Formel, gibt nun

$$\iint\limits_{\mathfrak{B}} \nabla(z,\lambda)\, W\, du\, dv = -\oint\limits_{\mathfrak{R}} \lambda\,\frac{\partial z}{\partial n}\, ds - \iint\limits_{\mathfrak{B}} \lambda\,\Delta z\cdot W\, du\, dv, \tag{8, 24}$$

wobei unter $\frac{\partial z}{\partial n}$ die Ableitung von $z(u, v)$ nach der isotropen [d. h. im Sinne der Riemannschen Metrik (4, 9) verstandenen] Normalenrichtung n des Randes $\mathfrak{R}$, und unter ds sein isotropes Bogenelement (4, 9) gemeint ist. Dabei denken wir uns den Rand $\mathfrak{R}$ in jenem Sinne durchlaufen, bei dem im Grundriß das Innere zur Linken bleibt, und denken auch an die innere Normale n.

In dieser Darstellung der ersten Variation δO^* der Relativoberfläche verschwindet nun das Randintegral, da $\lambda(u, v)$ auf $\mathfrak{R}$ Null sein sollte. Man hat also

$$\delta O^* = -\iint_{\mathfrak{B}} \lambda \Delta z(u, v) \cdot W \, du \, dv, \tag{8,25}$$

und daher ist für isotrope Minimalflächen in der Tat notwendig

$$\Delta z(u, v) = 0. \tag{8,26}$$

Wegen (17) folgt daraus der Satz:

Das Verschwinden der mittleren Krümmung

$$2H = \Delta z(u, v) = 0 \tag{8,27}$$

ist ein notwendiges Kennzeichen der Minimalflächen des isotropen Raumes.

88. Die isotropen Minimalflächen als Extremalen des Dirichletschen Problems. Ihre Darstellung als Potentialflächen. Wir wollen unsere Formeln noch für die explizite cartesische Darstellung $z = z(x, y)$ der Fläche anschreiben. Man hat dann für die auf den Ursprung bezogene isotrope Relativoberfläche

$$\boxed{O^* = \frac{1}{2}\iint_{\mathfrak{B}} \nabla z(x, y) \, dx \, dy = \frac{1}{2}\iint_{\mathfrak{B}} \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] dx \, dy}. \tag{8,28}$$

Die Variationsformel (22) aber nimmt mit Rücksicht auf (25) die Gestalt an:

$$\bar{O}^* = O^* - \varepsilon \iint_{\mathfrak{B}} \lambda \Delta z(x, y) \, dx \, dy + \frac{\varepsilon^2}{2} \iint_{\mathfrak{B}} (\lambda_x^2 + \lambda_y^2) \, dx \, dy. \tag{8,29}$$

Aus ihr entnimmt man sofort, daß *das zu den isotropen Minimalflächen gehörige Extremum der Relativoberfläche* (28) *stets ein absolutes Minimum ist.*

In der Tat ist für sie nach (27) die Laplacesche *Gleichung*

$$\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \tag{8,30}$$

erfüllt, und das letzte Integral in (29) stets (d. h. abgesehen vom Trivialfalle $\lambda = 0$) positiv.

Das von uns behandelte *Variationsproblem der isotropen Relativoberfläche* (28) ist jenes, das aus der Funktionentheorie als *Dirichletsches Problem* bekannt ist. Wir hatten es oben nur in parameterinvarianter Weise geschrieben. In der Tat weiß man aus der Potentialtheorie, daß die Extremalen des *Dirichletschen Integrals* (28) auf die *Laplacesche Gleichung* (30) als Lagrangesche Gleichung ihres Variationsproblems führen und absolute Minima des Integrals ergeben. Die *Integralflächen der Poten-*

tialgleichung (30) werden gerne als *Potentialflächen*[26]) bezeichnet. Wir können also sagen:

Die Potentialflächen (30) *übernehmen im isotropen Raume die Funktion seiner Minimalflächen. Ihre isotrope mittlere Krümmung H ist Null.*

Man weiß, daß sich (reelle) Flächen dieser Art auch durch die Real- oder Imaginärteile analytischer Funktionen in der einfachen Form

$$(8,31) \qquad z = \Re f(x+iy) \quad \text{oder} \quad z = \Im f(x+iy)$$

darstellen lassen, die als das *isotrope Gegenstück zur* Weierstrass*schen Darstellung der euklidischen Minimalflächen* aufgefaßt werden kann.

Eine relativ-geometrische Auffassung der Potentialflächen als $\mathfrak{P}$-Minimalflächen findet sich schon bei E. Müller[17a]).

89. Die assoziierten und adjungierten (konjugierten) isotropen Minimalflächen. Es ist nicht meine Absicht, an dieser Stelle die ausführliche Theorie der isotropen Minimalflächen darzulegen. Sie wird der Gegenstand einer eigenen Abhandlung sein. Es scheint mir aber doch von Interesse, diese Theorie durch einige im Rahmen dieser Arbeit bleibende Bemerkungen schon jetzt zu beleuchten. Man möge sie nur als vorläufige Beispiele der angekündigten Note und als abschließende Beispiele zur vorliegenden Note auffassen.

Ist

$$(8,32) \qquad w = f(x+iy) = U(x,y) + iV(x,y)$$

eine analytische Funktion der komplexen Variablen $x+iy$, so bilden die (reellen!) Flächen der Schar (α = reeller Parameter)

$$(8,33) \qquad \boxed{z = \tfrac{1}{2}\left[f(x+iy)\cdot e^{-i\alpha} + f(x-iy)\cdot e^{+i\alpha}\right]}$$

das genaue isotrope Gegenstück der euklidischen assoziierten Minimalflächen. Für Parameter α, die sich um $\frac{\pi}{2}$ unterscheiden, ergeben sich dann die adjungierten (oder konjugierten) Paare von isotropen Minimalflächen der Schar.

[26]) Auf die Vorstellung dieser Potentialflächen wird oft zur geometrischen Veranschaulichung des Dirichletschen Problems zurückgegriffen, z. B. auch von D. Hilbert, Über das Dirichletsche Prinzip. Crelle Journ. f. Math. **129** (1905), S. 63—67 (= Ges. Abhandl. III, Berlin 1935, S. 10—14). — Bekanntlich können sie auch als einfache geometrische Realisierungen Riemannscher Flächen analytischer Funktionen dienen, eine Vorstellung, die sich auch gerne bei F. Klein findet. Man vergleiche z. B. die Bemerkung in F. Klein, Ges. Abhandl. 2, Leipzig-Berlin, S. 77, Fußnote 23. — Verschiedene Modelle von Potentialflächen sind auf Kleins Veranlassung von W. v. Dyck im Verlage von L. Brill (Darmstadt) herausgegeben worden.

Alle diese Flächen sind im isotropen Raume aufeinander (in einem genau zu präzisierenden Sinne) abwickelbar, nämlich mit (trivialer) Gleichheit der isotropen Bogenelemente, und (nicht trivialer) Gleichheit der Relativkrümmungen K. Im elementaren Sinne konjugierte Potentialflächen, wie etwa die Flächen

$$z = U(x, y) \quad \text{und} \quad z = V(x, y) \tag{8, 34}$$

sind dabei im Sinne unserer isotropen Definition adjungierte Minimalflächen. Dabei entsprechen einander (wie im euklidischen Falle) auf den adjungierten Minimalflächen wechselseitig die Asymptotenlinien und die isotropen Krümmungslinien.

Ähnliches gilt (im euklidischen Wortlaut) für die allgemeinere Zuordnung der assoziierten Minimalflächen, und auch für die sphärischen Bilder bleiben die euklidischen Sätze im Wesen aufrecht.

Mit den Potentialflächen scheint sich als erster vom (euklidischen) differentialgeometrischen Standpunkte aus U. Dini[27]) (1865) befaßt zu haben. Unsere allgemeinen assoziierten Minimalflächen treten (ohne isotrope Bedeutung) erstmalig bei K. Kommerell[28]) (1905) auf. Gewisse Eigenschaften der assoziierten und adjungierten Paare von Potentialflächen sind von den verschiedensten Autoren immer wieder von neuem entdeckt worden.

90. Das isotrope Gegenstück der Minimalfläche von Enneper. Man kennt im euklidischen Raume eine Reihe von besonderen Minimalflächen, denen aus verschiedenen Gründen erhöhtes Interesse zukommt. Im isotropen Raume gibt es zu diesen Flächen genaue Gegenstücke. Um wenigstens ein Beispiel dafür zu geben, will ich noch kurz *das isotrope Gegenstück der Enneperschen Minimalfläche* anführen.

Man kann diese Fläche in einer der beiden folgenden (konjugierten) Formen darstellen

$$z = \Re(x + iy)^{\frac{2}{3}} \qquad ; \qquad z = \Im(x + iy)^{\frac{2}{3}} \tag{8, 35}$$

oder sie parametrisch so schreiben:

$$\begin{aligned} x &= u^3 - 3uv^2 \\ y &= 3u^2v - v^3 \\ z &= u^2 - v^2 \end{aligned} \quad ; \quad \begin{aligned} x &= u^3 - 3uv^2 \\ y &= 3u^2v - v^3 \\ z &= 2uv \end{aligned} \tag{8, 36}$$

---

[27]) U. Dini, Sulla teoria delle superficie. Giorn. di Mat. 3 (1865), S. 65—81; insbes. S. 78—81.

[28]) K. Kommerell, a) Riemannsche Flächen im ebenen Raum von vier Dimensionen. Math. Annalen 60 (1905), S. 548—596; insbes. § 13. — b) Theorie der Raumkurven und krummen Flächen II. Berlin-Leipzig 1931, S. 181.

wobei die Parameterlinien $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ die

isotropen Krümmungslinien | Asymptotenlinien

ergeben.

In der Tat sind *beide Flächen zueinander bewegungskongruent* und gehen, wie ihre cartesischen Gleichungen

(8, 37) $27(x^2+y^2)z^3+(x^2-y^2-4z^3)^3=0 \quad 27(x^2+y^2)z^3-(2xy+4z^3)^3=0$

zeigen, durch Drehung um die vollisotrope z-Achse um den Winkel $\frac{\pi}{4}$ auseinander hervor.

Die Ordnung der Fläche ist also (wie im euklidischen Falle) neun.

Schreibt man die Gleichung der nichtisotropen Ebenen mittels der Koordinaten (U, V, W) in der Form

(8, 38) $$z = Ux + Vy + W,$$

so findet man aus den Ebenengleichungen

(8, 39) $27(U^2+V^2)^2 \cdot W = 4(U^2-V^2) \quad 27(U^2+V^2)^2 \cdot W = 8UV$

als Klasse der isotropen Enneper-Fläche fünf.

Aus den auf Krümmungs- und Asymptotenparameter bezogenen Darstellungen (36) folgt, daß (wie im euklidischen Falle) die *Asymptotenlinien der isotropen Enneper-Fläche kubische Raumkurven* (nämlich isotrope Böschungslinien) und ihre *isotropen Krümmungslinien ebene Kubiken* sind. Die beiden konjugierten Flächen (36) liegen dabei so, daß sich die Grundrisse der Krümmungs- und Asymptotenlinien wechselseitig decken. Zusammen bilden sie zwei isotherme Netze in diagonaler Lage.

91. Die assoziierten isotropen Enneper-Flächen. Die im Sinne der Nr. 89 zu diesen beiden konjugierten Enneper-Flächen (35) *assoziierten isotropen Minimalflächen* lauten

(8.40) $$z = \Re\left[(x+iy)^{\frac{2}{3}} \cdot e^{-i\alpha}\right]$$

oder

(8, 41) $$\begin{cases} x = u^3 - 3uv^2, \\ y = 3u^2v - v^3, \\ z = (u^2-v^2)\cos\alpha + 2uv \cdot \sin\alpha. \end{cases}$$

Sie sind gleichfalls untereinander und zu den beiden obigen isotropen Enneper-Flächen (36) *bewegungskongruent.* In der Tat gehen sie aus einer von ihnen, etwa der zu $\alpha = 0$ gehörigen Fläche (36, links) durch Drehung um die vollisotrope z-Achse um den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ hervor; die zu $\alpha = \frac{\pi}{2}$ gehörige konjugierte Fläche (36, rechts), entsteht dabei, wie erwähnt, durch Drehung um $\frac{\pi}{4}$.

Die assoziierten isotropen ENNEPER*-Flächen* (39) *sind* durch gleiche Parameter (u, v) so *aufeinander abgebildet*, daß sich entsprechende Punkte im Grundriß decken. Im isotropen Raume sind die Flächen daher *längentreu*, somit auch konform und *flächentreu* aufeinander bezogen. Darüber hinaus aber erfreuen sie sich der neuen, d. h. aus der Längentreue noch nicht folgenden, wichtigen Eigenschaft, der *Gleichheit der Relativkrümmungen* und der *Gleichheit der Relativoberflächen* korrespondierender Punkte bzw. Flächenstücke.

Die isotropen assoziierten ENNEPER*-Flächen sind daher* (Nr. 89) *unter Erhaltung der Relativoberflächen im isotropen Raume aufeinander abwickelbar.*

Man stellt leicht fest, daß die isotropen *sphärischen Bilder der Krümmungs- und Asymptotenlinien* unserer ENNEPER-Flächen (oder ihre Richtungsbilder im Sinne der Nr. 75), ähnlich dem euklidischen Falle, *parabolische Kreisbüschel* sind. Darum sind, wie erwähnt, die *Krümmungslinien ebene Kurven* und die *Asymptotenlinien isotrope Böschungslinien*[29]).

92. Erzeugung der isotropen (und euklidischen) Enneper-Flächen als quasielliptische Schiebflächen. Aus einem allgemeinen von mir gegebenen Theorem über die Flächen, deren Asymptotenlinien beider Scharen linearen Komplexen angehören[30]), kann man folgern, daß *die* ENNEPER*-Fläche des isotropen und des euklidischen Raumes sich in einem geeigneten quasielliptischen Raume durch* CLIFFORD*sche Schiebung ihrer Asymptotenlinien aneinander als Schiebflächen erzeugen lassen.* Der Ausdruck „quasielliptisch" ist dabei im komplexen Sinne, d. h. mit zulässigen Realitätsverschiebungen des quasielliptischen Maßgebildes zu verstehen. Beide Flächen gehören damit (komplex gesehen) zu einer Klasse, auf welche W. BLASCHKE unlängst aufmerksam gemacht hat[31]).

Übrigens gehören sie auch in beiden Fällen zur Klasse der Affinminimalflächen.

---

29) Über die *isotropen Böschungslinien* vgl. K. STRUBECKER[1]), insbes. Nr. **26**. — Auch im isotropen Raume ist für Böschungslinien das *Verhältnis von Krümmung und Torsion konstant.*

30) K. STRUBECKER, Über die Flächen, deren Asymptotenlinien beider Scharen linearen Komplexen angehören. (Vorläufige Mitteilung.) Anzeiger der Akademie d. Wiss. Wien, Nr. 11 (1941).

31) W. BLASCHKE, Ebene Kinematik. Berlin-Leipzig, 1938, § 15.

(Eingegangen am 14. März 1942.)