Über das Riemannsche Summierungsverfahren.

Von

Nikola Obreschkoff in Sofia.

In der Theorie der Eindeutigkeit der Darstellung durch trigonometrische Reihen spielt der folgende klassische Satz von Riemann die Hauptrolle:

Ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

konvergent, so ist auch die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2 \tag{2}$$

für jedes h konvergent und ihre Summe strebt gegen jene der Reihe (1), falls $h \to 0$. Es kann aber vorkommen, daß die Reihe (2) bei $h \to 0$ konvergent ist und eine bestimmte Grenze besitzt, ohne daß die Reihe (1) selbst konvergiert. Man erhält dadurch eine Summierung divergenter Reihen, die verallgemeinert folgendermaßen lautet: Die Reihe (1) ist nach dem Riemannschen Verfahren von der Ordnung $\varkappa$ summierbar ($\varkappa \geqq 0$, ganz), oder kurz $(R, \varkappa)$-summierbar, mit der Summe s, wenn die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^{\varkappa} \tag{3}$$

für jedes h konvergiert und ihre Summe mit $h \to 0$ gegen s strebt. L. Fejér[1]) zeigte, daß jede $(C, 1)$-summierbare Reihe auch mit derselben Summe $(R, 4)$-summierbar ist. Ein allgemeineres Ergebnis bewies E. Kogbetliantz[2]), nämlich das folgende: Jede (C, α)-summierbare Reihe, $0 < \alpha < p - 1$, ist (R, p)-summierbar mit derselben Summe.

In der vorliegenden Arbeit werden genauere Ergebnisse über die Abhängigkeit zwischen den Summierungen von Cesaro und Riemann angegeben. Außerdem werden wir eine Summierung betrachten, die in Ver-

---

[1]) L. Fejér, Untersuchungen über Fouriersche Reihen. Math. Annalen **58** (1904), S. 501–569.

[2]) E. Kogbetliantz, Recherches sur l'unicité des série ultrasphériques. Journ. de Mathématiques pures et appliquées **5** (1924), S. 125–196.

bindung mit dem zweiten Satz von Riemann steht, der sich folgendermaßen ausdrücken läßt: Ist $a_n \to 0$, so strebt die Summe der Reihe

$$h \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{\sin n h}{n h}\right)^2$$

gegen Null, falls $h \to 0$.

1. Einige Hilfssätze.

Wir werden im voraus einige Hilfssätze aufstellen, die für unsere Entwicklungen notwendig sind. Wir bezeichnen dabei mit $s_n^{(\alpha)}$ die Cesàroschen Mittelwerte der Ordnung α.

1. *Hat man für ein* $\alpha > 0$:

$$|s_0^{(\alpha)}| + |s_1^{(\alpha)}| + \cdots + |s_n^{(\alpha)}| = O(n),$$

so ist für jedes $\beta > \alpha$ *auch*

$$|s_0^{(\beta)}| + |s_1^{(\beta)}| + \cdots + |s_n^{(\beta)}| = O(n).$$

Wir können uns auf den Fall $\beta - \alpha = \delta < 1$ beschränken. Wegen

(1) $$s_n^{(\beta)} = \frac{1}{A_n^{\beta}} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\delta-1} A_\nu^{\alpha} s_\nu^{(\alpha)}, \quad A_n^{\alpha} = \binom{n+\alpha}{n}$$

ist dann

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{m} |s_n^{(\beta)}| &\leqq \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{A_n^{\beta}} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\delta-1} A_\nu^{\alpha} |s_\nu^{(\alpha)}| \\ &= \sum_{\nu=0}^{m} A_\nu^{(\alpha)} |s_\nu^{(\alpha)}| \sum_{n=\nu}^{m} \frac{A_{n-\nu}^{\delta-1}}{A_n^{\beta}} \\ &< \sum_{\nu=0}^{m} A_\nu^{\alpha} |s_\nu^{(\alpha)}| \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{A_{n-\nu}^{\delta-1}}{A_n^{\beta}} \\ &< K \sum_{\nu=0}^{m} (\nu+1)^{\alpha} |s_\nu^{(\alpha)}| \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{(n+1-\nu)^{\delta-1}}{n^{\beta}} \\ &< K_1 \sum_{\nu=0}^{m} (\nu+1)^{\alpha} |s_\nu^{(\alpha)}| \int_{\nu}^{\infty} \frac{(x-\nu)^{\delta-1}}{x^{\beta}}\, dx < K_2 \sum_{\nu=0}^{m} |s_\nu^{(\alpha)}|. \end{aligned}$$

2. *Ist* $\alpha < p - 1$, $q_n \geqq 0$, *so folgt aus*

(2) $$q_0 + q_1 + \cdots + q_n = O(n)$$

die Beziehung

(3) $$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{q_n}{n^{p-\alpha}} = O(m^{\alpha+1-p}), \quad m \to \infty,$$

und umgekehrt.

Setzen wir

$$\sigma_n = q_0 + q_1 + \cdots + q_n,$$

so haben wir:

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{q_n}{n^{p-\alpha}} = -\frac{\sigma_m}{(m+1)^{p-\alpha}} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \sigma_n \left[\frac{1}{n^{p-\alpha}} - \frac{1}{(n+1)^{p-\alpha}}\right]$$

$$= O\left(\frac{m}{m^{p-\alpha}}\right) + \sum_{n=m+1}^{\infty} O(n)\, O\left(\frac{1}{n^{p-\alpha+1}}\right) = O\left(\frac{1}{m^{p-\alpha+1}}\right).$$

Ist umgekehrt (3) richtig, so erhalten wir, wenn wir

$$T_m = \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{q_n}{n^{p-\alpha}}$$

setzen, für die Summe

$$t_m = q_0 + q_1 + \cdots + q_m$$

den Ausdruck

$$t_m = \sum_{n=1}^{m} n^{p-\alpha}(T_{n-1} - T_n) = T_0 - m^{p-\alpha}\, T_{m+1} + \sum_{n=1}^{m} T_n\left[n^{p-\alpha} - (n-1)^{p-\alpha}\right]$$
$$= T_0 + O(m) + O(m) = O(m).$$

3. *Es bezeichne $\varphi(x)$ die Funktion*

$$\varphi(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^p,$$

worin p eine positive ganze Zahl bedeutet. Dann gilt für die m-te Differenz der $\varphi(nx)$ und für reelles x:

$$(4) \qquad |\Delta^m \varphi(nx)| \leqq M \frac{|x|^{m-p}}{n^p},$$

worin M von x und n unabhängig ist.

In der Tat haben wir:

$$(5) \qquad |\Delta^m \varphi(nx)| \leqq |x|^m \max_{n \leqq t \leqq n+m} |\varphi^{(m)}(tx)|.$$

Man sieht leicht, daß

$$(6) \qquad |\varphi^{(m)}(x)| \leqq M_1 |x|^{-p}$$

ist für jedes reelle x. Setzen wir nämlich

$$u = \sin^p x, \quad v = x^{-p},$$

so wird:

$$\varphi^{(m)}(x) = \sum_{\mu=0}^{m} \binom{m}{\mu} u^{(m-\mu)} v^{(\mu)},$$

und da wir bei $|x| \geqq a > 0$ auch $u^{(\nu)} = O(1)$ haben, erhalten wir:

$$\varphi^{(m)}(x) = O(|x|^{-p}),$$

für $|x| \geqq a$. Bei $|x| < a$ folgt (6) sofort aus der Entwicklung:

$$\varphi(x) = \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots\right)^p,$$

welche

$$|\varphi^{(m)}(x)| \leqq L < M|x|^{-p}$$

liefert.

4. *Es sei δ eine zwischen* 0 *und* 1 *liegende Zahl und*

$$g_n = \sum_{\nu=n}^{\infty} A_{\nu-n}^{\delta-1} \Delta^p \varphi(\nu h). \tag{7}$$

Dann haben wir für jedes $h \neq 0$

$$|g_n| < M n^{-p} |h|^{-\delta},$$

worin M von h und n unabhängig ist.

Da $A_n^{\delta-1} = O(n^{\delta-1})$, so ersieht man aus dem Hilfssatz 3, daß die Reihe (7) für jedes $h > 0$ konvergiert. Bezeichnen wir mit q die größte in $\frac{1}{h}$ enthaltene ganze Zahl, so haben wir

$$g_n = \sum_{\nu=n}^{n-q} A_{\nu-n}^{\delta-1} \Delta^p \varphi(\nu h) + \sum_{\nu=n+q+1}^{\infty} A_{\nu-n}^{\delta-1} \Delta^p \varphi(\nu h) = g_n' + g_n''.$$

Aus dem Hilfssatz 3 folgt aber

$$|\Delta^p \varphi(nh)| < M \frac{h^p}{n^p h^p} < M n^{-p},$$

so daß wir für g_n':

$$|g_n'| < M \sum_{\nu=n}^{n+q} A_{\nu-n}^{\delta-1} \frac{1}{\nu^p} < M n^{-p} \sum_{\nu=n}^{n-q} A_{\nu-n}^{\delta-1} = M n^{-p} A_q^{\delta}$$
$$< M_1 n^{-p} h^{-\delta},$$

und für g_n'':

$$g_n'' = -\sum_{\nu=n+q+1}^{\infty} A_{\nu-n+1}^{\delta-2} [\Delta^{p-1} \varphi(\overline{n+q+1}\, h) - \Delta^{p-1} \varphi(\overline{\nu+1}\, h)],$$

$$|g_n''| < K n^{-p} h^{-1} \sum_{\nu=n+q+1}^{\infty} \frac{1}{(\nu-n)^{2-\delta}} + K_1 h^{-1} \sum_{\nu=n+q+1}^{\infty} \frac{1}{(\nu+1)^p (\nu-n)^{2-\delta}}$$

$$< K' n^{-p} h^{-1} q^{\delta-1} + K_1' n^{-p} h^{-1} \sum_{\nu=n+q+1}^{\infty} \frac{1}{(\nu-n)^{2-\delta}} = O(n^{-p} h^{-\delta})$$

erhalten. Damit ist unser Hilfssatz bewiesen.

5. *Es sei $\varphi(x)$ eine für $x > 0$ definierte und Ableitungen bis zur p-ten Ordnung zulassende Funktion, welche den Bedingungen*

$$|\varphi(x)| < K, \quad x^p |\varphi^{(p)}(x)| < K, \tag{8}$$

für jedes $x > 0$ genügt, worin K von x unabhängig ist. Dann haben wir für jedes $m < p$ die Beziehung

$$x^m |\varphi^{(m)}(x)| < K', \quad x > 0, \tag{9}$$

in der K' von x unabhängig ist.

In der Tat folgt aus der Taylorschen Formel für

$$\varphi(x+t) = \varphi(x) + t\varphi'(x) + \frac{t^2}{2!}\varphi''(x) + \cdots + \frac{t^{p-1}}{(p-1)!}\varphi^{(p-1)}(x) + \\ + \frac{t^p}{p!}\varphi^{(p)}(x+\theta t), \quad 0 < \theta < 1. \tag{10}$$

Es seien jetzt $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{p-1}$ beliebig gewählte verschiedene positive Zahlen und es werde in (10) noch $t = \lambda_i x$, $i = 1, 2, \ldots, p-1$, gesetzt. Dann erhält man die $(p-1)$ Gleichungen

$$\varphi(x+\lambda_i x) = \varphi(x) + \lambda_i x \varphi'(x) + \frac{\lambda_i^2 x^2}{2!}\varphi''(x) + \cdots + \\ + \frac{\lambda_i^{p-1} x^{p-1}}{(p-1)!}\varphi^{(p-1)}(x) + \frac{\lambda_i^p x^p}{p!}\varphi^{(p)}(x+\theta_i\lambda_i x), \; 0 < \theta_i < 1. \tag{11}$$

Es mögen ferner $C_1, C_2, \ldots, C_{p-1}$ die Zahlen bedeuten, die sich aus den Gleichungen

$$\begin{array}{l} C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 + \cdots + C_{p-1}\lambda_{p-1} = 0, \\ C_1\lambda_1^2 + C_2\lambda_2^2 + \cdots + C_{p-1}\lambda_{p-1}^2 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_1\lambda_1^{p-2} + C_2\lambda_2^{p-2} + \cdots + C_{p-1}\lambda_{p-1}^{p-2} = 0. \\ C_1\lambda_1^{p-1} + C_2\lambda_2^{p-1} + \cdots + C_{p-1}\lambda_{p-1}^{p-1} = 1 \end{array} \tag{12}$$

ergeben. Dieses System besitzt Lösungen, da die Determinante der Koeffizienten vor den Unbekannten die von Vandermondesche ist und folglich von Null verschieden ausfällt. Multiplizieren wir dann die Gleichungen (1) der Reihe nach mit $C_1, C_2, \ldots, C_{p-1}$ und addieren die so entstandenen Produkte, so erhalten wir:

$$\sum_{i=1}^{p-1} C_i\varphi(x+\lambda_i x) = \varphi(x)\sum_{i=1}^{p-1} C_i + \frac{x^{p-1}}{(p-1)!}\varphi^{(p-1)}(x) + \\ + \frac{x^p}{p!}\sum_{i=1}^{p-1} C_i\lambda_i^p\varphi^{(p)}(x+\theta_i\lambda_i x). \tag{13}$$

Da wir für jedes $x > 0$

$$|\varphi(x+\lambda_i x)| < M, \quad |\varphi^{(p)}(x+\theta_i \lambda_i x)| < \frac{M}{(1+\theta_i \lambda_i)^p x^p} < \frac{M}{x^p}$$

haben, so erhalten wir aus (13) sofort:

(14) $$x^{p-1}\,|\varphi^{(p-1)}(x)| < M'.$$

Aus demselben Grunde werden wir aus (14)

$$x^{p-2}\,|\varphi^{(p-2)}(x)| < M''$$

erhalten usw.

6. *Es sei* $p > 1$ *eine ganze Zahl. Dann ist*

$$\lim_{h\to 0} h \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin n h}{n h}\right)^p = \int_0^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^p dx = j_p.$$

Es sei $a > 0$ eine beliebige Zahl und es bedeute m die größte in $\frac{a}{h}$ enthaltene ganze Zahl. Gemäß der Definition eines bestimmten Integrals haben wir dann zunächst

$$\lim_{h\to 0} h \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{\sin n h}{n h}\right)^p = \int_0^{a} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^p dx.$$

Und für die Summe

$$i_h = h \sum_{n=m+1}^{\infty} \left(\frac{\sin n h}{n h}\right)^p$$

erhalten wir

$$|i_h| < h \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n^p h^p} < \frac{1}{h^{p-1}} \int_m^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{(p-1)\,h^{p-1}\,m^{p-1}} < \frac{1}{(p-1)\,(a-1)^{p-1}}.$$

Wir können aber a so groß wählen, daß i_p beliebig klein wird.

2. Vergleich zwischen den Summierungen von Cesàro und Riemann.

Satz 1. *Es sei die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *für ein* $\alpha < p-1$ $(C, \alpha+1)$*-summierbar und es gelte für sie*

(1) $$|s_1^{(\alpha)}| + |s_2^{(\alpha)}| + \cdots + |s_n^{(\alpha)}| = O(n),$$

worin $s_n^{(\alpha)}$ *die* Cesàroschen *Mittelwerte von der Ordnung* α *sind. Dann ist diese Reihe auch* (R, p)*-summierbar mit derselben Summe.*

Wir setzen wieder

$$\varphi(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^p$$

und werden zuerst beweisen, daß für jedes $h > 0$ die Reihe

(2) $$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \varphi(nh), \quad u_0 = 0$$

konvergiert, der wir dabei zugleich noch eine andere Form verleihen werden. Wir bezeichnen nun mit $S_n^{(\alpha)} = A_n^{\alpha} s_n^{(\alpha)}$ die Cesàroschen Summen für die Reihe $\sum u_n$. Für die Teilsummen

$$l_m = \sum_{n=0}^{m} u_n \varphi(nh)$$

erhalten wir der Reihe nach

(3) $$\begin{aligned} l_m &= \sum_{n=0}^{m-1} S_n^{(0)} \Delta\varphi(nh) + S_m^{(0)} \varphi(mh) \\ &= \sum_{n=0}^{m-2} S_n^{(1)} \Delta^2 \varphi(nh) + S_{m-1}^{(1)} \Delta\varphi(\overline{m-1}\,h) + S_m^{(0)}\varphi(mh) \\ &= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &= \sum_{n=0}^{m-p} S_n^{(p-1)} \Delta^p \varphi(nh) + S_{m-p+1}^{(p-1)} \Delta^{p-1} \varphi(\overline{m-p+1}\,h) + \cdots + \\ &\quad + S_{m-1}^{(1)} \Delta\varphi(\overline{m-1}\,h) + S_m^{(0)} \varphi(mh). \end{aligned}$$

Bei festem $q < p$ und $h > 0$ haben wir

$$S_m^{(q)} \Delta^q \varphi(mq) = o(m^p)\, O(m^{-p}) = o(1), \quad m \to \infty;$$

es folgt also, daß

$$l_m = \sum_{n=0}^{m-p} S_n^{(p-1)} \Delta^p \varphi(nh) + o(1) = i_{m-p} + o(1).$$

Auf Grund des Hilfssatzes 1 können wir annehmen, daß $p - 1 = \alpha + \delta$ ist, $(0 < \delta < 1)$. Wir haben weiter:

$$i_m = \sum_{n=0}^{m} \Delta^p \varphi(nh) \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\delta-1} S_\nu^{(\alpha)} = \sum_{\nu=0}^{m} S_\nu^{(\alpha)} \sum_{n=\nu}^{m} A_{n-\nu}^{\delta-1} \Delta^p \varphi(nh).$$

Also konvergieren die Zahlen

$$g_{m\nu} = \sum_{n=\nu}^{m} A_{n-\nu}^{\delta-1} \Delta^p \varphi(nh)$$

bei $m \to \infty$ und $h > 0$ gegen

$$g_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} A_{n-\nu}^{\delta-1} \Delta^p \varphi(nh),$$

welche Reihe infolge der Beziehung

$$A_{n-\nu}^{\delta-1} \Delta^p \varphi(nh) = O\left(\frac{1}{n^{p+1-\delta}}\right)$$

absolut konvergent ist. Wir werden beweisen, daß i_m gegen

$$i = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu S_\nu^{(\alpha)}$$

strebt. Indem wir die Bezeichnungen

$$t_n = A_{n-\nu}^{\delta-1}, \quad T_n = \sum_{\lambda=\nu}^{n} \Delta^p \varphi(\lambda h) = \Delta^{p-1}\varphi(\nu h) - \Delta^{p-1}\varphi(\overline{n+1})h)$$

einführen, erhalten wir für $g_{m\nu}$ die Ausdrücke:

$$g_{m\nu} = \sum_{n=\nu}^{m} t_n (T_n - T_{n-1}) = \sum_{n=\nu}^{m-1} T_n \Delta t_n + T_m t_m$$

$$= - \sum_{n=\nu}^{m} A_{n+1-\nu}^{\delta-2} [\Delta^{p-1}\varphi(\nu h) - \Delta^{p-1}\varphi(\overline{n+1}\, h)] +$$

$$+ A_{m-\nu}^{\delta-1} [\Delta^{p-1}\varphi(\nu h) - \Delta^{p-1}\varphi(\overline{m+1}\, h)].$$

Strebt dann $m \to \infty$, so ergibt sich:

$$g_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} A_{n+1-\nu}^{\delta-2} \Delta^{p-1}\varphi(\overline{n+1}\, h) + \Delta^{p-1}\varphi(\nu h).$$

Gemäß Hilfssatz 3 haben wir für festes $h > 0$

$$|g_\nu| < K \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{1}{n^p (n+1-\nu)^{2-\delta}} < \frac{K}{\nu^p} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^{2-\delta}} < \frac{K_1}{\nu^p},$$

da $2 - \delta > 1$ ist. Auf Grund des Hilfssatzes 4 konvergiert die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|s_\nu^{(\alpha)}|}{\nu^{p-\alpha}}.$$

Folglich wird die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} g_\nu S_\nu^{(\alpha)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} O\left(\frac{|s_\nu^{(\alpha)}|}{\nu^{p-\alpha}}\right)$$

absolut konvergent. Wir haben ferner:

$$g_\nu - g_{m\nu} = A_{m+1-\nu}^{\delta-1} \Delta^{p-1}\varphi(\nu h) - A_{m-\nu}^{\delta-1} \Delta^{p-1}\varphi(\nu h) + A_{m-\nu}^{\delta-1} \Delta^{p-1}\varphi(\overline{m+1}\, h)$$

$$+ \sum_{n=m}^{\infty} A_{n+1-\nu}^{\delta-2} \Delta^{p-1}\varphi(\overline{n+1}\, h) = O\left(\nu^{-p}(m+1-\nu)^{\delta-1}\right) +$$

$$+ O\left(m^{-p}(m+1-\nu)^{\delta-1}\right) + \sum_{n=m}^{\infty} O\left(n^{-p}(n+1-\nu)^{\delta-2}\right)$$

$$= O\left(\nu^{-p}(m+1-\nu)^{\delta-1}\right).$$

Für die Differenz:

$$\Delta_m = \sum_{\nu=0}^{m} S_\nu^{(\alpha)} (g_\nu - g_{m\nu})$$

erhalten wir

$$\cdot\ |A_m| < K \sum_{\nu=0}^{m} \nu^{\alpha} |s_\nu^{(\alpha)}| |g_\nu - g_{m\nu}| < K_1 \sum_{\nu=1}^{m} \frac{|s_\nu^{(\alpha)}|}{\nu^{p-\alpha}} \frac{1}{(m+1-\nu)^{1-\delta}},$$

woraus man ersieht, daß

$$\lim_{m\to\infty} A_m = 0.$$

So erhalten wir die Gleichung:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \varphi(nh) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n^{(\alpha)} g_n.$$

Es sei nun N eine beliebige positive Zahl und m die größte in $\frac{N}{h}$ enthaltene ganze Zahl. Wir haben dann zunächst

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n^{(\alpha)} g_n = \sum_{n=1}^{m} + \sum_{n=m+1}^{\infty} = \beta_1 + \beta_2,$$

und nach Hilfssatz 2 weiter:

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} n^{-p} |S_n^{(\alpha)}| = O(m^{\alpha+1-p}), \quad m \to \infty.$$

Gemäß Hilfssatz 4 erhalten wir nun

$$|\beta_2| < M' h^{-\delta} \sum_{n=m+1}^{\infty} n^{-p} |S_n^{(\alpha)}| < M'' m^{\delta} N^{-\delta} \sum_{n=m+1}^{\infty} n^{-p} |S_n^{(\alpha)}| < M''' N^{-\delta}.$$

Wir können N so groß wählen, daß $|\beta_2|$ beliebig klein wird. Durch die Betrachtung der Reihe

$$(u_1 - s) + u_2 + u_3 + \cdots$$

an Stelle der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ können wir uns auf den Fall $s = 0$ beschränken. Es sei nun λ die größte in $\frac{1}{h}$ enthaltene ganze Zahl. Wir haben dann:

$$\beta_1 = \sum_{n=0}^{m} S_n^{\alpha} g_n' + \sum_{n=0}^{m} S_n^{\alpha} g_n'' = \beta_1' + \beta_1'',$$

$$g_n' = \sum_{\nu=n}^{n+\lambda} A_{\nu-n}^{\delta-1} \Delta^p \varphi(\nu h), \quad g_n'' = \sum_{\nu=n+\lambda+1}^{\infty} A_{\nu-n}^{\delta-1} \Delta^p \varphi(\nu h).$$

Da wir für g_n' auch

$$|g_n'| < K n^{-p} \sum_{\tau=0}^{\lambda} A_\tau^{\delta-1} < K_1 n^{-p} A_\lambda^{\delta} < K_2 n^{-p} h^{-\delta}$$

haben, so werden wir für

$$|\beta_1'| < K_3 h^{-\delta} \sum_{\nu=0}^{m} |s_\nu^{(\alpha)}| \frac{1}{(\nu+1)^{p-\alpha}} = K_3 h^{-\delta} \sum_{\nu=0}^{m} U_\nu \left[\frac{1}{(\nu+1)^{p-\alpha}} - \frac{1}{(\nu+2)^{p-\alpha}}\right] + K_3 h^{-\delta} \frac{U_m}{(m+1)^{p-\alpha}}$$

erhalten, worin U_n die Summe

$$U_n = |s_0^{(\alpha)}| + |s_1^{(\alpha)}| + \cdots + |s_n^{(\alpha)}|$$

bedeutet. Infolge $U_n < Mn$, $h = \frac{N}{m}$ ist überdies

$$|\beta_1'| < K_4 h^{-\delta} \sum_{\nu=0}^{m} \nu \left[\frac{1}{(\nu+1)^{p-\alpha}} - \frac{1}{(\nu+2)^{p-\alpha}}\right] + K_5 \frac{m h^{-\delta}}{(m+1)^{p-\alpha}}$$

$$< K_4 h^{-\delta} \sum_{\nu=1}^{m+1} \frac{1}{\nu^{p-\alpha}} + K_5 \frac{m+1}{h^{\delta}(m+1)^{p-\alpha}} < K_6 h^{-\delta}(m+1)^{\alpha+1-p}$$

$$< K_7 N^{-\delta}.$$

Ist $\varepsilon > 0$ eine beliebige kleine Zahl, so läßt sich N so groß wählen, daß $|\beta_1'| < \varepsilon$ ist. Für β_1'' erhalten wir:

$$\beta_1'' = \sum_{n=0}^{m-1} S_n^{(\alpha+1)} \Delta g_n'' + S_m^{(\alpha+1)} g_m'',$$

$$\Delta g_n'' = \sum_{\tau=\lambda+1}^{\infty} A_\tau^{\delta-2} \Delta^p \varphi(\overline{n+\tau}\, h) + A_{\lambda+1}^{\delta-1} \Delta^p \varphi(\overline{n+\lambda+1}\, h).$$

$$|\Delta g_n''| < K' n^{-p} \sum_{\tau=\lambda+1}^{\infty} \frac{1}{\tau^{2-\delta}} < K'' n^{-p} \lambda^{\delta-1} < K''' n^{-p} h^{1-\delta},$$

$$|g_n''| < K^{\mathrm{IV}} h^{-\delta} n^{-p},$$

$$\sum_{n=0}^{m-1} S_n^{(\alpha+1)} \Delta g_n'' = \sum_{n=1}^{m-1} h^{1-\delta} o(n^{\alpha+1-p}) = h^{1-\delta} o(m^{\delta-1}) = o(1),$$

$$S_m^{(\alpha+1)} g_m'' = o(m^{\alpha+1}) O\left(\frac{1}{m^p h^\delta}\right) = o(1).$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Satz 2. *Es sei $\varphi(x)$ eine für $x > 0$ definierte und bis zur p-ten Ordnung differenzierbare Funktion, welche den folgenden Bedingungen:*

(4) $$\varphi(+0) = 1, \quad \varphi(x) = O(x^{-p}), \quad x \to \infty,$$

(5) $$\varphi^{(p)}(x) = O(x^{-p}), \quad x > 0$$

genügt. Ist dann die Reihe

(6) $$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$$

$|C, p|$-summierbar mit der Summe s, so wird die Reihe

(7) $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi(nx)$$

für jedes $x > 0$ konvergieren und ihre Summe gegen s streben, falls $x \to 0$

Bezeichnen wir mit $S_n^{(\varkappa)}$ die Cesàroschen Summen der Ordnung $\varkappa$ der Reihe (6), so erhalten wir:

$$(8)\qquad j_m = \sum_{n=0}^{m} a_n\,\varphi(n x) = \sum_{n=0}^{m-p-1} S_n^{(p)}\,\Delta^{p+1}\,\varphi(n x) + \sum_{\nu=0}^{p} S_{m-\nu}^{(\nu)}\,\Delta^{\nu}\,\varphi(\overline{m-\nu}\,x)$$
$$= \sum_{n=0}^{m-p-1} s_n^{(p)}\,A_n^p\,\Delta^{p+1}\,\varphi(n x) + \sum_{\nu=0}^{p} s_{m-\nu}^{(\nu)}\,A_{m-\nu}^{\nu}\,\Delta^{\nu}\,\varphi(\overline{m-\nu}\,x).$$

Betrachten wir speziell die Reihe

$$1 + 0 + 0 + 0 + \cdots,$$

für welche $s_n^{(p)} = 1$ ist, so werden wir aus (8)

$$(9)\qquad 1 = \sum_{n=0}^{m-p-1} A_n^p\,\Delta^{p+1}\,\varphi(n x) + \sum_{\nu=0}^{p} A_{m-\nu}^{\nu}\,\Delta^{\nu}\,\varphi(\overline{m-\nu}\,x)$$

erhalten. Setzen wir nun:

$$S_n^{(\varkappa)} = s A_n^{\varkappa} + T_n^{(\varkappa)}, \qquad \varkappa = 0, 1, 2, \ldots, p,$$

so ergibt sich aus (8) auf Grund von (9):

$$(10)\qquad j_m - s = \sum_{n=0}^{m-p-1} T_n^{(p)}\,\Delta^{p+1}\,\varphi(n x) + \sum_{\nu=0}^{p} T_{m-\nu}^{(\nu)}\,\Delta^{\nu}\,\varphi(\overline{m-\nu}\,x).$$

Bei $\varkappa < p$ haben wir auch $S_n^{(\varkappa)} = o(n^p)$, $T_n^{(\varkappa)} = o(n^p)$ und folglich bei $x > 0$, (x fest), und für $m \to \infty$ auf Grund von (5)

$$T_{m-\nu}^{(\nu)}\,\Delta^{\nu}\,\varphi(\overline{m-\nu}\,x) = o(1).$$

Aus (10) folgt also:

$$j_m = s + \sum_{n=0}^{m-p-1} A_n^p\,t_n^{(p)}\,\Delta^{p+1}\,\varphi(n x) + o(1), \qquad T_n^{(\varkappa)} = A_n^{\varkappa}\,t_n^{(\varkappa)}.$$

Bezeichnen wir mit $g_n(x)$ den Ausdruck

$$g_n(x) = \sum_{\mu=0}^{n} A_\mu^p\,\Delta^{p+1}\,\varphi(\mu x),$$

so haben wir nach Formel (9)

$$(11)\qquad g_{n+1-p}(x) = 1 - \sum_{\nu=0}^{p} A_{n+2-\nu}^{\nu}\,\Delta^{\nu}\,\varphi(\overline{n+2-\nu}\,x).$$

Auf Grund von (5) und für festes n erhalten wir:

$$\lim_{x \to 0} g_{n+1-p}(x) = 1 - \lim_{x \to 0} \sum_{\nu=0}^{p} A_{n+2-\nu}^{\nu}\,\Delta^{\nu}\,\varphi(\overline{n+2-\nu}\,x) = 0.$$

Infolge der Bedingung (5) schließen wir aus dem Hilfssatz 5, daß für jedes $s \leqq p$ die Beziehung

$$(12)\qquad \varphi^{(s)}(x) = O(x^{-s}), \quad x > 0$$

gültig ist. Auf Grund der Ungleichung:

$$|\Delta^s f(n)| \leqq \max_{n \leqq x \leqq n+s} |f^{(s)}(x)|$$

und aus (12) erhalten wir ferner für jedes x

$$|\Delta^s \varphi(n x)| \leqq M n^{-s},$$

worin M von n und x unabhängig ist. Dann folgt aus (11), daß wir für jedes n und x

$$|g_n(x)| < M'$$

haben, worin M' eine von n und x unabhängige Konstante ist.

Wir haben weiter:

$$
\begin{aligned}
(13)\qquad j_m &= s + \sum_{n=0}^{m-p-1} t_n^{(p)} [g_n(x) - g_{n-1}(x)] + o(1) \\
&= s + \sum_{n=0}^{m-p-2} g_n(x)\, \Delta t_n^{(p)} + g_{m-p-1}(x)\, t_{m-p-1}^{(p)}.
\end{aligned}
$$

Der Bedingung nach ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta t_n^{(p)}|$ konvergent. Setzen wir in (13) $m \to \infty$ ein, so erhalten wir:

$$(14)\qquad \sum_{p=0}^{\infty} a_n \varphi(n x) = s + \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)\, \Delta t_n^{(p)}.$$

Es sei $\varepsilon > 0$ eine beliebige kleine Zahl und λ sei derart gewählt, daß:

$$\sum_{n=\lambda+1}^{\infty} |\Delta t_n^{(p)}| < \frac{\varepsilon}{K}.$$

Wir haben dann:

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)\, t_n^{(p)} = \sum_{n=0}^{\lambda} + \sum_{n=\lambda+1}^{\infty} = j' + j'',$$

$$\lim_{x \to 0} j' = 0, \quad |j''| < K \sum_{n=\lambda+1}^{\infty} |\Delta t_n^{(p)}| < \varepsilon.$$

Folglich auch:

$$\lim_{x \to 0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi(n x) = s,$$

womit der Satz bewiesen ist.

Satz 3. *Wenn eine Reihe $|C, p|$-summierbar ist, so ist sie auch (R, p)-summierbar mit derselben Summe.*

Dieser Satz folgt unmittelbar aus dem vorigen, wenn in diesem

$$\varphi(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^p$$

gesetzt wird, da man auch leicht ersehen kann, daß diese Funktion $\varphi(x)$ den Bedingungen des Satzes 2 Genüge leistet.

Wir setzen jetzt

$$j_p = \int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^p dx$$

und nennen die Folge a_n (R_1, p)-limitierbar mit der Grenze s, wenn die Reihe

$$h \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^p$$

konvergiert und ihre Summe gegen $s\,j_p$ strebt, falls $h \to 0$. Aus Hilfssatz 6 ersieht man sofort, daß jede konvergente Folge bei $p \geqq 2$ auch (R_1, p)-limitierbar ist mit derselben Grenze. Wir werden jetzt den Satz beweisen.

Satz 4. *Ist die Folge u_n $(C, \alpha + 1)$-limitierbar mit der Grenze s, wobei $\alpha < p - 1$ und*

$$|u_1^{(\alpha)}| + |u_2^{(\alpha)}| + \cdots + |u_n^{(\alpha)}| < Kn$$

(hierin bedeuten $u_n^{(\alpha)}$ die Cesàroschen Mittelwerte der Ordnung α für die Folge u_n), so ist dieselbe Folge auch (R_1, p)-limitierbar mit der Grenze $s\,j_p$.

Der Beweisgang verläuft vollkommen analog wie beim Satz 2. Setzen wir $U_n^{(\alpha)} = \sum_{\nu=1}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha-1} u_\nu$, so werden wir bei $u_n = a_n$ augenscheinlich $U_n^{(\alpha)} = S_n^{(\alpha-1)}$ haben. Für die Summe

$$T_m = \sum_{n=1}^{m} u_n \varphi(nh), \qquad \varphi(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^p$$

erhalten wir bei festem $h > 0$ den Ausdruck

$$T_m = \sum_{n=1}^{m-p-1} U_n^{(p-1)} \Delta^{p-1} \varphi(nh) + o(1) = i_{m-p-1} + o(1).$$

Setzen wir noch $p - 1 = \alpha + \delta$, $0 < \delta < 1$, so erhalten wir:

$$i_m = \sum_{\nu=1}^{m} U_\nu^{(\alpha)} g_{m\nu}, \quad g_{m\nu} = \sum_{n=\nu}^{m} A_{n-\nu}^{\delta-1} \Delta^{p-1} \varphi(nh).$$

Die Reihe

$$g_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} A_{n-\nu}^{\delta-1} \Delta^{p-1} \varphi(nh)$$

ist also absolut konvergent, und zwar für jedes h, da $A_{n-\nu}^{\delta-1} \Delta^{p-1} \varphi(nh) = O(n^{\delta-p-1})$. Folglich konvergieren $g_{m\nu}$ gegen g_ν, falls $m \to \infty$. Da $\Delta^{p-1}\varphi(nh) = O(n^{-p})$, so ersieht man in ähnlicher Weise, daß i_m gegen $i = \sum_{n=p}^{\infty} U_n^{(\alpha)} g_n$ strebt. Dabei ist die letzte Reihe infolge

$$|g_n| < Kn^{-p}$$

konvergent. So erhalten wir die Gleichung:

$$h \sum_{n=1}^{\infty} u_n \varphi(nh) = h \sum_{n=1}^{\infty} U_n^{(\alpha)} g_n$$

und es ist

$$|\Delta^{p-1} \varphi(nh)| < M h^{-1} n^{-p}$$

für jedes $h > 0$ und n. Der weitere Beweis verläuft genau wie der des vorangehenden Satzes.

Herrn M. Riess [3]) verdankt man die folgende Verallgemeinerung des Cantorschen Satzes: Ist die Reihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n x + b_n \sin n x) \tag{15}$$

für jedes x $(C, 1)$-summierbar mit der Summe 0 und die Reihe

$$\frac{a_0 x^2}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos n x + b_n \sin n x}{n^2} \tag{16}$$

gleichmäßig konvergent, so verschwinden die Koeffizienten a_n und b_n. Auf Grund unserer Sätze können wir andere neue Ergebnisse in dieser Richtung erhalten. Ist z. B. die Reihe (15) überall $|C, 2|$-summierbar mit der Summe 0 und stellt die Reihe (16) eine stetige Funktion dar, so verschwinden die sämtlichen Koeffizienten a_n und b_n. Ferner sei bemerkt, daß nach bekannten Sätzen [4]) die Reihe (16) für jedes x absolut konvergent ist. Der Beweis beruht auf dem Satz 3 und wird in einer schon bekannten Weise durchgeführt.

Ähnliche Bemerkungen lassen sich auch hinsichtlich des Satzes von H. Lebesgue und P. du Bois-Reymond machen.

---

[3]) M. Riess, Über summierbare trigonometrische Reihen. Math. Annalen **71** (1911), S. 54–75.

[4]) E. Kogbetliantz, Sur les séries absolument sommables par la méthode des moyennes arithmétiques, Bulletin des Sciences Mathématiques (2), **49** (1925), S. 234 –256.

(Eingegangen am 28. März 1942.)