

## **Werk**

**Titel:** Mathematische Zeitschrift

**Ort:** Berlin

**Jahr:** 1942

**Kollektion:** Mathematica

**Werk Id:** PPN266833020\_0048

**PURL:** [http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN266833020\\_0048](http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN266833020_0048) | LOG\_0034

## **Terms and Conditions**

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## **Contact**

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

# Streifenmodelle und Stangenmodelle zur Differentialgeometrie der Drehflächen, Schraubenflächen und Regelflächen.

Zum achtzigsten Geburtstag von SEB. FINSTERWALDER.

Von

Robert Sauer in Aachen.

Die „anschauliche Methode“ der Differentialgeometrie hat durch den von S. FINSTERWALDER<sup>1)</sup> der Deutschen Mathematikvereinigung im Jahre 1899 erstatteten Bericht über „*Mechanische Beziehungen bei der Flächen-deformation*“ einen starken Anstoß erhalten. In dem Bericht wurden einerseits mechanische Eigenschaften von Kurvennetzen mit differentialgeometrischen Eigenschaften der von den Kurvennetzen überdeckten Flächen in Zusammenhang gebracht und zahlreiche sonstige „netzgeometrische“ Fragen aufgeworfen. Andererseits wurden Modelle entwickelt, deren diskretgeometrische Eigenschaften entsprechende differentialgeometrische Beziehungen der Flächentheorie anschaulich darstellen.

Nach beiden Richtungen hin hat der Bericht von S. FINSTERWALDER weitere Arbeiten seiner Schüler und anderer Geometer unmittelbar oder mittelbar angeregt. In die erste der beiden genannten Kategorien gehören Untersuchungen über geradlinige und geodätische Kurvennetze und über allgemeinere topologische Fragen der Differentialgeometrie. In der zweiten Kategorie sind vor allem Arbeiten zu nennen, welche die Statik der Ausnahmefachwerke mit dem Problem der infinitesimalen Flächenverbiegung verknüpfen, sowie der Aufbau einer Differenzengeometrie, durch welche die Grundgleichungen der Kurven- und Flächentheorie elementargeometrisch verdeutlicht werden.

Einen Beitrag zur zweiten Kategorie soll auch die vorliegende Abhandlung liefern, in der die Differentialgeometrie der Dreh- und Schraubenflächen an *Streifenmodellen* und die Differentialgeometrie der Regelflächen an *Stangenmodellen* entwickelt wird. Man erhält hierbei die grundlegenden Sätze über die Verbiegung der drei genannten Flächenklassen samt Aussagen über die geodätischen Linien der Dreh- und Schraubenflächen sowie eine differenzengeometrische Herleitung der Bewegungsinvarianten und der Ableitungs-

<sup>1)</sup> S. FINSTERWALDER, Jber. d. D. M. V. 6 (1899), S. 45—90.

gleichungen der Liniengeometrie der Regelflächen. Nebenher ergeben sich einfache Modelle der Pseudosphäre sowie der Flächenhäute, die sowohl auf Drehflächen als auch auf Spiralfächen verbogen werden können.

## I. Drehflächen und Schraubenflächen.

1. *Drehkegel und Schraubenböschungsfäche.* Als wesentliches Hilfsmittel werden wir den *Drehkegel* und die *Schraubenböschungsfäche* benützen. Wir schicken daher einige einfache Grundtatsachen aus der Geometrie dieser beiden Flächen voraus:

Fig. 1 zeigt Grund- und Aufriß sowie die ebene Abwicklung der Vorderhälfte eines Drehkegels. Den Parallelkreisen des Kegels mit dem Radius  $r$

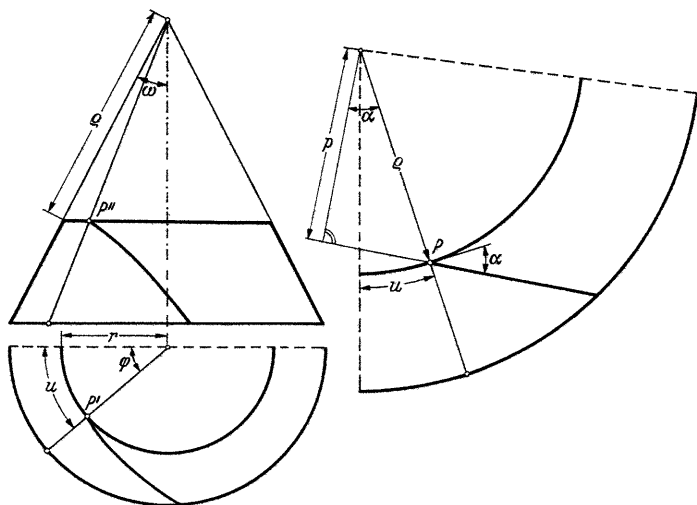


Fig. 1. Drehkegel samt ebener Abwicklung.

entsprechen in der Abwicklung konzentrische Kreise mit dem Radius

$$(1a) \quad \varrho = \frac{r}{\sin \omega} \geq r,$$

wobei  $\omega$  den Winkel der Kegelerzeugenden gegen die Kegelachse bedeutet;  $1/\varrho$  ist die geodätische Krümmung der Parallelkreise.

Fig. 2 zeigt Grund- und Aufriß sowie die ebene Abwicklung eines Ausschnittes einer Schraubenböschungsfäche. Sie wird erzeugt von den Tangenten einer Schraubenlinie, die auf einem Drehzylinder vom Radius  $a$  mit dem Neigungswinkel  $\omega$  gegen die Zylinderachse verläuft und *Kehllinie* heißen soll. Die dem Drehwinkel  $1$  zugeordnete Parallelverschiebung

$$(2) \quad h = a \cotg \omega$$

bei der die Böschungsfäche erzeugenden Schraubenbewegung bezeichnen wir als *Vorschub*. Die zur Kehllinie koaxialen Zylinder schneiden aus der Böschungsfäche Schraubenlinien vom Radius  $r$  aus, welche alle denselben Vorschub  $h$  wie die Kehllinie haben. In der Abwicklung gehen die Schraubenlinien in konzentrische Kreise mit dem Radius  $\varrho$  über, wobei wieder  $1/\varrho$  die

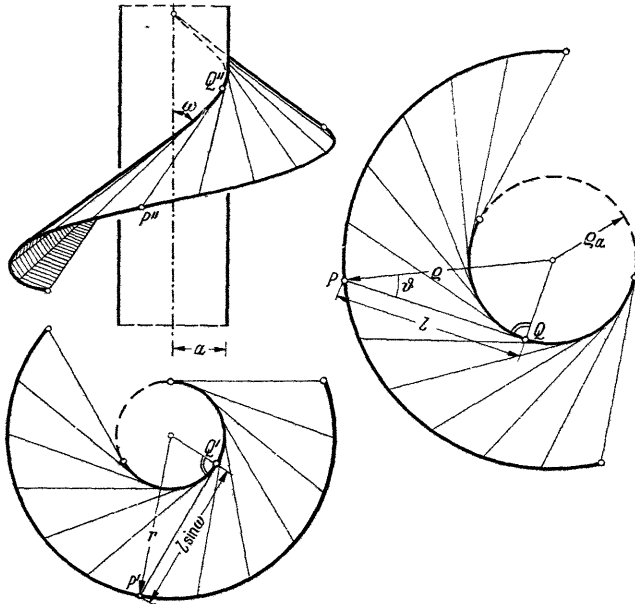


Fig. 2. Schraubenböschungsfäche samt ebener Abwicklung.

geodätische Krümmung der entsprechenden Schraubenlinien darstellt. Insbesondere liefert die Kehllinie in der Abwicklung einen Kreis vom Radius

$$(3) \quad \varrho_a = \frac{a^2 + h^2}{a} = \frac{2h}{\sin 2\omega};$$

die Tangenten dieses Kreises stellen die Abwicklung der Erzeugenden der Schraubenböschungsfäche dar und schneiden die Radien der konzentrischen Kreise unter dem von  $\varrho$  abhängigen Winkel

$$\vartheta = \arcsin \varrho_a / \varrho = \arcsin \frac{2h}{\varrho \sin 2\omega}.$$

Aus den beiden Gleichungen

$$r^2 = a^2 + l^2 \sin^2 \omega, \quad \varrho^2 = \varrho_a^2 + l^2 = \frac{4h^2}{\sin^2 2\omega} + l^2,$$

wobei  $l$  die auf den Erzeugenden gemessene Länge bedeutet, ergibt sich mittels (2) nach kurzer Rechnung

$$(1b) \quad \varrho = \frac{\sqrt{r^2 + h^2}}{\sin \omega} \geq \sqrt{r^2 + h^2}.$$

Die geodätischen Linien des Kegels und der Schraubenböschungsfäche liefern in der ebenen Abwicklung gerade Linien. Daraus folgt nach Fig. 1 in beiden Fällen

$$q \cos \alpha = p,$$

woraus man mit Berücksichtigung von (1a) bzw. (1b) für den Kegel

$$(4a) \quad r \cos \alpha = p \sin \omega$$

und für die Schraubenböschungsfäche

$$(4b) \quad \sqrt{r^2 + h^2} \cos \alpha = p \sin \omega$$

erhält.  $\alpha$  ist der Neigungswinkel der geodätischen Linie gegen die Parallelkreise bzw. die Schraubenlinien.

2. *Streifenmodell der Dreh- und Schraubenflächen.* Wir betrachten nunmehr eine beliebige Dreh- oder Schraubenfläche und greifen auf ihr einzelne Parallelkreise bzw. Schraubenlinien heraus. Indem wir dann die Flächenzonen zwischen aufeinanderfolgenden Parallelkreisen bzw. Schraubenlinien durch abwickelbare Streifen ersetzen, erhalten wir ein *Streifenmodell* der Dreh- bzw. Schraubenfläche. Die Streifen sind bei Drehflächen Ausschnitte von Drehkegeln, bei Schraubenflächen Ausschnitte von Schraubenböschungsfächen; die Kegel und die Böschungsfächen können zu Drehzylindern entarten.

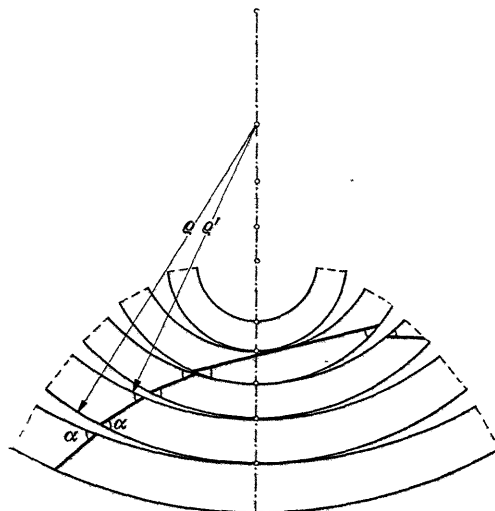


Fig. 3. Streifenmodell einer Dreh- oder Schraubenfläche.

Fig. 3 zeigt die ebene Abwicklung eines Streifenmodells. Sie besteht aus Sektoren von Kreisringen, die bei „negativ gekrümmten“ konkaven Modellen sich überlappen und bei „positiv gekrümmten“ konvexen Modellen klaffen.

Wenn man die Streifenbreite gegen Null gehen läßt, konvergieren die Modelle gegen die gegebene Dreh- bzw. Schraubenfläche. Durch diesen Grenzprozeß kann man Eigenschaften der Streifenmodelle in die Differentialgeometrie der Dreh- und Schraubenflächen übersetzen. Wir werden im

folgenden mit diesem Verfahren die Verbiegung der Dreh- und Schraubenflächen und den Verlauf der geodätischen Linien untersuchen.

3. *Verbiegung von Dreh- und Schraubenflächen.* Nach Fig. 3 besteht die Abwicklung eines Streifenmodells aus Kreisringsektoren. Wir betrachten daher zunächst die Verbiegungsmöglichkeiten eines einzelnen Kreisringsektors mit den Radien  $\varrho, \varrho'$ :

a) Nach (1a) kann der Kreisringsektor so verbogen werden, daß der Kreisrand vom Radius  $\varrho$  zur Deckung kommt mit einem Bogenstück eines beliebig vorgegebenen Kreises vom Radius  $r \leq \varrho$ . Dabei geht der Kreisringsektor über in die Zone eines Kegels, dessen Öffnungswinkel  $2\omega$  durch  $\sin \omega = r/\varrho$  bestimmt ist. Je nach der Wahl von  $r$  wird die Kegelzone genau einfach oder nur teilweise oder mehrfach überdeckt. Bei Änderung von  $r$  ändert sich  $r'$  proportional mit  $r$  und der Azimutwinkel  $\varphi$  (vgl. Fig. 1) wegen  $r\varphi = u = \text{const}$  umgekehrt proportional mit  $r$ .

b) Nach (1b) kann der Kreisringsektor so verbogen werden, daß der Kreisrand vom Radius  $\varrho$  zur Deckung kommt mit einem Bogenstück einer beliebig vorgegebenen Schraubenlinie vom Vorschub  $h$  und vom Radius  $r \leq \sqrt{\varrho^2 - h^2}$ . Dabei geht der Kreisringsektor über in die Zone einer Schraubenböschungsfäche; der Winkel  $\omega$  der Erzeugenden gegen die Schraubenachse ist durch  $\sin \omega = \frac{\sqrt{r^2 + h^2}}{\varrho}$  und der Radius der Kehllinie hierauf durch (8) festgelegt.

Wendet man diese Ergebnisse nacheinander auf die verschiedenen Streifen eines Streifenmodells an, so erhält man den Verbiegungssatz:

Ein Streifenmodell kann in eine 1-parametrische Menge von Drehmodellen und eine 2-parametrische Menge von Schraubenmodellen verbogen werden; bei Drehmodellen läßt sich ein Kreisradius  $r \leq \varrho$ , bei Schraubenmodellen der Vorschub  $h$  sowie ein Kreisradius  $r \leq \sqrt{\varrho^2 - h^2}$  willkürlich vergeben. Bei je 2 aufeinander verbiegbaren Drehmodellen stehen einander entsprechende Radien in einem konstanten Verhältnis  $\lambda$  und einander entsprechende Azimutwinkel im umgekehrten Verhältnis  $1/\lambda$ .

Durch den in Ziffer 2 erwähnten Grenzprozeß geht der Verbiegungssatz der Streifenmodelle in den gleichlautenden Verbiegungssatz der Dreh- und Schraubenflächen über, der in der Differentialgeometrie als *BOURSCHE Theorem*<sup>2)</sup> bekannt ist. Außerdem läßt sich die Verbiegung der Streifenmodelle in einfachster Weise darstellend-geometrisch verwirklichen, indem man in Grund- und Aufriß die von den Erzeugenden der einzelnen Streifen gebildeten Streckenzüge konstruiert. Man erhält hierdurch mit beliebiger Genauigkeit die Meridiane der Biegungsdrehflächen und die zu den Schraubenlinien konjugierten Kurven der Biegungsschraubenflächen.

<sup>2)</sup> Vgl. z. B. L. BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale* I 1, 1927 (Bologna), S. 343ff.

4. *Beispiele: Spiraldrehflächen und Pseudosphäre.* Als Beispiel betrachten wir Streifenmodelle, bei denen je zwei benachbarte Streifen der Abwicklung in einem konstanten Verhältnis  $\mu$  zueinander ähnlich sind. Bei Ähnlichkeits-Transformationen mit den Verhältnissen  $\mu$ ,  $\mu^{-1}$ ,  $\mu^2$ ,  $\mu^{-2}$  usw. wird dann die Abwicklung als Ganzes, abgesehen vom ersten und letzten Streifen, in sich transformiert. Man kann diesen Tatbestand auch folgendermaßen ausdrücken: Wenn man ein Streifenmodell der hier betrachteten Art im Verhältnis  $\mu$ ,  $\mu^2$ ,  $\mu^3$  usw. ähnlich vergrößert oder verkleinert, so haben das ursprüngliche und das transformierte Modell dieselbe Abwicklung, sind also aufeinander verbiegbare. Beim Grenzübergang ergeben sich Flächen, die sich auf die 1-parametrischen Mengen der zu ihnen ähnlichen Flächen verbiegen lassen. Wie S. LIE<sup>3)</sup> gezeigt hat, sind Flächen dieser Art *Spiralflächen* oder *Biegungsflächen* von *Spiralflächen*. Da die vorliegenden Flächen demnach sowohl auf Dreh- und Schraubenflächen als auch auf *Spiralflächen* verbogen werden können, nennen wir sie kurz *Spiraldrehflächen*.

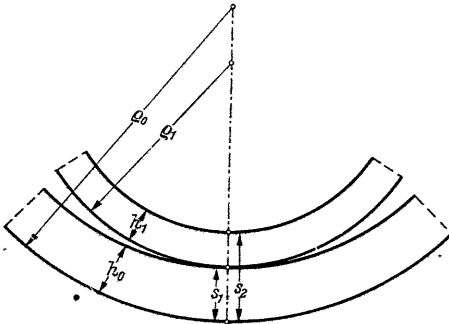


Fig. 4.

Streifenpaar für eine Spiraldrehfläche.

Wir bezeichnen mit  $\varrho_0$ ,  $\varrho_1 = \varrho_0 \mu$ ,  $\varrho_2 = \varrho_0 \mu^2$  usw. die äußeren Kreisradien und mit  $h_0$ ,  $h_1 = h_0 \mu$ ,  $h_2 = h_0 \mu^2$  usw. die Breiten der einzelnen Streifen; vgl. Fig. 4. Dann erhält man für die zu den Kreisen senkrechten Meridianpolygone die Bogenlängen

$$s_1 = h_0, \quad s_2 = h_0 + h_1, \quad \dots, \quad s_n = h_0 + h_1 + \dots + h_{n-1}, \\ = h_0 (1 + \mu + \dots + \mu^{n-1}),$$

woraus nach kurzer Rechnung

$$(5) \quad \varrho_n = \varrho_0 + a s_n, \quad a = \varrho_0 \frac{\mu - 1}{h_0}$$

und nach dem Grenzübergang vom Modell zu Fläche

$$(6) \quad \boxed{\varrho = \varrho_0 + a s}$$

folgt.

Für  $a = -1$  wird  $\varrho_0 - \varrho_1 = h_0$ , d. h. die Streifen der ebenen Abwicklung schließen sich lückenlos aneinander, die Spiraldrehfläche spezialisiert

<sup>3)</sup> LIE-SCHEFFERS, Geometrie der Berührungstransformationen, Leipzig 1896, S. 162.

sich zum Drehkegel. Für  $a > -1$  ergeben sich negativ gekrümmte und für  $a < -1$  positiv gekrümmte Drehspiralfächen. Im Sonderfall  $a = 0$  wird  $\mu = 1$ , d. h. die Streifen der ebenen Abwicklung sind kongruent. An Stelle der Ähnlichkeitstransformationen treten in diesem Falle Kongruenztransformationen und die Spiraldrehflächen entarten in Flächen konstanten negativen Krümmungsmaßes, wobei die aus (6) folgende Beziehung  $\varrho = \varrho_0 = \text{const}$  die bekannte Traktrix-eigenschaft der Pseudosphäre liefert.

In Fig. 5 ist ein Drehflächenmeridian für ein Streifenmodell einer negativ gekrümmten Spiraldrehfläche ( $\varrho_0/h = 4, a = -0,08$ ) nach Gleichung (5) konstruiert.

Aus (6) folgt mit

$$\frac{dr}{ds} = -\frac{r}{\varrho} \quad \text{und} \quad \left(\frac{ds}{dr}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2$$

bei der Anfangsbedingung  $r_0 = \varrho_0$  für  $s = 0$  im Falle  $a = 0$  als Meridiangleichung der Pseudosphäre

$$z = \int_{\varrho_0}^r \sqrt{\varrho_0^2 - r^2} \frac{dr}{r}$$

und im Falle  $a \neq 0$  als Meridiangleichung der Spiraldrehflächen <sup>4)</sup>

$$z = \frac{1}{a} \int_{\varrho_0}^r \sqrt{(r/\varrho_0)^{-2(a+1)} - 1} dr.$$

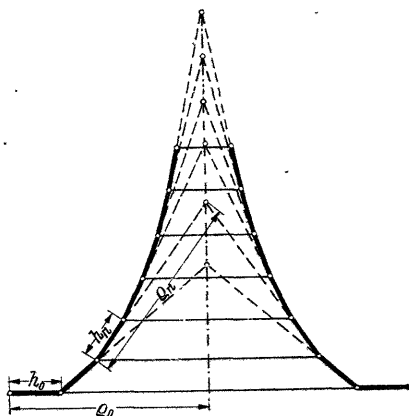


Fig. 5.  
Konstruktion einer Spiraldrehfläche.

5. *Geodätische Linien auf Dreh- und Schraubenflächen.* Die geodätischen Linien eines Streifenmodells setzen sich in der ebenen Abwicklung aus geraden Strecken zusammen. Beim Übergang von einem Streifen zum nächsten sind die Scheitelwinkel  $\alpha$  einander gleich (vgl. Fig. 3), so daß die Konstanten auf der rechten Seite der Gleichungen (4a) bzw. (4b) für alle Streifen denselben Wert haben. Man erhält daher für die geodätischen Linien auf Drehflächen die bekannte *CLAIRAUTSche Gleichung*

(7a)

$$r \cos \alpha = \text{const}$$

und für die geodätischen Linien auf Schraubenflächen die allgemeinere Beziehung

(7b)

$$\sqrt{r^2 + h^2} \cos \alpha = \text{const.}$$

<sup>4)</sup> Vgl. hierzu L. RAFFY, Par. soc. math. 20 (1892), S. 22.



## II. Regelflächen.

1. *Stangenmodell der Regelflächen.* Auf einer beliebig vorgegebenen Regelfläche greifen wir einzelne Erzeugende heraus und verbinden je zwei aufeinanderfolgende Erzeugende durch die auf ihnen senkrecht stehenden kürzesten Abstände; wenn die aufeinanderfolgenden Erzeugenden parallel sind, wählen wir irgendein gemeinsames Lot als kürzesten Abstand. Das so erzeugte Geradengebilde bezeichnen wir als *Stangenmodell*.

In Fig. 6 ist ein Stangenmodell dargestellt. Die Erzeugenden sind mit  $g_1, g_2$  usw., die Geraden der kürzesten Abstände mit  $\bar{f}_{12}, \bar{f}_{23}$  bezeichnet.  $\varphi_{12}$  bzw.  $\omega_2$  bedeutet den Winkel der Erzeugenden  $g_1, g_2$  bzw. der kürzesten Abstände  $\bar{f}_{12}, \bar{f}_{23}$ , ferner  $h_{12}$  die Länge des kürzesten Abstandes zwischen  $g_1, g_2$  und  $v_2$  die Entfernung der Fußpunkte  $F_{21}, F_{23}$  der kürzesten Abstände auf  $g_2$ .

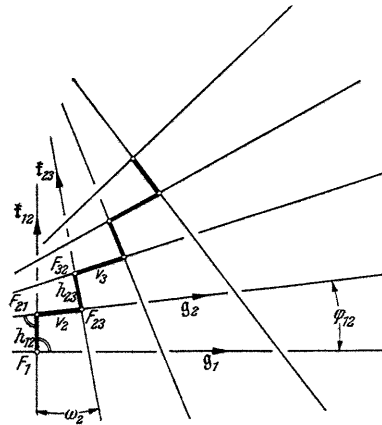


Fig. 6.

Stangenmodell einer Regelfläche.

Die Beziehung zwischen den Geradenfolgen  $g_i$  und  $\bar{f}_{i, i+1}$  ist eine gegenseitige, d. h. man kann die Linien  $\bar{f}_{i, i-1}$  als Erzeugende nehmen und bekommt dann als kürzeste Abstände die Strecken  $v_i$  auf den Geraden  $g_i$ .

Wenn man die das Stangenmodell aufbauenden Erzeugenden  $g_i$  auf der vorgegebenen Regelfläche enger und enger nimmt, konvergieren die Modelle gegen die Regelfläche und man erhält durch diesen Grenzprozeß die Differentialgeometrie der Regelflächen aus elementargeometrischen Beziehungen der Stangenmodelle.

Die Streckenzüge mit den Fußpunkten  $F_{ik}$  der kürzesten Abstände als Eckpunkten gehen an der Grenze in die *Kehllinie* der Regelfläche über, die Geradenfolge  $\bar{f}_{12}, \bar{f}_{23}$  usw. konvergiert gegen die *konjugierte Regelfläche*, welche die gegebene Regelfläche längs der gemeinsamen Kehllinie berührt.

2. *Bewegungsinvarianten der Regelflächen.* Ein Stangenmodell ist bis auf eine beliebige Bewegung im Raum festgelegt, wenn die Winkel  $\varphi_{i, i+1}$  und  $\omega_i$  sowie die Längen  $h_{i, i+1}$  und  $v_i$  vorgegeben sind. Dabei muß man geeignete Festsetzungen über die Vorzeichen treffen, worauf wir in Ziffer 3 zurückkommen werden.

Beim Übergang vom Stangenmodell zur Regelfläche, deren Erzeugende durch hinreichend oft differenzierbare Funktionen eines Parameters  $t$  gegeben seien, erhält man die Grenzwerte

$$\frac{\varphi_{i, i+1}}{\Delta t} \rightarrow p(t), \quad \frac{\omega_i}{\Delta t} \rightarrow q(t), \quad \frac{h_{i, i+1}}{\Delta t} \rightarrow \bar{p}(t), \quad \frac{v_i}{\Delta t} \rightarrow \bar{q}(t).$$

Aus der Herleitung folgt, daß die vier Funktionen  $p(t)$ ,  $q(t)$ ,  $\bar{p}(t)$ ,  $\bar{q}(t)$  Differentialinvarianten sind, welche die Regelfläche bis auf eine beliebige Bewegung im Raum festlegen. Sie hängen noch von dem willkürlichen Parameter  $t$  ab, während ihre Verhältnisse von  $t$  unabhängig sind. Ebenso hängen die Integralinvarianten

$$P = \int_{t_a}^{t_b} p dt = \lim \sum \varphi_{i, i+1}, \quad Q = \int_{t_a}^{t_b} q dt = \lim \sum \omega_i,$$

$$\bar{P} = \int_{t_a}^{t_b} \bar{p} dt = \lim \sum h_{i, i+1}, \quad \bar{Q} = \int_{t_a}^{t_b} \bar{q} dt = \lim \sum v_i$$

nicht mehr von  $t$  ab.  $P$  und  $Q$  sind Bogenlängen im sphärischen Bild der Ausgangsregelfläche und der konjugierten Regelfläche; über die geometrische Bedeutung von  $\bar{P}$  und  $\bar{Q}$  vgl. Ziffer 4.

Das Verhältnis  $\bar{p}/p$  nennt man vielfach *Drall*; außerdem wollen wir im Hinblick auf die in Ziffer 4 erläuterten kinematischen Zusammenhänge  $q/p$  als *Biegung* und  $\bar{q}/p$  als *Schrotung* bezeichnen.

3. *Ableitungsgleichungen der Regelflächen.* Wir verstehen nunmehr unter  $g_1$  und  $\mathfrak{f}_{12}$  die Einheitsvektoren in Richtung der Erzeugenden und der kürzesten Abstände des Stangenmodells, und zwar soll  $\mathfrak{f}_{12}$  von  $F_1$  nach  $F_{21}$  gerichtet sein. Außerdem sei  $n_{12}$  der zu  $\mathfrak{f}_{12}$  und der Winkelhalbierenden von  $g_1$ ,  $g_2$  senkrechte Einheitsvektor, derart, daß  $g_1$ ,  $n_{12}$ ,  $\mathfrak{f}_{12}$  ein Rechtssystem bilden. Schließlich bedeutet  $\hat{n}_2$  den zu  $g_2$  und der Winkelhalbierenden von  $\mathfrak{f}_{12}$ ,  $\mathfrak{f}_{23}$  senkrechten Einheitsvektor, wobei  $g_2$ ,  $\hat{n}_2$ ,  $\mathfrak{f}_{12}$  wieder rechtsorientiert sind. Dann gelten offenbar die Beziehungen

$$(8) \quad g_2 - g_1 = n_{12} \cdot 2 \sin \frac{\varphi_{12}}{2}, \quad \mathfrak{f}_{23} - \mathfrak{f}_{12} = -\hat{n}_2 \cdot 2 \sin \frac{\omega_2}{2},$$

welche gleichzeitig die Vorzeichen von  $\varphi_{12}$  und  $\omega_2$  definieren.

Beim Grenzübergang vom Stangenmodell zur Regelfläche konvergiert sowohl  $n_{12}$  als auch  $\hat{n}_2$  gegen den Normalenvektor  $n$  der Regelfläche und aus (8) folgen die Ableitungsgleichungen

$$(9) \quad \boxed{g' = p n, \quad \mathfrak{f}' = -q n, \quad n' = -p g + q \mathfrak{f}.}$$

Die letzte dieser Gleichungen ergibt sich aus den beiden ersten mit Hilfe der Orthogonalitätsbeziehung  $n = \mathfrak{f} \times g$ .

Zur Festlegung der Geraden benötigt man neben den die Richtung bestimmenden Einheitsvektoren  $g$ ,  $n$ ,  $\mathfrak{f}$  noch die Momentvektoren

$$(10) \quad \bar{g} = r_{(g)} \times g, \quad \bar{n} = r_{(n)} \times n, \quad \bar{\mathfrak{f}} = r_{(\mathfrak{f})} \times \mathfrak{f}$$

mit dem Radiusvektor  $r$  von einem beliebig angenommenen Bezugspunkt  $O$  nach einem beliebigen Punkt der betreffenden Geraden. Für die Differentiation nach  $t$  liefern die an den Stangenmodellen ablesbaren Beziehungen

$$\Delta r_{(g)} = h_{12} \bar{k}_{12}, \quad \Delta r_{(n)} = h_{12} \bar{k}_{12} + v_2 g_2, \quad \Delta r_{(t)} = v_2 g_2,$$

welche gleichzeitig die Vorzeichen von  $h_{12}$  und  $v_2$  definieren, beim Grenzübergang zur Regelfläche die Formeln

$$(11) \quad r'_{(g)} = \bar{p} \bar{k}, \quad r'_{(n)} = \bar{p} \bar{k} + \bar{q} g, \quad r'_{(t)} = \bar{q} g.$$

Durch Differentiation von (10) kommt schließlich mit Berücksichtigung von (9) und (11) das Gleichungssystem

$$(12) \quad \boxed{\bar{g}' = \bar{p} n + p \bar{n}, \quad \bar{k}' = -\bar{q} n - q \bar{n}, \quad \bar{n}' = -\bar{p} g - p \bar{g} + \bar{q} k + q \bar{k}.}$$

Die Differentialgleichungen (9) und (12) sind die bekannten *Ableitungsgleichungen*<sup>5)</sup> der Liniengeometrie der Regelflächen.

4. *Verbiegung und Verschrotung der Regelflächen.* Wir denken uns die kürzesten Abstände der Stangenmodelle nach Fig. 7 als Blechhülsen ausgebildet, welche um die Stangen  $g_i$  ver-

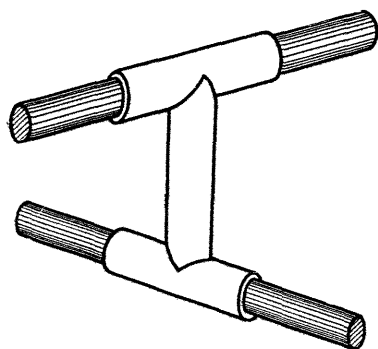


Fig. 7. Blechhülse zur Verkopplung eines Stangenpaares.

drehbar und längs  $g_i$  verschiebbar sind, während Winkel und Abstand aufeinanderfolgender Stangen ungeändert bleibt. Das Stangenmodell läßt sich dann durch Verdrehung und Verschiebung der Hülsen unter Festhaltung der Winkel  $\varphi_{i, i+1}$  und der Längen  $h_{i, i+1}$  deformieren. Bei reiner Verdrehung der Hülsen sprechen wir von *Verbiegungen*, im allgemeinen Fall, d. h. wenn Verschiebungen hinzukommen, von *Verschrotungen* des Modells. Bei Verbiegungen bleiben die Strecken  $v_i$  fest, während sich die Winkel  $\omega_i$  ändern, bei

allgemeinen Verschrotungen ändern sich sowohl die Strecken  $v_i$  als auch die Winkel  $\omega_i$ .

Je zwei aufeinanderfolgende, durch den kürzesten Abstand verbundene Stangen bezeichnen wir als *Stangenpaar* des Modells. Die Stangenpaare bleiben sowohl bei Verbiegungen wie bei Verschrotungen im Winkel und im kürzesten Abstand bis auf ein unwesentliches Gleiten der Stangen in den Hülsen ungeändert. Die sich paarweise entsprechenden Stangenpaare

<sup>5)</sup> Vgl. W. BLASCHKE, Differentialgeometrie I, Berlin 1930, S. 270; außerdem F. LÖBEL, Jber. d. D. M. V. 51 (1941), Heft 2, S. 29–41.

zweier in der Verbiegungsbeziehung stehenden Modelle I, II kommen der Reihe nach miteinander zur Deckung durch Drehungen um die Geraden  $g_i$  mit den Winkeln  $\omega_i^{II} - \omega_i^I$ . Bei zwei in allgemeiner Verschrotungsbeziehung stehenden Modellen treten an Stelle der Drehungen um die Geraden  $g_i$  Schraubungen, indem zu den Drehungen  $\omega_i^{II} - \omega_i^I$  noch die Verschiebungen  $v_i^{II} - v_i^I$  hinzukommen.

Beim Grenzübergang vom Modell zur Fläche liefert der Verbiegungsprozeß die Biegungsflächen und der Verschrotungsprozeß die Schrotungs-

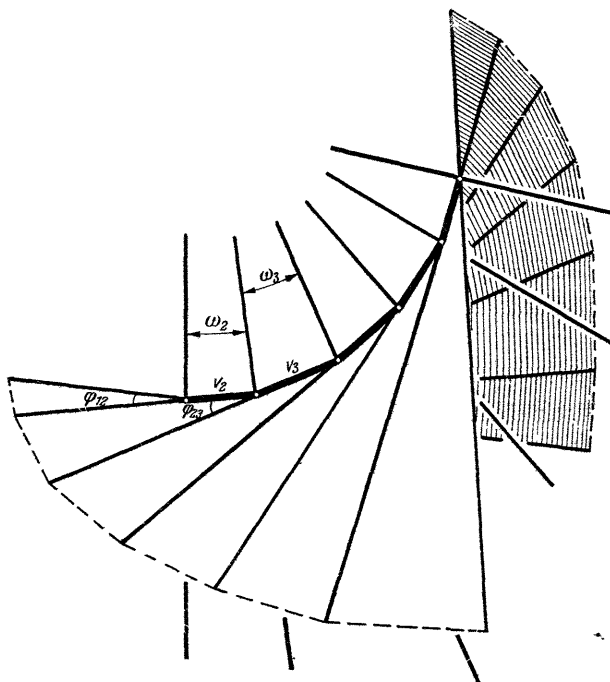


Fig. 8. Torsenmodell.

flächen der vorgegebenen Regelfläche. Die Schrotungsflächen stimmen in den Invarianten  $p(t)$  und  $\bar{p}(t)$  und demnach im Drall  $\bar{p}/p$ , die Biegungsflächen außerdem noch in der Invarianten  $\bar{q}(t)$  und somit in der Schrotung  $\bar{q}/p$  überein, während sie sich in der Biegung  $q/p$  unterscheiden. Biegungsregelflächen lassen sich aneinander abrollen. Dabei berühren sie sich in jedem Augenblick längs einer gemeinsamen Erzeugenden  $g(t)$  und führen um diese eine Momentandrehung aus; die momentane Drehgeschwindigkeit ist gleich  $q^{II}(t) - q^I(t)$ , falls der Parameter  $t$  die Zeit bedeutet. Bei Schrotungsregelflächen tritt an Stelle des Abrollens ein „Abschroten“; die gemeinsamen Erzeugenden  $g(t)$  sind die Achsen von Momentanschraubungen mit der Drehgeschwindigkeit  $q^{II}(t) - q^I(t)$  und der Verschiebungsgeschwindigkeit  $\bar{q}^{II}(t) - \bar{q}^I(t)$ .

Ein Stangenmodell läßt sich stets so verbiegen, daß die Erzeugenden  $g_i$  einer Ebene parallel werden; die kürzesten Abstände  $\mathfrak{f}_{i, i+1}$  stehen dann auf dieser Ebene senkrecht und bilden die Winkel  $\omega_i = 0$ . Dem entsprechend kann eine Regelfläche stets in ein *Konoid* verbogen werden, indem man der Invarianten  $q(t)$  den Wert Null gibt. Die Integralinvarianten  $\bar{P}$  und  $\bar{Q}$  (vgl. Ziffer 2) zwischen zwei Geraden  $g_a$  und  $g_b$  können dann als kürzester Abstand dieser Geraden und als Bogenlänge des Konoidumrisses gedeutet werden.

5. *Sonderfall: Torse und Binormalenfläche.* Mit  $h_{i, i+1} = 0$  entartet das Stangenmodell zu dem in Bild 8 dargestellten *Torsenmodell*, bei dem je zwei aufeinanderfolgende Erzeugende  $g_i, g_{i+1}$  durch ebene Dreieckstreifen verbunden werden können. Die Erzeugenden  $g_i$  bilden ein Polygon mit den Seitenlängen  $v_i$  und den Außenwinkeln  $\varphi_{i, i+1}$ , die Geraden  $\mathfrak{f}_{i, i+1}$  stehen in den Polygonecken auf den Dreieckstreifen senkrecht und schließen die Winkel  $\omega_i$  ein.

Differentialgeometrisch entspricht dem Torsenmodell die Tangentenfläche einer Raumkurve samt der von den Binormalen erzeugten Regelfläche. Die Krümmung und Windung der Raumkurve ist durch

$$K = \lim \frac{\varphi_{12}}{v_2} = \frac{p}{q}, \quad W = \lim \frac{\omega_2}{v_2} = \frac{q}{q}$$

gegeben. Hierdurch gehen die Ableitungsgleichungen (9) in die *FRENETSchen Formeln* der Kurventheorie über.

(Eingegangen am 14. April 1942.)