

## Werk

**Titel:** Mathematische Zeitschrift

**Ort:** Berlin

**Jahr:** 1942

**Kollektion:** Mathematica

**Digitalisiert:** Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

**Werk Id:** PPN266833020\_0048

**PURL:** [http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN266833020\\_0048](http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN266833020_0048)

**LOG Id:** LOG\_0032

**LOG Titel:** Isoperimetrische Ungleichungen für konvexe Bereiche mit Ecken

**LOG Typ:** article

## Übergeordnetes Werk

**Werk Id:** PPN266833020

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN266833020>

## Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

# Isoperimetrische Ungleichungen für konvexe Bereiche mit Ecken.

Von

Alexander Dinghas in Berlin.

1. In einer längeren, in dieser Zeitschrift vor kurzem veröffentlichten Abhandlung<sup>1)</sup> bewies ich durch eine einfache, geometrisch-analytische Methode einige isoperimetrische Gleichungen und Ungleichungen, welche eine von ERHARD SCHMIDT behandelte Aufgabe zum Gegenstand hatten.

Diese Aufgabe beherrscht das ganze isoperimetrische Problem für den  $n$ -dimensionalen euklidischen, sphärischen und hyperbolischen Raum und lautet in ihrer einfachsten Gestalt, die uns hier beschäftigen wird, folgendermaßen:

*Unter allen, in einem Streifen einer gewöhnlichen Ebene eingeschriebenen, einfach geschlossenen Kurven von der Länge  $L$  soll diejenige bestimmt werden, welche das Maximum des eingeschlossenen Inhalts  $F$  aufweist<sup>2)</sup>.*

Die dort zugelassenen Kurven waren beliebig. Es ergab sich dann, daß das Maximum je nach dem Wert von  $L$  für zwei Typen von Extremalen eintreten kann, und zwar für die dort als linsenförmige bzw. als Kreis-Rechteck-Extremale bezeichneten Kurven.

Beschränkt man sich nur auf konvexe Kurven  $C$ , so kann die vorhin gestellte Aufgabe in dem Sinne verallgemeinert werden, daß man noch eine endliche oder abzählbar unendliche Anzahl von Ecken  $E_i$  mit vorgeschriebenen Eckenwinkeln  $\psi_i$  vorgibt. Unter Eckenwinkel (vgl. Fig. 1) verstehen wir diejenigen Winkel, welche die Normalen auf die beiden Tangenten in dem betreffenden Winkel bilden. Dabei wird vorausgesetzt, daß  $E_i$  nicht auf den beiden Begrenzungsgeraden  $\alpha, \alpha'$  liegen. Für diese vier Ecken  $A_1, A_2, A_3, A_4$

---

<sup>1)</sup> Zum isoperimetrischen Problem in Räumen konstanter Krümmung. Math. Zeitschr. 47 (1942), S. 677–737.

<sup>2)</sup> Isoperimetrische Aufgaben (besonders für konvexe Kurven) in Zusammenhang mit der Breite wurden schon früher behandelt, hauptsächlich von BONNESEN. Wenn an dieser Stelle nur ERHARD SCHMIDT genannt wird, so geschieht dies, weil dieser mit einer bewunderungswürdigen Konsequenz die Aufgabe verallgemeinerte und sie für alle drei Räume konstanter Krümmung, den euklidischen, sphärischen und hyperbolischen, stellte und löste. Für die ältere Literatur vgl. man das Buch von BONNESEN-FENCHEL, Theorie der konvexen Körper. Berlin, Springer, 1935. Die Arbeiten von SCHMIDT sind alle in der Math. Zeitschr. erschienen. Für genaue Angaben vgl. man meine in 1. zitierte Arbeit.

definieren wir als Eckenwinkel  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$  die Winkel, welche die Halbtangenten in den betreffenden Ecken mit  $\alpha$  bzw.  $\alpha'$  bilden. Es werden noch alle  $\omega_i < \frac{\pi}{2}$  genommen, wodurch diese Definition der  $\omega_i$  im wesentlichen mit derjenigen von  $\varphi_i$  zusammenfällt.

Wir behandeln zuerst folgende Aufgabe:

*Unter allen konvexen Kurven, welche dem Streifen*

$$(1.1) \quad -a \leq x \leq a$$

*eingeschrieben sind und die eine Anzahl von „inneren“ Ecken  $E_i$  mit vorgegebenen Eckenwinkeln  $\varphi_i$  und dazu noch vorgegebene Randwinkel  $\omega_1, \dots, \omega_4$  aufweisen, soll diejenige bestimmt werden, welche unter vorgegebenem  $L$  das Maximum von  $F$  aufweist.*

Die Extremalen dieses Problems werden sich als der Gestalt nach nicht eindeutig bestimmte Kurven erweisen. Wie wir es ferner an der richtigen Stelle genauer feststellen werden, ist die gestellte Aufgabe nur dann lösbar, wenn  $L$  eine gewisse von  $\varphi_i, \omega_i$  und  $a$  abhängige Grenze überschreitet. Der Unterschied zwischen linsenförmigen und Kreis-Rechteck-Extremalen verschwindet hier, eigentlich bleiben nur die Kreis-Rechteck-Extremalen, und wir werden sehen, daß für feste  $\varphi_i, \omega_i$  alle Lösungen durch Bewegung von zwei Halbkreisen erhalten werden können. Nach Lösung dieser Aufgabe wird eine ähnliche behandelt, wobei an Stelle des Streifens (1.1) ein Winkelraum bzw. ein Dreieck  $T$  genommen wird. Beide Aufgaben führen zu interessanten Verschärfungen der isoperimetrischen Ungleichung für ebene konvexe Kurven.

Für den Fall z. B. einer Kurve  $C$ , welche einem Dreieck  $T$  oder im Streifen (1.1) eingeschrieben ist, gilt

$$(1.2) \quad F - La + \pi a^2 \leq -a^2 \sum_i \left( \operatorname{tg} \frac{\varphi_i}{2} - \frac{\varphi_i}{2} \right) - a^2 \sum_i \left( \operatorname{tg} \frac{\omega_i}{2} - \frac{\omega_i}{2} \right),$$

wenn dabei  $a$  den Radius des in  $T$  eingeschriebenen Kreises bedeutet,  $\varphi_i$  die „inneren“ Winkel und die  $\omega_i$  die Winkel von  $C$  mit den Seiten des Dreiecks  $T$ , oder des Streifen (1.1) sind.

Wählt man in dieser Ungleichung das Dreieck  $T$  so, daß die  $\omega_i$  mit gewissen  $\varphi_i$  übereinstimmen, so erhalten wir

$$(1.3) \quad F - La + \pi a^2 \leq -a^2 \sum_i \left( \operatorname{tg} \frac{\varphi_i}{2} - \frac{\varphi_i}{2} \right) = -a^2 w.$$

Da nun (1.3) auch folgendermaßen geschrieben werden kann,

$$(1.4) \quad F - La + (\pi + w)a^2 = \left( F - \frac{L^2}{4(\pi + w)} \right) + \frac{1}{4(\pi + w)} (L - 2(\pi + w)a)^2 \leq 0,$$

so folgt daraus die zuerst von G. BOL<sup>3)</sup> durch ganz andere Überlegungen bewiesene Ungleichung

$$(1.5) \quad 4\pi F - L^2 \leq -4F \sum_i \left( \operatorname{tg} \frac{\varphi_i}{2} - \frac{\varphi_i}{2} \right).$$

Soll nun hier das Gleichheitszeichen gelten, so muß

$$(1.6) \quad L = 2\pi a + a \sum_i \left( \operatorname{tg} \frac{\varphi_i}{2} - \frac{\varphi_i}{2} \right)$$

sein, und zugleich in (1.3) das Gleichheitszeichen gelten. Da dies nur für Kappenbereiche der Fall ist, so ist der Extremalbereich von (1.5) wegen (1.6) ein Kappenbereich, dessen Form sich einfach bestimmen läßt.

Die hier befolgte Methode besteht in der Zuordnung<sup>4)</sup> der Punkte der gegebenen Kurve und einer geeignet gewählten „Extremalen“ mittels paralleler Tangenten.

2. *Eine isoperimetrische Gleichung.* Wir betrachten zuerst in der  $xy$ -Ebene (Fig. 1) einen Streifen von der Breite  $2a$  etwa

$$(2.1) \quad -a \leq x \leq a$$

und eine in ihm eingeschriebene konvexe Kurve  $C$ . Wir nennen eine Kurve  $C$  eingeschrieben in (2.1), wenn diese innerhalb dieses Streifens verläuft und mit den Begrenzungsgeraden  $\alpha, \alpha'$  gemeinsame Punkte hat.

Wir setzen voraus,  $C$  weist eine endliche oder abzählbar unendliche Anzahl von „inneren“ Ecken  $E_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) auf mit den Eckenwinkeln  $\varphi_i$  und bildet mit  $\alpha, \alpha'$  die Winkel  $\omega_1, \dots, \omega_4$ , wie dies in der Fig. 1 dargestellt ist<sup>5)</sup>.

Kurven, welche alle Voraussetzungen der Aufgabe erfüllen, werden im folgenden zulässige Kurven genannt.

Unser Ziel ist zuerst die Aufstellung einer allgemeinen Ungleichung, welche Länge und Inhalt<sup>6)</sup> einer zulässigen Kurve  $C$  mit den entsprechenden Größen einer „Extremalen“ verbindet.

Dazu konstruieren wir in den Schnittpunkten  $AA'$  der Begrenzungsgeraden  $\alpha, \alpha'$  mit der  $x$ -Achse die Winkel  $\gamma = \operatorname{Min} \{\omega_i\}$  (Fig. 1), und be-

<sup>3)</sup> G. BOL, Ein isoperimetrisches Problem. Nieuw Arch. v. Wiskunde **20** (1940), S. 171–175.

<sup>4)</sup> Für ähnliche Probleme auch von BONNESEN benutzt [vgl. z. B. Quelques problèmes isopérimétriques. Acta Math. **48** (1926), S. 123–178].

<sup>5)</sup> Damit es allerdings überhaupt eine konvexe Kurve  $C$  mit den Winkeln  $\varphi_i$  und  $\omega_i$  gibt, muß die selbstverständliche Bedingung

$$\sum_i^4 \omega_i + \sum_i \varphi_i \leq 2\pi$$

erfüllt sein. Daraus folgt auch die Abzählbarkeit der Winkel.

<sup>6)</sup> Gemeint ist hier immer der Inhalt des von  $C$  begrenzten Bereiches  $\mathfrak{A}$ .

schreiben dann diejenigen Halbkreise  $K_1, K_2$  mit dem Radius  $a$ , welche die Gerade  $\alpha, \alpha'$  und je zwei Seiten des so entstandenen Rhombus berühren, wie dies in der Fig. 1 gezeigt wird. Der Durchschnitt  $K$  der beiden Halbkreise  $K_1, K_2$  bildet den „Kern“ eines Kappenbereiches, der sich als sehr wichtig erweisen wird. Mit Hilfe von zwei Punkten auf  $\alpha, \alpha'$ , z. B.  $B, B'$ , kann man die beliebige „zulässige“

Kurve  $C$  in zwei Teile  $C_1$  bzw.  $C_2$  zerlegen. Wir behaupten jetzt, daß es möglich ist, mit Hilfe paralleler Tangenten die Kurve  $C$  auf eine andere Kurve  $\bar{C}$  abzubilden. Dafür betrachten wir irgendeine Stützgerade  $T$  von  $C$ , und setzen voraus,  $T$  hat mit  $C$  den Punkt  $M$  gemeinsam. Wir ordnen  $T$  diejenige zu ihr parallele Tangente  $T'$  zu, die  $K_1$  oder  $K_2$  entspricht, je nachdem  $M$   $C_1$  oder  $C_2$  angehört. Auf diese Weise sind die Stützgeraden  $T$  von  $C$  den Tangenten  $T'$  von  $K_1, K_2$  stetig und eindeutig zugeordnet. Wir betrachten zuerst ein Paar zugeordnete Tangenten, die nicht zur  $y$ -Achse parallel sind. Die durch  $M(x, y)$  zur

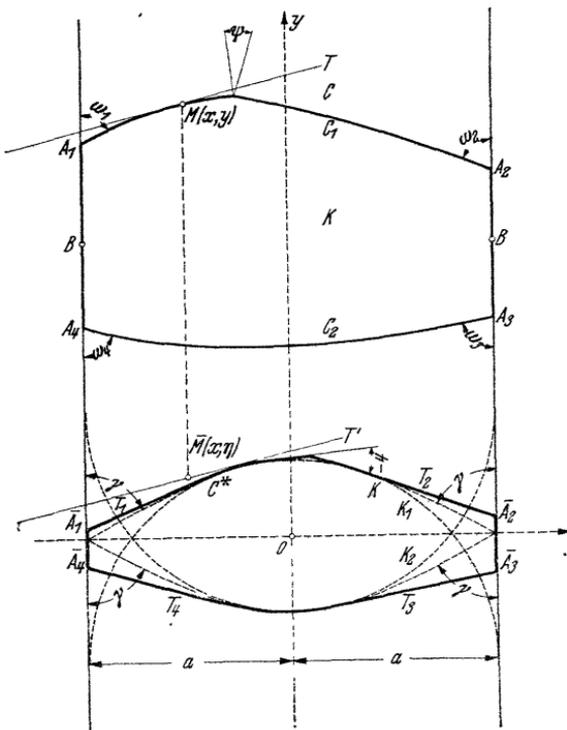


Fig. 1.

$y$ -Achse parallele Gerade möge ihre zugeordnete  $T'$  in dem Punkt  $\bar{M}$  mit Koordinaten  $x, \eta$  schneiden. Diesen Punkt ordnen wir dann dem Punkt  $M$  zu. Hat  $T$  mit  $C$  mehrere Punkte gemeinsam, so wird diese Konstruktion für jeden dieser Punkte wiederholt. Auf diese Weise sind (wegen der gemachten Voraussetzung über die  $\omega_i$ ) der Gesamtheit aller Punkte von  $C$ , welche nicht auf  $\alpha, \alpha'$  liegen, die Gesamtheit der Punkte  $\bar{M}$  stetig zugeordnet, und zwar so, daß zwei verschiedenen  $M$  zwei verschiedene  $\bar{M}$  entsprechen. Den Eckpunkten (und nur diesen) entsprechen mehrere Punkte  $\bar{M}$ , die alle auf einer Parallele zur  $y$ -Achse liegen. Den „Randpunkten“  $A_1, A_2, A_3, A_4$ )<sup>7)</sup> ent-

<sup>7)</sup> Hat  $C$  auf  $\alpha$  oder  $\alpha'$  nur eine „Randdecke“, so werden die entsprechenden  $A_i$  als zusammenfallende betrachtet. Diesem gemeinsamen Punkt entsprechen dann zwei  $\bar{M}$  oder eins, je nachdem die zugehörigen  $\omega_i$  verschieden oder gleich sind.

sprechen im allgemeinen vier Punkte  $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3, \bar{A}_4$ . Die Zuordnung der Punkte zwischen  $A_1A_2$  bzw.  $A_3A_4$  zu den Punkten von  $\bar{A}_1\bar{A}_2, \bar{A}_3\bar{A}_4$  wird im folgenden nicht gebraucht.

Die Punktmenge  $\bar{M}$  begrenzt mit den zwei Geraden einen Bereich  $\bar{\mathfrak{R}}$ , den zugeordneten Bereich von  $\mathfrak{R}$ . Wir bezeichnen dessen Inhalt mit  $\bar{F}$ . Es seien nun  $M(x, y)$  und  $\bar{M}(x, \eta)$  zwei zugeordnete Punkte, und  $\cos(n, x)$ ,  $\cos(n, y)$  die Richtungskosinusse der äußeren Normale  $n$  von  $C$  im Punkte  $M$  mit der  $x$ - bzw.  $y$ -Achse. Betrachten wir  $x, y$  als Funktionen der Bogenlänge  $s$  von  $C$ , so sind  $\cos(n, x)$ ,  $\cos(n, y)$  solche Funktionen  $\Phi(s)$  von  $s$ , daß immer  $\Phi(s \pm 0)$  existiert.

Wir betrachten den Ausdruck

$$(2.2) \quad x \cos(n, x) + \left(\eta + a \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}\right) \cos(n, y),$$

wenn  $M$  auf  $C_1$  variiert. Liegt nun  $M$  nicht auf  $\alpha$  bzw.  $\alpha'$ , so ist dieser Ausdruck, wie man aus der Abbildung gleich abliest, gleich  $a$ , da ja die Projektion eines Vektors mit Koordinaten  $x, \eta + a \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$  in der Richtung  $\cos(n, x)$ ,  $\cos(n, y)$  darstellt. Dasselbe gilt, wenn  $M$  mit  $A_1$  bzw.  $A_2$  übereinstimmt und  $\cos(n, x)$ ,  $\cos(n, y)$  gleich  $-\cos \omega_1, \sin \omega_1$  bzw.  $\cos \omega_2, \sin \omega_2$  sind. Liegt  $M$  zwischen  $A_4A_1$  oder  $A_2A_3$ , so ist  $\cos(n, y) = 0$  und  $x \cos(n, x) = a$ . Die Beziehung

$$(2.3) \quad x \cos(n, x) + \left(\eta + a \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}\right) \cos(n, y) = a$$

ist also für jeden Punkt von  $C_1$  erfüllt. Ebenfalls bestätigt man die Gleichung

$$(2.4) \quad x \cos(n, x) + \left(\eta - a \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}\right) \cos(n, y) = a$$

für jeden Punkt von  $C_2$ .

Fassen wir diese beiden letzten Gleichungen zusammen, so erhalten wir nach Multiplikation mit  $ds$  und Integration über die ganze Kurve  $C$

$$(2.5) \quad \int x \cos(n, x) ds + \int \left(\eta \pm a \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}\right) \cos(n, y) ds = aL.$$

Im zweiten Integral wird allerdings  $+$  oder  $-$  genommen, je nachdem  $M$  auf  $C_1$  oder  $C_2$  liegt.

Wie man unmittelbar einsieht, stellt das erste Integral den Inhalt  $F$  von  $\mathfrak{R}$  dar, während

$$(2.6) \quad \int_C \eta \cos(n, y) ds = \int_{-a}^{+a} \eta dx$$

den Inhalt  $\bar{F}$  von  $\bar{\mathfrak{R}}$  bedeutet.

Hiermit erhalten wir die fundamentale Gleichung<sup>8)</sup>

$$(2.7) \quad F + \bar{F} + 4 a^2 \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = aL,$$

welche für jede zulässige Kurve  $C$  erfüllt ist.

3. *Die Extremalen.* Wir konstruieren jetzt eine Extremale unseres Problems folgendermaßen: Wir gehen zuerst vom Durchschnitt  $K$  der beiden Halbkreise  $K_1, K_2$  aus und ziehen zuerst die 4 Tangenten  $T_1, T_2, T_3, T_4$ , welche mit  $\alpha, \alpha'$  die Winkel  $\omega_1, \dots, \omega_4$  bilden. Es sei  $M_i$  der Berührungspunkt von  $T_i$  mit dem zugehörigen Halbkreis. Wegen der Beziehung

$$(3.1) \quad \sum_1^4 \omega_i + \sum \psi_i \leq 2\pi$$

ist es jetzt möglich, in den freien Bögen  $M_1M_2$  und  $M_3M_4$  Kappen mit den Winkeln  $\psi_i$  anzusetzen, welche außer höchstens Randpunkten keine gemeinsamen Punkte besitzen. Unter einer Kappe  $\mathfrak{R}_i$  verstehen wir allerdings die Figur, die von einem Kreisbogen (von  $K_1$  oder  $K_2$ ) und zwei Tangenten, die sich unter einem Winkel  $\psi_i$  schneiden, begrenzt ist. Der einer zulässigen Kurve  $C$  entsprechende Kappenbereich wird noch durch die Forderung festgelegt, daß die Tangenten, welche die Kappe von dem Winkel  $\psi_i$  bestimmen, zu den Halbtangenten der Ecke  $E_i$  (mit dem vorgeschriebenen Winkel  $\psi_i$ ) parallel sind. Durch diese Festlegung sind jeder zulässigen geschlossenen Kurve  $C$ , d. h. jeder Kurve, welche die in Nr. 2 gestellten Forderungen erfüllt, ein der Gestalt nach eindeutig bestimmter Kappenbereich zugeordnet. Diesen Kappenbereich bezeichnen wir im folgenden mit  $\mathfrak{R}^*$ . Die Bedeutung von  $\mathfrak{R}^*$  besteht in folgender Extremaleigenschaft: *Es gilt*

$$(3.2) \quad \bar{\mathfrak{R}}^* = \mathfrak{R}^*$$

und infolgedessen

$$(3.3) \quad \bar{F}^* = F^*.$$

Um nun (2.9) weiter umzuformen, wiederholen wir die Rechnungen von Nr. 2 mit  $\mathfrak{R}^*$  an Stelle des, von  $C$  begrenzten Bereiches  $\mathfrak{R}$  unter Berücksichtigung von (3.3). Wir erhalten dann

$$(3.4) \quad F^* + \bar{F}^* + 4 a^2 \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = aL^*,$$

wobei  $L^*$  die Länge der Begrenzung  $C^*$  von  $\mathfrak{R}^*$  bedeutet. Durch Subtraktion von (2.9) folgt dann

$$(3.5) \quad F - \bar{F}^* = a(L - L^*) - (\bar{F} - F^*).$$

Wie unmittelbar aus der Konstruktion von  $\bar{\mathfrak{R}}$  bzw.  $\mathfrak{R}^*$  folgt, ist der zweite Bereich immer im ersten enthalten und somit stellt die nicht negative Differenz  $\bar{F} - F^*$  tatsächlich ein Restglied dar.

<sup>8)</sup> Für  $\gamma = 0$  wurde diese Ungleichung zuerst von BONNESEN abgeleitet (l. c. S. 153).  
 Mathematische Zeitschrift. 48. 28

Die Ungleichung (3. 5) gilt auch für  $\gamma = 0$ . In diesem Fall besteht der Kern des Kappenbereiches aus dem Kreis mit Radius  $a$ , der  $\alpha$ ,  $\alpha'$  in  $A$ ,  $A'$  berührt.

4. *Weitere isoperimetrische Gleichungen.* Um weitere isoperimetrische Gleichungen zu erhalten, schneiden wir die Begrenzung  $C^*$  von  $\mathfrak{R}^*$  in den Punkten  $A$ ,  $A'$  durch und ziehen die beiden Teile von  $C^*$  wie zwei Teile eines Teleskops auseinander. Werden diese beiden Teile um  $q$  voneinander entfernt, so beträgt der Inhalt  $F_q^*$  der so entstandenen Figur  $\mathfrak{R}_q^*$ ,  $F^* + 2aq$ , während sein Rand  $C_q^*$  die Länge  $L_q^* = L^* + 2q$  besitzt. Ebenfalls wird der neue Wert von  $\bar{F}_q$  (in bezug auf die neu entstandene Figur des Rechtecks mit den zwei angesetzten Halbkreisen, wenn  $q$  genügend groß ist) gleich  $\bar{F}_q = \bar{F} + 2aq$ , und man erhält aus (3. 5) wegen

$$(4. 1) \quad \bar{F} - F^* = \bar{F}_q - F_q^*, \quad F^* - aL^* = F_q^* - aL_q^*,$$

die zweite wichtige isoperimetrische Gleichung

$$(4. 2) \quad F - F_q^* = a(L - L_q^*) - (\bar{F}_q - F_q^*).$$

Hier spielt wieder der Ausdruck  $\bar{F}_q - F_q^* \geq 0$  die Rolle eines Restgliedes, das dann und nur dann verschwindet, wenn  $C$  mit der zugehörigen  $C_q^*$  übereinstimmt.

Die Gleichung (4. 2), welche für  $q = 0$  mit der (3. 5) identisch ist ( $\mathfrak{R}_0^*$  ist dann mit dem früheren  $\mathfrak{R}^*$  identisch), enthält eine vollständige Beantwortung der in Nr. 2 gestellten Aufgabe. Wir fassen die Ergebnisse im folgenden Satz zusammen:

*Für vorgegebene  $\omega_i$ ,  $\psi_i$  und  $L$  hat die Aufgabe eine Lösung, wenn*

$$(4. 3) \quad L \geq L^*$$

*ist, wobei  $L^*$  den Rand des in Nr. 3 konstruierten Kappenbereiches  $\mathfrak{R}^*$  ist. Ist diese Ungleichung erfüllt, so ist die Extremale eine  $C_q^*$  mit  $L = L_q^*$ .*

Der Beweis dieses Satzes folgt aus (4. 2) unmittelbar, wenn man dort  $q$  so wählt, daß  $L = L_q^*$  wird. Wegen

$$(4. 4) \quad L_q^* = L^* + 2aq$$

ist der Wert von  $q$  durch die Forderung  $L = L_q^*$  eindeutig bestimmt. Dagegen ist die Gestalt der Extremalen nicht eindeutig bestimmt, da im Falle des Eintreffens des Gleichheitszeichens in  $F - F^* \leq 0$  nur

$$(4. 5) \quad \bar{F} = F_q^*$$

sein muß. Hier tritt das Gleichheitszeichen für alle Kappenbereiche  $\mathfrak{R}^*$  mit den Winkeln  $\psi_i$ ,  $\omega_i$  ein, die man aus einer derselben durch Verschiebung der Ecken und eventuelle Vertauschung der Kappen erhalten kann. Denn alle

diese Kappenbereiche haben denselben Inhalt  $F^*$  und dieselbe Länge  $L^*$  bzw.  $L_q^*$ ).

Zum Beweis dieser Tatsache erinnern wir nochmals an die Konstruktion von  $\mathfrak{R}_q^*$ .

Der Bereich  $\mathfrak{R}^*$  mit den Winkeln  $\psi_i, \omega_i$  wird in  $A, A'$  durchgeschnitten. Danach werden die beiden Teile so weit auseinandergezogen, bis die Gesamtlänge  $L_q^*$  des Randes  $C_q^*$  des so entstandenen Bereiches die Länge  $L$  erreicht.

Nun zeigt ein Blick auf die Konstruktion von  $\mathfrak{R}_q^*$  und  $\bar{\mathfrak{R}}_q$ , daß (4. 5) dann und nur dann besteht, wenn die Ecken von  $C$  mit den entsprechenden Ecken des Randes  $C^*$  auf denselben Parallelen zur  $y$ -Achse liegen. Da diese Tatsache durch  $q$  nicht gestört wird, trifft dies auch für  $\mathfrak{R}_q^*$  zu. Wäre nämlich dies für eine Ecke  $E_i$  nicht der Fall, so käme, wie man leicht einsieht, zum Bereich  $\bar{\mathfrak{R}}$  ein Dreieck von nicht verschwindendem Inhalt hinzu, der  $\mathfrak{R}^*$  nicht angehören würde. Da nun aus (4. 5) noch folgt, daß die Begrenzungen  $\bar{C}$  von  $\bar{\mathfrak{R}}$  und  $C_q^*$  übereinstimmen, so ergibt sich also (eventuell mit Ausnahme einer abzählbaren Menge

$$(4. 6) \quad \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{d\bar{s}}, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{d\eta}{d\bar{s}},$$

wenn  $\bar{s}$  die Bogenlänge von  $C_q^*$  bedeutet. Da es sich bei  $C$  um eine konvexe Kurve handelt, so folgt aus der ersten Differentialgleichung  $\bar{s} = s + \text{konst.}$ , und aus der zweiten

$$(4. 7) \quad y = \eta + \text{konst.}$$

Daraus folgt, daß  $\bar{\mathfrak{R}}$  durch Parallelverschiebung von  $\mathfrak{R}$  entsteht. Da nun (4. 5) gelten muß, und  $\mathfrak{R}_q^*$  konvex ist, entsteht  $\mathfrak{R}$  durch Parallelverschiebung seines Kappenbereiches und ist hiermit mit diesem kongruent. Nimmt man jetzt als  $C$  irgendeinen „zulässigen“ Kappenbereich, so sind alle Bedingungen für das Eintreffen von (4. 5) erfüllt. Da umgekehrt für das Eintreffen von (4. 5) die Übereinstimmung von  $C$  und  $C_q^*$  erforderlich ist, so folgt daraus, daß (4. 5) nur für Kappenbereiche und nur für diese erfüllt ist. Hiermit ist auch der Beweis des Satzes erbracht worden.

5. *Der Fall eines Winkelraumes.* Wir beschäftigen uns im folgenden mit einer allgemeinen Aufgabe, die sich auf konvexe Kurven mit Ecken bezieht, die in einem Dreieck eingeschrieben sind.

Wir behandeln zuerst folgende speziellere Aufgabe: Es soll ein konvexer Kurvenbogen  $C$  bestimmt werden, der zwei Punkte zweier sich schneidender Geraden verbindet (Fig. 2) so, daß der Ausdruck  $J - aS$  mit einem festen  $a$  ein Maximum wird.

9) Bei festgehaltenem  $q$ .

Dabei sind  $J$  und  $S$  folgendermaßen definiert: Der Kreis  $K_0$  mit dem Radius  $a$  möge  $\alpha$  bzw.  $\alpha'$  in  $A$  bzw.  $A'$  berühren. Die Radien  $OA$ ,  $OA'$  und der Kurvenbogen  $C$  bestimmen einen Bereich  $OACB'A'O$ , dessen

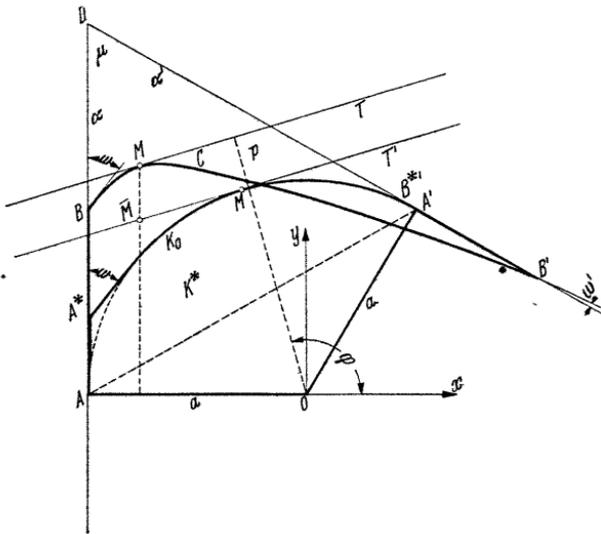


Fig. 2.

algebraischer Inhalt mit  $J$  bezeichnet werden soll. Damit wird gemeint, daß  $J$  gleich etwa dem Integral

$$(5.1) \quad J = \int xy' ds$$

erstreckt in dem üblichen positiven Sinn längs der nicht notwendig konvexen Kurve  $AOA'B'BA$  gesetzt werden kann, wobei  $ds$  das Bogenelement dieser Kurve bezeichnet.

Ferner ist  $S$  gleich der Summe

$$(AB) + \text{Länge } C + (A'B'),$$

wobei  $(AB)$  bzw.  $(A'B')$  positiv sind, falls die Vektoren  $\vec{AB}$  bzw.  $\vec{A'B'}$  nach der Spitze  $D$  zeigen, und negativ im entgegengesetzten Fall. In der Figur ist z. B.  $(AB)$  positiv und  $(A'B')$  negativ gezeichnet.

Wir machen noch folgende Voraussetzungen über die Ecken von  $C$ :

1)  $C$  bildet mit  $\alpha$  bzw.  $\alpha'$  die Winkel  $\omega$ ,  $\omega'$  und 2)  $C$  besitzt endlich oder abzählbar unendlich viele Ecken, in denen die Normalen nach der früheren Definition die Winkel  $\psi_i$  bilden. Diese Winkel erfüllen die für die Lösung der Aufgabe selbstverständliche Bedingung

$$(5.2) \quad \omega + \omega' + \sum_i \psi_i + \mu \leq \pi.$$

Daß es solche Kurven gibt, werden wir sofort bei der Konstruktion der Extremalen sehen.

Wir wiederholen nun unsere Konstruktion von Nr. 2. mittels paralleler Tangenten auf die beiden Gebiete  $OA K_0 A'O$  und  $O A B C B' A'O$ . Einem inneren Punkt  $M$  von  $C$  werden folgende Punkte zugeordnet:

Es sei  $T$  eine durch  $M$  gehende Stützgerade von  $C$  und  $T'$  diejenige Tangente von dem Bogen  $K_0$ , welche zur  $T$  parallel ist. Die durch  $M$  zu  $\alpha$  parallele Gerade trifft  $T'$  in einem Punkt  $\bar{M}$ , den wir dann  $M$  zuordnen. Gehen mehrere Stützgeraden durch  $M$ , so werden diesem Punkt mehrere Punkte zugeordnet. Für die übrigen Punkte des Zuges  $O A B C B' A'O$  führen wir die Zuordnung folgendermaßen durch: Die Punkte von  $OA$ ,  $OA'$  werden sich selbst zugeordnet, ebenfalls die Punkte der Strecke  $A'B'$ . Für die Punkte der Strecke  $AB$  definieren wir die zugeordneten Punkte durch Stetigkeit. Es sei wie in 2.  $T$  eine Stützgerade mit Normalrichtung  $\varphi$ . Ist  $p(\varphi)$  die Entfernung von  $T$  zum Nullpunkt 0 und sind  $x, y$  die Koordinaten von  $M$  und  $x, \eta$  diejenigen von  $\bar{M}$ , so ist

$$(5. 3) \quad \eta = y - \frac{p-a}{\sin \varphi}.$$

Nun ist  $p(\pi) = a$ , es gilt also, wenn man  $\varphi \rightarrow \pi - 0$  konvergieren läßt,

$$(5. 3) \quad \eta_B = y_B - p'(\pi - 0) = y_B - y_B = 0.$$

Die Stetigkeit der Zuordnung wird also bewahrt, wenn man den Punkten der Strecke  $AB$  die Punkte von  $AA^*$  mittels paralleler Stützgeraden zugeordnet, wobei noch  $A$  sich selbst zugeordnet wird. Entsprechendes gilt für die Punkte der Strecke  $A'B'$ .

Durch diese Zuordnung entsteht aus der Menge der Punkte  $M$  von  $O A B C B' A'O$  eine Punktmenge  $(\bar{M})$ , welche eine geschlossene Kurve  $C$  bildet. Wir bezeichnen den von  $\bar{C}$  eingeschlossenen Bereich mit  $\bar{\mathfrak{R}}$ . Es ist einfach zu sehen, daß  $\bar{\mathfrak{R}}$  den Kappenbereich  $\mathfrak{R}^*$  von  $C$  in sich enthält. Dieser letzte Bereich entsteht aus dem Kreissegment  $OA K_0 A'O$ , wenn man ihm die durch die  $\omega, \omega'$  und  $\varphi_i$  bestimmten Kappen ansetzt. Wir bezeichnen im folgenden mit  $\bar{J}$  den Inhalt des durch  $\bar{C}$  begrenzten Bereiches  $\bar{\mathfrak{R}}$  und mit  $J^*$  dasjenige von  $\mathfrak{R}^*$ . Es seien nun  $\cos(n, x), \cos(n, y)$  die Richtungskosinusse der „äußeren“ Normalen von  $O A B C B' A'O$ . Diese sind so definiert, daß bei dem üblichen positiven Durchlaufsinne  $n$  nach rechts gerichtet wird.

Wir betrachten nun den Ausdruck

$$(5. 2) \quad x \cos(n, x) + \eta \cos(n, y)$$

und behaupten, daß für jeden Punkt von  $A B C B' A'$  dieser Ausdruck gleich  $a$  ist. Diese Behauptung ist trivial insofern, als  $M(x, y)$  ein innerer Punkt von  $C$  ist.

Liegt nun  $M$  auf  $AB$ , so ist  $x = -a, \cos(n, x) = -1$  und  $\cos(n, y) = 0$ , also (5. 2) ist erfüllt. Dasselbe gilt aber, wenn  $M$  auf  $B'A'$  liegt, da ja für diese Strecke dieser Ausdruck gleich  $OA' = a$  ist. Auf beiden Radien  $OA, OA'$  ist

der Ausdruck Null. Integriert man nun (5. 2) längs des Zuges  $O A B C B' A' O$ , so erhält man mit Rücksicht auf die Definition von  $S$

$$(5. 3) \quad \int x \cos(n, x) ds + \int \eta \cos(n, y) ds = aS.$$

Das erste Integral links ist jetzt, da  $\cos(n, x) = \frac{dy}{ds}$  ist, gleich dem Inhalt  $J$  von  $O A B C B' A' O$ , und das zweite Integral wegen  $\cos(n, y) = -\frac{dx}{ds}$  gleich dem Inhalt  $\bar{J}$  von  $\bar{\mathfrak{R}}$ . Es sind also

$$(5. 4) \quad J + \bar{J} = aS.$$

Wir konstruieren jetzt von Segment  $K_0$  ausgehend folgende „Extremalkurve“  $C^*$ . Wir ziehen zuerst die zwei Tangenten an  $K_0$ , welche mit  $\alpha$  bzw.  $\alpha'$  die Winkel  $\omega$  bzw.  $\omega'$  bilden, und setzen dann auf dem freien Bogen von  $K_0$  die Kappen mit Winkeln  $\psi_i$  auf. Die so konstruierte Kurve  $C^*$  begrenzt mit  $OA, OA'$  einen Bereich  $\mathfrak{R}^*$ , der einer von den vielen möglichen Kappenbereichen von  $C$  ist. Nun gilt für den so konstruierten Bereich  $\mathfrak{R}^*$ ,  $\bar{\mathfrak{R}}^* = \mathfrak{R}^*$  und wir erhalten, wenn  $J^*$  den Inhalt von  $\mathfrak{R}^*$  und  $S^*$  die Länge von  $C^*$  bedeutet,

$$(5. 5) \quad J + J^* = aS^{*10}.$$

Durch Kombination mit (5. 4) folgt dann

$$(5. 6) \quad J - J^* = a(S - S^*) - (J - J^*).$$

Man kann ebenso wie vorhin zeigen, daß  $\bar{J} \geq J^*$  ist, also daß die Ungleichung

$$(5. 7) \quad J - J^* \leq a(S - S^*)$$

gilt.

Daß hier das Gleichheitszeichen nur dann eintritt, wenn  $C$  mit  $C^*$  übereinstimmt, wird im folgenden im Zusammenhang mit einer allgemeineren Aufgabe gezeigt werden.

6. *Der Fall eines Dreiecks.* Wir betrachten nun eine in einem Dreieck  $T$  eingeschriebene konvexe Kurve  $C$  (Fig. 3), d. h. eine Kurve, welche mit jeder Seite von  $T$  gemeinsame Punkte hat. Es sei  $K$  der in  $T$  eingeschriebene Kreis und  $a$  sein Radius. Es seien  $\psi_i$  die Eckenwinkel von  $C$ , welche nicht auf den Seiten  $a_1, a_2, a_3$  von  $T$  liegen, und  $\omega_i, \omega'_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) die Winkel von  $C$  mit den drei Seiten, wie dies in der Figur gezeichnet ist. Wenden wir unsere Konstruktion auf die Geraden  $a_1, a_2, a_2, a_3$  und  $a_3, a_1$  an, und addieren wir die entsprechenden Größen (mit den Indizes 3 für  $a_1 a_2$ , 1 für  $a_2 a_3$  und 2 für  $a_3 a_1$ ), so wird wegen

$$(6. 1) \quad L = \sum_1^3 S_i, \quad F = \sum_1^3 J_i, \quad F^* = \sum_1^3 J_i^*, \quad \bar{F} = \sum_1^3 \bar{F}_i,$$

$$(6. 2) \quad F + \bar{F} = aL^{11}.$$

<sup>10</sup>)  $C^*$  ist der Rand von  $\mathfrak{R}^*$  ohne die Radien  $OA, OA'$ . Diese Gleichung wurde zuerst von BONNESEN bewiesen. BONNESEN, l. c. S. 153.

<sup>11</sup>) BONNESEN, l. c. S. 153.

Für den Kappenbereich  $\mathfrak{R}^*$  von  $C$  mit den Winkeln  $\omega_i, \omega'_i$  und  $\psi_i$  erhält man dann durch ähnliches Verfahren wegen  $F^* = \bar{F}^*$

$$(6.3) \quad F^* + F^* = aL$$

also

$$(6.4) \quad F - F^* = a(L - L^*) - (\bar{F} - F^*).$$

Wegen  $\bar{F} \geq F^*$  gilt nun

$$(6.5) \quad F - F^* \leq a(L - L^*),$$

und das Gleichheitszeichen tritt hier nur dann ein, wenn  $\bar{F} = F^*$  ist. Dies ist aber nur dann der Fall, wenn  $\bar{J}_i = J_i^* (i = 1, 2, 3)$  ist, wodurch alles auf

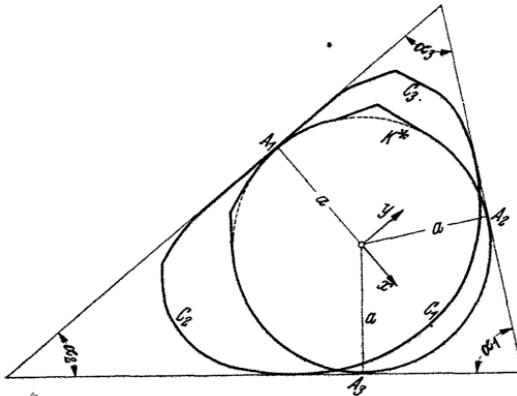


Fig. 3.

das Eintreten des Gleichheitszeichens in (5.7) zurückgeführt ist. Nun kann man durch ähnliche Überlegungen wie in 2. schließen, daß die für das Eintreten des Gleichheitszeichens in (5.7) gestellte Bedingung dann und nur dann erfüllt wird, wenn erstens

$$(6.6) \quad y = \eta + \text{konst}$$

ist, und zweitens, wenn  $B'$  mit der Ecke  $B^{*'}$  des Kappenbereiches zusammenfällt. Sonst würde noch ein Dreieck von nicht verschwindendem positivem Inhalt enthalten, was  $\bar{J} > J^*$  zur Folge haben würde. Dies erfordert also, daß die Konstante in (6.6) verschwinden muß. Die Kurven  $C$  und  $C^*$  fallen also zusammen. Durch Wiederholung dieses Verfahrens für die drei Teile  $C_1, C_2, C_3$  von  $C$  in der Fig. 3 können wir schließen, daß das Gleichheitszeichen in (6.5) nur dann eintritt, wenn die geschlossene Kurve  $C$  mit dem Rand ihres Kappenbereiches  $\mathfrak{R}^*$  übereinstimmt.

Diesen erhält man, wenn man zuerst Tangenten an  $K_0$  zieht, welche mit  $a_i$  die Winkel  $\omega_i, \omega'_i$  bilden und dann die Kappen mit den Winkeln  $\psi_i$  auf den freien Bögen ansetzt.

Damit die Konstruktion möglich ist, muß

$$(6.7) \quad \sum_1^3 (\omega_i + \omega'_i) + \sum_1^3 \alpha_i + \sum_i \varphi_i \leq 3\pi$$

sein, oder wegen  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi$

$$(6.8) \quad \sum_1^3 (\omega_i + \omega'_i) + \sum \varphi_i \leq 2\pi.$$

7. *Anwendungen. Die Verschärfung von Bol.* Als Anwendung der Ungleichungen (6.5) und (3.5) soll zum Schluß der Beweis einer schon in der Einleitung erwähnten interessanten Verschärfung der isoperimetrischen Ungleichung durch Bol gegeben werden. Es sei eine konvexe Kurve  $C$  in der Ebene gegeben mit den Eckenwinkeln  $\varphi$ . Es ist immer möglich,  $C$  in einem Dreieck oder in einem Streifen in dem vorhin erklärten Sinne einzuschreiben derart, daß jede Seite von  $T$  entweder eine Strecke mit  $C$  gemeinsam hat oder daß sie eine Voll- oder Halbtangente ist. Hierbei fallen die  $\omega_i$ ,  $\omega'_i$  mit gewissen  $\varphi_i$  zusammen und man erhält in beiden Fällen

$$(7.1) \quad F^* = \pi a^2 + a^2 \sum_i \left( \operatorname{tg} \frac{\varphi_i}{2} - \frac{\varphi_i}{2} \right),$$

$$(7.2) \quad F - La + \pi a^2 \leq a^2 \sum_i \left( \operatorname{tg} \frac{\varphi_i}{2} - \frac{\varphi_i}{2} \right).$$

Bezeichnen wir mit  $w$  die Summe rechts in (7.1) und setzt man noch  $\pi + w = Q$ , so wird

$$(7.3) \quad F - La + Qa^2 = \left( F - \frac{L^2}{4Q} \right) + \frac{1}{4Q} (L - 2aQ)^2 \leq 0.$$

Daraus folgt die Verschärfung von Bol

$$4(\pi + w)F \leq L^2,$$

oder

$$(7.4) \quad 4\pi F - L^2 \leq -4F \sum_i \left( \operatorname{tg} \frac{\varphi_i}{2} - \frac{\varphi_i}{2} \right)$$

unmittelbar.

Soll in (7.4) das Gleichheitszeichen gelten, so muß

$$(7.5) \quad L - 2aQ = 0$$

sein, und dies hat wieder das Eintreten des Gleichheitszeichens in (7.2) zur Folge. Durch Kombination dieser Gleichung mit den Extremalfällen von (3.5) und (6.5), folgt nun leicht, daß  $C$  Kappenbereich eines Kreises vom Radius  $a$  sein muß