Einige Bemerkungen über rationale Flächen.

Von

Oskar Perron in München.

§ 1.

Der behandelte Problemkreis.

Unter einem rationalen Gebilde im projektiven R_n ($n \geqq 2$) verstehen wir eine Menge von Punkten, deren $n+1$ homogene Koordinaten sich rational durch eine Anzahl Parameter darstellen lassen:

$$\lambda x_\nu = f_\nu(\varrho_1, \ldots, \varrho_k) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n).$$

λ ist ein willkürlicher Proportionalitätsfaktor, den wir später weglassen. Die f_ν sind rationale Funktionen, die wir, indem wir den Hauptnenner in den Faktor λ aufnehmen, als *Polynome* annehmen dürfen, ja sogar als homogene Polynome gleichen Grades, indem wir die Parameter homogenisieren, d. h. $\varrho_\varkappa$ durch $\varrho_\varkappa \varrho_{k+1}^{-1}$ ersetzen und eine geeignete Potenz von ϱ_{k+1} in den Faktor λ aufnehmen. Außerdem dürfen wir die Polynome f_ν als relativ prim annehmen, weil ein gemeinsamer Teiler durch Änderung des Faktors λ beseitigt werden kann. Die Koeffizienten der f_ν mögen einem Körper der Charakteristik 0 angehören, etwa dem Körper der komplexen Zahlen oder einem durch Adjunktion von Unbestimmten daraus hervorgegangenen Erweiterungskörper und die Parameter dürfen dann alle Wertsysteme dieses Körpers durchlaufen für welche die f_ν nicht sämtlich verschwinden.

Ist die Anzahl der homogenen Parameter gleich n und ist das Gebilde $(n-1)$-dimensional, so nennen wir es rationale *Fläche* (im projektiven R_n; *Kurve* für $n = 2$). Für eine rationale Fläche gilt also die Darstellung

$$x_\nu = f_\nu(\varrho_1, \ldots, \varrho_n) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n), \tag{1}$$

wo die f_ν homogene Polynome gleichen positiven Grades ohne gemeinsamen nichtkonstanten Teiler sind. Die Gleichungen (1) vermitteln eine (meist nicht eineindeutige) Abbildung der Fläche auf die $(n-1)$-dimensionale Ebene, deren Punkte die homogenen Koordinaten $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ haben. Man kennt allerhand Möglichkeiten, um bei einer algebraischen Fläche herauszubekommen, ob sie rational ist, und gegebenenfalls eine Abbildung auf die Ebene zu finden [1]. Aber um die umgekehrte Frage scheint man sich nie recht gekümmert zu

[1] Darüber belehrt z. B. das Buch von F. Conforto, Le superficie razionali. Bologna 1939.

haben, wohl, weil man sie für trivial hielt; und doch sind da manche Fragen zu klären.

Daß es sowohl auf der Ebene wie auf der Fläche im allgemeinen Ausnahmepunkte gibt, denen bei der Abbildung kein Bildpunkt entspricht, ist zwar längst bekannt und wird auch bei CONFORTO a. a. O. mehrfach hervorgehoben. Aber wie bekommt man überhaupt die Flächengleichung? Die Antwort heißt natürlich, daß man ja nur die Parameter zu *eliminieren* braucht; aber da beginnt die Schwierigkeit. Zunächst kann es sein, daß die Gleichungen (1) überhaupt keine Fläche, sondern ein Gebilde von weniger als $n-1$ Dimensionen darstellen. Da möchte man doch brauchbare Kriterien haben. Und wenn sie eine Fläche darstellen, welches ist ihre Ordnung? Man wird sich die Antwort so überlegen: Eine allgemeine Gerade, dargestellt durch $n-1$ Gleichungen

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_{\mu\nu} x_\nu = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, n-1),$$

hat mit der Fläche, wenn die f_ν vom Grad m sind, nach dem BÉZOUTschen Satz m^{n-1} Punkte gemein, also ist die Fläche von der Ordnung m^{n-1}. Aber dann wäre die Ordnung einer rationalen Fläche im R_n stets eine $(n-1)$-te Potenz, was nicht zutrifft. Bei den Flächen zweiter Ordnung im R_3 ist z. B. bei den üblichen Darstellungen in der Gestalt (1) stets $m = 2$, woraus man die Ordnung $2^2 = 4$ errechnet statt 2; die Rechnung stimmt also nicht. Andererseits ist bekannt, daß beim Eliminieren die „Endgleichung" leicht mit „falschen" Faktoren behaftet ist; um solchen zu entgehen, wird man etwa die Resultante

$$R\begin{pmatrix} f_1 - x_1, & \ldots, & f_n - x_n, & f_0 - x_0 \\ \varrho_1 \quad , & \ldots, & \varrho_n \quad , & 1 \end{pmatrix}$$

oder auch die Resultante

$$R\begin{pmatrix} x_0 f_1 - x_1 f_0, & \ldots, & x_0 f_n - x_n f_0 \\ \varrho_1 \quad , & \ldots, & \varrho_n \end{pmatrix}$$

gleich 0 setzen. Aber erstens ist dieser Resultantenbegriff für $n > 1$ bzw. für $n > 2$ nur wenig bekannt, zweitens wird der Kenner leicht finden, daß die erste Resultante in den x_ν homogen vom Grad m^n und die zweite homogen vom Grad $n \cdot m^{n-1}$ ist, während man nur die Ordnung m^{n-1} erwartet. Die Rechnung stimmt also wieder nicht. Sind in den Resultanten vielleicht auch noch „falsche" Faktoren enthalten? Zu allem Unglück kommt es aber auch häufig vor, daß beide Resultanten identisch verschwinden (vgl. die Sätze des § 3), also überhaupt keine Flächengleichung liefern. Was dann?

Man sieht, es sind noch allerhand Fragen zu klären, und ein Beitrag dazu soll im folgenden mit streng algebraischen Methoden geliefert werden. Die dabei benötigten Sätze findet man in des Verfassers Buch: Algebra, Bd. 1, zweite Aufl. 1932, das unter „Algebra" zitiert wird.

§ 2.

Die Funktionalmatrix.

Satz 1. *Notwendig und hinreichend dafür, daß die Gleichungen* (1), *wo die f_ν homogene Polynome gleichen Grades sind*[2]), *eine und nur eine absolut irreduzible homogene algebraische Gleichung $F(x_0, \ldots, x_n) = 0$ nach sich ziehen, ist, daß die n-reihigen Determinanten der Funktionalmatrix*

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial f_0}{\partial \varrho_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial \varrho_1} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_0}{\partial \varrho_n} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial \varrho_n} \end{matrix} \right\|$$

nicht sämtlich identisch verschwinden. Ist sie erfüllt, so ist also das rationale Gebilde (1) *ein (echter oder unechter) Teil der algebraischen Fläche $F(x_0, \ldots, x_n) = 0$, aber nicht zugleich Teil eines algebraischen Gebildes von weniger als $n - 1$ Dimensionen.*

Beweis. Ganz unabhängig von der Funktionalmatrix haben die Gleichungen (1) nach Algebra, Satz 56 eine Gleichung $G(x_0, \ldots, x_n) = 0$ zur Folge. Es ist also $G(f_0, \ldots, f_n)$ als Polynom der ϱ_ν identisch 0, und da die f_ν homogen von gleichem Grad sind, muß dann schon jeder in bezug auf die f_ν homogene Bestandteil von $G(f_0, \ldots, f_n)$ für sich verschwinden. Die Gleichungen (1) haben also auch eine *homogene* Gleichung $G(x_0, \ldots, x_n) = 0$ zur Folge[3]). Zerlegt man G in absolut irreduzible Faktoren[4])

$$G(x_0, \ldots, x_n) = F_1(x_0, \ldots, x_n) \ldots F_r(x_0, \ldots, x_n),$$

die dann von selbst ebenfalls homogen sind, so ist das Produkt

$$F_1(f_0, \ldots, f_n) \ldots F_r(f_0, \ldots, f_n)$$

als Polynom der ϱ_ν identisch 0; also ist schon ein Faktor identisch 0, etwa der erste. Das besagt aber, daß die Gleichungen (1) die irreduzible Gleichung $F_1(x_0, \ldots, x_n) = 0$ nach sich ziehen. Würden sie noch eine zweite nach sich ziehen, so könnte man aus beiden Gleichungen eine beliebige der Größen x_ν eliminieren, d. h. die gewöhnliche (SYLVESTERsche) Resultante gleich 0 setzen

---

[2]) Daß die f_ν relativ prim sind, braucht bei diesem Satz nicht vorausgesetzt zu werden.

[3]) Ein anderer Beweis dieses Satzes findet sich in meiner Arbeit: Beweis und Verschärfung eines Satzes von KRONECKER. Math. Annalen **118** (1942), S. 441—448.

[4]) Dazu ist es vielleicht nötig, den zugrunde gelegten Körper durch Adjunktion neuer Größen zu erweitern. Solche Adjunktionen denken wir uns hier und auch später, sobald sie nötig werden, stets stillschweigend vollzogen. Dagegen ist es nicht nötig, einen algebraisch abgeschlossenen Körper vorauszusetzen.

und würde so eine Relation zwischen den anderen x_μ erhalten [5]). Nach Algebra, Satz 61 müßten dann aber die Determinanten der Funktionalmatrix verschwinden, entgegen der Voraussetzung.

Bemerkung. Satz 1 sagt nur, daß das rationale Gebilde ein *Teil* der Fläche $F = 0$ ist. Es wäre falsch zu sagen, daß es die ganze Fläche ist; denn es kann Ausnahmepunkte auf der Fläche geben, die durch die Darstellung (1) nicht erfaßt werden.

Beispiele. I. $x_0 = \varrho_1^2,\quad x_1 = \varrho_1\varrho_2,\quad x_2 = \varrho_2^2,\quad x_3 = \varrho_3^2,$

II. $x_0 = \varrho_1^3,\quad x_1 = \varrho_1^2\varrho_2,\quad x_2 = \varrho_1\varrho_2^2,\quad x_3 = \varrho_3^3,$

III. $x_0 = \varrho_1^2,\quad x_1 = \varrho_1\varrho_2,\quad x_2 = \varrho_2^2,\quad x_3 = \varrho_1\varrho_3,$

IV. $x_0 = \varrho_1^2,\quad x_1 = \varrho_1\varrho_2,\quad x_2 = \varrho_2\varrho_3,\quad x_3 = \varrho_1\varrho_3 + \varrho_2^2.$

In den Beispielen I, II, III wird der Kegel $x_0x_2 - x_1^2 = 0$ dargestellt, und zwar im Beispiel I vollständig. Im Beispiel II fehlt ihm die Mantellinie $x_0 = 0$, $x_1 = 0$ mit Ausnahme der Spitze mit den Koordinaten 0, 0, 0, 1. Im Beispiel III fehlt ihm ebenfalls diese Mantellinie, aber diesmal einschließlich Spitze und mit Ausnahme des Punktes 0, 0, 1, 0. Im Beispiel IV wird die Fläche $x_0\,x_1\,x_3 = x_0^2\,x_2 + x_1^3$ dargestellt, doch fehlt ihr genau *ein* Punkt, nämlich der Punkt 0, 0, 1, 0.

§ 3.

Resultantensätze.

Das Kriterium in Satz 1 ist bei der praktischen Anwendung recht unhandlich, und außerdem sagt es nichts über die Ordnung der algebraischen Fläche aus. Um günstigere Resultate zu bekommen, brauchen wir einige Sätze über eine gewisse Resultante.

Satz 2. *Wenn die $n+1$ homogenen Polynome*

$$f_0(\varrho_1, \ldots, \varrho_n), \ldots, f_n(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$$

alle vom gleichen Grad m sind und wenn $m^{n-1} = l$ gesetzt wird, dann ist die Resultante

$$\mathsf{P} = R\begin{pmatrix} x_0 f_1 - x_1 f_0, & x_0 f_2 - x_2 f_0, & \ldots, & x_0 f_n - x_n f_0 \\ \varrho_1 & , \quad \varrho_2 & , \ldots, & \varrho_n \end{pmatrix}$$

als Polynom der Unbestimmten $x_0, \ldots, x_n$ teilbar durch $x^{(n-1)l}$. Setzt man demgemäß

$$\mathsf{P} = x_0^{(n-1)l} F(x_0, \ldots, x_n),$$

so ist F entweder identisch 0 oder ein homogenes Polynom vom Grad l.

---

[5]) Sollte zufällig eine der beiden Gleichungen schon von x_ν frei sein, so hat man schon das Gewünschte und braucht natürlich nichts mehr zu eliminieren.

Beweis. Nach Algebra, Satz 120 und § 47, I ist die Resultante P jedenfalls ein homogenes Polynom der x_ν vom Grad nl oder identisch 0. Nach Algebra, Satz 147 bleibt sie ungeändert, wenn man in der ersten Zeile zum letzten Glied ein mit einem von $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ freien Faktor multipliziertes anderes Glied addiert. Da sie aber außerdem nach Algebra, S. 221 bei Umordnung der Glieder der ersten Zeile sich nur mit ± 1 multipliziert, darf man ebenso zum ν-ten Glied etwa das mit $-\frac{x_\nu}{x_\mu}$ multiplizierte μ-te Glied addieren. Macht man das bei festem μ für alle von μ verschiedenen ν, so geht P über in [6])

$$R\begin{pmatrix} \frac{x_0}{x_\mu}(x_\mu f_\varkappa - x_\varkappa f_\mu), & x_0 f_\mu - x_\mu f_0, & \frac{x_0}{x_\mu}(x_\mu f_\lambda - x_\lambda f_\mu) \\ \varrho_\varkappa & , \quad \varrho_\mu & , \quad \varrho_\lambda \end{pmatrix}$$
$$= \left(\frac{x_0}{x_\mu}\right)^{(n-1)l} \cdot R\begin{pmatrix} x_\mu f_\varkappa - x_\varkappa f_\mu, & x_0 f_\mu - x_\mu f_0, & x_\mu f_\lambda - x_\lambda f_\mu \\ \varrho_\varkappa & , \quad \varrho_\mu & , \quad \varrho_\lambda \end{pmatrix}.$$

Dabei ist zur Abkürzung $\varkappa$ als Vertreter der Indizes $1, \ldots, \mu - 1$ geschrieben, und λ als Vertreter der Indizes $\mu + 1, \ldots, n$. Der Exponent $(n - 1)\,l$ ergibt sich aus Algebra, Satz 120. Da nach dem gleichen Satz die zuletzt angeschriebene Resultante wieder ein Polynom der x_ν ist, ergibt sich, daß die ursprüngliche Resultante P den Faktor $x_0^{(n-1)\,l}$ enthält. Da sie identisch 0 oder ein homogenes Polynom der x_ν vom Grad nl ist, ergibt sich, daß der Restfaktor $F(x_0, \ldots, x_n)$ identisch 0 oder homogen vom Grad $nl - (n-1)\,l = l$ ist. Zugleich erhält man die Formel

$$(2) \quad R\begin{pmatrix} x_\mu f_\varkappa - x_\varkappa f_\mu, & x_0 f_\mu - x_\mu f_0, & x_\mu f_\lambda - x_\lambda f_\mu \\ \varrho_\varkappa & , \quad \varrho_\mu & , \quad \varrho_\lambda \end{pmatrix} = x_\mu^{(n-1)\,l} F(x_0, \ldots, x_n)$$
$$(\varkappa = 1, \ldots, \mu - 1;\ \lambda = \mu + 1, \ldots, n).$$

Satz 3. *Unter den Voraussetzungen von Satz 2 haben die $n + 1$ Polynome $f_\nu(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ dann und nur dann eine gemeinsame Nullstelle* [7]), *wenn das Polynom $F(x_0, \ldots, x_n)$ identisch verschwindet. Die Koeffizienten von F bilden also, wenn die Koeffizienten der Polynome f_ν selbst Unbestimmte sind, ein Resultantensystem dieser Polynome* [8]).

Beweis. Wenn die Polynome f_ν eine gemeinsame Nullstelle haben, so haben die n Polynome von $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$

$$(3) \qquad x_0 f_\nu - x_\nu f_0 \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

---

[6]) Sogar ohne Änderung des Vorzeichens, worauf es aber gar nicht ankommt.

[7]) Unter einer Nullstelle eines homogenen Polynoms ist stets eine nichttriviale Nullstelle zu verstehen. Zwei Nullstellen, die sich nur durch einen Proportionalitätsfaktor unterscheiden, gelten nicht als verschieden.

[8]) Über den Begriff Resultantensystem vgl. Algebra, S. 276.

ebenfalls diese Nullstelle. Daher verschwindet nach Algebra, Satz 139 die Resultante P und folglich auch $F(x_0, \ldots, x_n)$. Wenn umgekehrt F identisch verschwindet, so gilt dasselbe von P, so daß nach Algebra, Satz 139 die Polynome (3) eine gemeinsame Nullstelle $\varrho_1^0, \ldots, \varrho_n^0$ haben. Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{f_0(\varrho_1^0, \ldots, \varrho_n^0)}{x_0} = \lambda,$$

so ist also

$$f_\nu(\varrho_1^0, \ldots, \varrho_n^0) = \lambda x_\nu \qquad (\nu = 0, \ldots, n). \tag{4}$$

Wenn wir zeigen können, daß $\lambda = 0$ ist, so heißt das, daß die f_ν die gemeinsame Nullstelle $\varrho_1^0, \ldots, \varrho_n^0$ haben, womit Satz 3 bewiesen sein wird.

Nun besteht zwischen den f_ν eine homogene Abhängigkeit (vgl. Beweis von Satz 1), etwa vom Grad N:

$$\Sigma\, C_{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n} f_0^{\nu_0} f_1^{\nu_1} \ldots f_n^{\nu_n} = 0 \qquad (\nu_0 + \nu_1 + \cdots + \nu_n = N).$$

Nach (4) ist dann

$$\lambda^N \Sigma\, C_{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n} x_0^{\nu_0} x_1^{\nu_1} \ldots x_n^{\nu_n} = 0,$$

und daraus folgt, da die x_ν Unbestimmte sind, $\lambda = 0$; w. z. b. w.

Satz 4. *Unter den Voraussetzungen von Satz 2 ist die Resultante*

$$R\begin{pmatrix} f_1 - x_1, & \ldots, & f_n - x_n, & f_0 - x_0 \\ \varrho_1 \quad , & \ldots, & \varrho_n \quad , & 1 \end{pmatrix}$$

die m-te Potenz des Polynoms $-F(x_0, \ldots, x_n)$.

Wir werden diesen Satz nicht weiter benötigen, weshalb wir auf den Beweis, der sich mit Hilfe von Algebra, Satz 146 führen läßt, verzichten. Der Satz wurde nur aufgeführt, weil er immerhin eine in § 1 gestellte Frage in überraschender Weise teilweise beantwortet.

Satz 5. *Wenn die $n+1$ homogenen Polynome m-ten Grades*

$$f_0(\varrho_1, \ldots, \varrho_n), \quad \ldots, \quad f_n(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$$

keine gemeinsame Nullstelle haben, so daß das in Satz 2 eingeführte homogene Polynom $F(x_0, \ldots, x_n)$ nach Satz 3 nicht identisch verschwindet, sondern vom Grad m^{n-1} ist, so hat das Formelsystem

$$x_\nu = f_\nu(\varrho_1, \ldots, \varrho_n) \qquad (\nu = 0, \ldots, n)$$

die Gleichung $F(x_0, \ldots, x_n) = 0$ zur Folge; d. h. zwischen den Polynomen f_ν besteht die Abhängigkeit $F(f_0, \ldots, f_n) = 0$.

Ist umgekehrt $x_0', \ldots, x_n'$ ein Größensystem, für welches $F(x_0', \ldots, x_n') = 0$ ist, so gibt es (mindestens) ein Größensystem $\varrho_1', \ldots, \varrho_n'$ derart, daß die Gleichungen gelten:

$$x_\nu' = f_\nu(\varrho_1', \ldots, \varrho_n') \qquad (\nu = 0, \ldots, n).$$

Beweis. Es ist nur eine Änderung der Bezeichnung, wenn wir statt von dem Formelsystem im ersten Teil des Satzes von dem Formelsystem

$$x_\nu = f_\nu(y_1, \ldots, y_n) \qquad (\nu = 0, \ldots, n)$$

reden. Dieses Formelsystem besagt aber, daß das Gleichungssystem mit den Unbekannten $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$

$$x_0 f_\nu(\varrho_1, \ldots, \varrho_n) - x_\nu f_0(\varrho_1, \ldots, \varrho_n) = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

eine Lösung hat, nämlich $\varrho_1 = y_1, \ldots, \varrho_n = y_n$. Daraus folgt nach Algebra, Satz 139, daß die Resultante P verschwindet. Daher verschwindet nach Satz 2 auch $F(x_0, \ldots, x_n)$, da ja, sobald die y_ν Unbestimmte sind, $x_0 \neq 0$ ist. Damit ist der erste Teil von Satz 5 bewiesen.

Wenn umgekehrt $F(x_0', \ldots, x_n') = 0$ ist, so hat das Gleichungssystem

$$x_\nu' = f_\nu(\varrho_1, \ldots, \varrho_n) \qquad (\nu = 0, \ldots, n)$$

zunächst, falls alle $x_\nu' = 0$ sind, die Lösung $\varrho_1 = 0, \ldots, \varrho_n = 0$, womit dieser triviale Fall erledigt ist. Anderenfalls sei etwa $x_\mu' \neq 0$. Wegen $F(x_0', \ldots, x_n') = 0$ verschwindet dann nach (2) auch die dortige Resultante mit x_ν' an Stelle von x_ν. Daher hat nach Algebra, Satz 139 das Gleichungssystem

$$x_\mu' f_\nu(\varrho_1, \ldots, \varrho_n) - x_\nu' f_\mu(\varrho_1, \ldots, \varrho_n) = 0$$
$$(\nu = 1, \ldots, \mu - 1, 0, \mu + 1, \ldots, n)$$

eine Lösung $\varrho_1'', \ldots, \varrho_n''$. Setzt man dann

$$\frac{f_\mu(\varrho_1'', \ldots, \varrho_n'')}{x_\mu'} = \lambda,$$

so ist

(5) $$f_\nu(\varrho_1'', \ldots, \varrho_n'') = \lambda x_\nu' \qquad (\nu = 0, \ldots, n).$$

Hierbei ist aber $\lambda \neq 0$, weil ja die Polynome f_ν nach Voraussetzung keine gemeinsame Nullstelle haben. Setzt man daher

$$\frac{\varrho_\nu''}{\sqrt[m]{\lambda}} = \varrho_\nu' \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

so folgt aus (5)

$$f_\nu(\varrho_1', \ldots, \varrho_n') = x_\nu' \qquad (\nu = 0, \ldots, n),$$

womit auch der zweite Teil von Satz 5 bewiesen ist.

Satz 6. *Unter den Voraussetzungen des ersten Teiles von Satz 5 ist das Polynom $F(x_0, \ldots, x_n)$ entweder absolut irreduzibel oder eine Potenz eines absolut irreduziblen Polynoms. Insbesondere im allgemeinen Fall, d. h. wenn die Koeffizienten der homogenen Polynome f_ν Unbestimmte sind, ist $F(x_0, \ldots, x_n)$ selbst absolut irreduzibel.*

Beweis. Nach Satz 5 verschwindet $F(f_0, \ldots, f_n)$ als Polynom der ϱ_ν identisch. Zerlegt man das Polynom $F(x_0, \ldots, x_n)$, falls es reduzibel ist, in irreduzible Faktoren:

$$F(x_0, \ldots, x_n) = \prod_{\lambda=1}^{r} G_\lambda(x_0, \ldots, x_n),$$

so ist $\prod G_\lambda(f_0, \ldots, f_n) = 0$, also verschwindet wenigstens einer der Faktoren, etwa

(6) $$G_1(f_0, \ldots, f_n) = 0.$$

Wir setzen $F = G_1 H$ (also $H = G_2 \ldots G_r$):

(7) $$F(x_0, \ldots, x_n) = G_1(x_0, \ldots, x_n)\, H(x_0, \ldots, x_n).$$

Wenn nun die x_ν irgendwie so spezialisiert werden, daß $H = 0$ ist, etwa

(8) $$H(x_0', \ldots, x_n') = 0,$$

so ist nach (7) auch $F(x_0', \ldots, x_n') = 0$, und nach Satz 5 gibt es dann gewisse Größen $\varrho_1', \ldots, \varrho_n'$ derart, daß

$$x_\nu' = f_\nu(\varrho_1', \ldots, \varrho_n') \qquad (\nu = 0, \ldots, n)$$

ist. Nach (6) ist daher

(9) $$G_1(x_0', \ldots, x_n') = 0.$$

Hiermit ist gezeigt, daß aus (8) allemal (9) folgt. Nach dem Hilbertschen Nullstellensatz (Algebra, Satz 136) ist also eine genügend hohe Potenz von $G_1(x_0, \ldots, x_n)$ durch $H(x_0, \ldots, x_n)$ teilbar. Die irreduziblen Faktoren von H, d. h. die Polynome $G_2, \ldots, G_r$ sind daher alle mit G_1 äquivalent. Somit ist $F = c\,G_1^r$, wo c eine Konstante, womit der erste Teil von Satz 6 bewiesen ist.

Der zweite Teil wird bewiesen sein, wenn sich zeigen läßt, daß unter den neu hinzukommenden Voraussetzungen jedes Polynom $\Phi(x_0, \ldots, x_n)$, für welches $\Phi(f_0, \ldots, f_n)$ als Polynom der ϱ_ν identisch verschwindet, durch $F(x_0, \ldots, x_n)$ teilbar ist. Um das zu zeigen, werde wieder $m^{n-1} = l$ gesetzt, und es sei

(10) $$F(x_0, \ldots, x_n) = \sum A_{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n} x_0^{\nu_0} x_1^{\nu_1} \ldots x_n^{\nu_n} \quad (\nu_0 + \nu_1 + \cdots + \nu_n = l)$$

und folglich

(11) $$\sum A_{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n} f_0^{\nu_0} f_1^{\nu_1} \ldots f_n^{\nu_n} = 0 \quad (\nu_0 + \nu_1 + \cdots + \nu_n = l).$$

Sind nun $y_1, \ldots, y_{n-1}$ weitere Unbestimmte, so hat das Gleichungssystem

(12) $$f_\nu(\varrho_1, \ldots, \varrho_n) - y_\nu f_0(\varrho_1, \ldots, \varrho_n) = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, n-1)$$

nach dem Bézoutschen Satz (Algebra, Satz 143) genau l Lösungen

$$\varrho_{1\lambda}, \ldots, \varrho_{n\lambda} \qquad (\lambda = 1, \ldots, l),$$

die alle voneinander verschieden sind, und alle $\varrho_{\nu\lambda}$ sind $\neq 0$. Für jede dieser Lösungen ist $f_0 \neq 0$, weil sonst nach (12) auch $f_\nu = 0$ für $\nu \leqq n-1$ wäre, während doch das System

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 0, \quad \ldots, \quad f_{n-1} = 0$$

keine Lösung hat [9]). Man kann daher den in jeder Lösung steckenden willkürlichen Proportionalitätsfaktor so wählen, daß $f_0 = 1$ ist. Aus (11) und (12) folgt dann

$$(13) \quad \Sigma A_{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n} y_1^{\nu_1} \cdots y_{n-1}^{\nu_{n-1}} [f_n(\varrho_{1\lambda}, \ldots, \varrho_{n\lambda})]^{\nu_n} = 0 \quad (\nu_0 + \nu_1 + \cdots + \nu_n = l).$$

Nun sind die l Werte $f_n(\varrho_{1\lambda}, \ldots, \varrho_{n\lambda})$ voneinander verschieden. Denn wäre etwa

$$f_n(\varrho_{1\lambda}, \ldots, \varrho_{n\lambda}) = f_n(\varrho_{1\mu}, \ldots, \varrho_{n\mu}),$$

oder ausführlicher geschrieben

$$\Sigma a_{\nu_1 \ldots \nu_n} \varrho_{1\lambda}^{\nu_1} \ldots \varrho_{n\lambda}^{\nu_n} = \Sigma a_{\nu_1 \ldots \nu_n} \varrho_{1\mu}^{\nu_1} \ldots \varrho_{n\mu}^{\nu_n},$$

so wäre, weil die Koeffizienten $a_{\nu_1 \ldots \nu_n}$ Unbestimmte sind [10]),

$$(14) \qquad \varrho_{1\lambda}^{\nu_1} \ldots \varrho_{n\lambda}^{\nu_n} = \varrho_{1\mu}^{\nu_1} \ldots \varrho_{n\mu}^{\nu_n} \quad \text{für } \nu_1 + \cdots + \nu_n = m,$$

also insbesondere auch $\varrho_{1\lambda}^m = \varrho_{1\mu}^m$, so daß $\frac{\varrho_{1\lambda}}{\varrho_{1\mu}}$ eine m-te Einheitswurzel wäre; ebenso $\frac{\varrho_{2\lambda}}{\varrho_{2\mu}}, \ldots, \frac{\varrho_{n\lambda}}{\varrho_{n\mu}}$. Ist ε eine primitive m-te Einheitswurzel, so wäre also

$$(15) \qquad \frac{\varrho_{1\lambda}}{\varrho_{1\mu}} = \varepsilon^{\alpha_1}, \ldots, \frac{\varrho_{n\lambda}}{\varrho_{n\mu}} = \varepsilon^{\alpha_n},$$

und folglich nach (14)

$$\varepsilon^{\alpha_1\nu_1 + \cdots + \alpha_n\nu_n} = 1 \qquad \text{für } \nu_1 + \cdots + \nu_n = m.$$

Insbesondere wäre $\varepsilon^{\alpha_j - \alpha_k(m-1)} = 1$, also $\alpha_j \equiv \alpha_k \pmod{m}$, und folglich nach (15)

$$\frac{\varrho_{1\lambda}}{\varrho_{1\mu}} = \frac{\varrho_{2\lambda}}{\varrho_{2\mu}} = \cdots = \frac{\varrho_{n\lambda}}{\varrho_{n\mu}},$$

so daß $\varrho_{1\lambda}, \ldots, \varrho_{n\lambda}$ und $\varrho_{1\mu}, \ldots, \varrho_{n\mu}$ dieselbe Lösung wären.

---

9) Es sind ja n homogene Gleichungen mit n Unbekannten und mit Unbestimmten als Koeffizienten.

10) Man beachte, daß die $\varrho_{\nu\lambda}$ als Lösungen des Systems (12) von diesen Unbestimmten unabhängig sind; letztere sind daher auch Unbestimmte in bezug auf den Körper der $\varrho_{\nu\lambda}$.

Hiermit ist gezeigt, daß die l Werte $f_n(\varrho_{1\lambda}, \ldots, \varrho_{n\lambda})$ voneinander verschieden sind. Da sie aber alle die Gleichung (13) befriedigen, so muß in dieser das Glied mit der l-ten Potenz von $f_n(\varrho_{1\lambda}, \ldots, \varrho_{n\lambda})$ wirklich vorkommen. Daher ist $A_{0\ldots 0l} \neq 0$, und folglich mit vereinfachter Bezeichnung

$$F(x_0, \ldots, x_n) = A x_n^l + \cdots \qquad (A \neq 0).$$

Hiernach ergibt sich, wenn man Φ durch F teilt, nach Algebra, Satz 71 eine Relation der Form

$$(16) \qquad \Phi(x_0, \ldots, x_n) = F(x_0, \ldots, x_n)\, Q(x_0, \ldots, x_n) + R(x_0, \ldots, x_n),$$

wo Q und R nicht nur in bezug auf x_n, sondern in bezug auf alle x_ν Polynome sind, und wo der Grad von R in bezug auf x_n kleiner als l ist. Wenn nun R nicht identisch verschwände, so könnte man mit Bezug auf R dieselbe Überlegung durchführen wie seither mit Bezug auf F und würde finden, daß R in bezug auf x_n nicht von kleinerem als dem l-ten Grad sein könnte. Daher muß $R = 0$ sein, und aus (16) folgt, daß Φ durch F teilbar ist. W. z. b. w.

§ 4.

Anwendung auf rationale Flächen.

Satz 7. *Das rationale Gebilde*

$$(\mathrm{A}) \qquad x_\nu = f_\nu(\varrho_1, \ldots, \varrho_n) \qquad (\nu = 0, \ldots, n)$$

ist, wenn die homogenen Polynome m-ten Grades f_ν keine gemeinsame Nullstelle haben[11]*, identisch mit der algebraischen Fläche $F(x_0, \ldots, x_n) = 0$, wo F das in Satz 2 eingeführte und nach Satz 3 nicht identisch verschwindende homogene Polynom ist.*

Der Satz bedarf keines Beweises mehr, da er nur die geometrisierte Formulierung von Satz 5 ist. Der Satz besagt, wie zur Vermeidung von Irrtümern ausdrücklich bemerkt sei, nur, daß jeder Punkt des rationalen Gebildes auf der Fläche $F = 0$ liegt und daß umgekehrt jeder Punkt dieser Fläche auch dem rationalen Gebilde angehört, d. h. daß seine Koordinaten sich in der Gestalt (A) darstellen lassen. Dagegen wird nicht behauptet, daß diese Darstellung etwa nur auf *eine* Art möglich sei; sie kann für einzelne oder auch für alle Flächenpunkte auf mehrere Arten möglich sein, wobei proportionale Darstellungen, also eine Darstellung durch die Parameterwerte $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ und eine zweite durch $\varepsilon\varrho_1, \ldots, \varepsilon\varrho_n$, unter ε eine m-te Einheitswurzel verstanden, natürlich nicht als verschieden anzusehen sind. Von näheren Untersuchungen in dieser Richtung, die an sich sehr wünschens-

[11]) Sie sind dann von selbst relativ prim, so daß diese in § 1 erhobene Forderung hier nicht eigens gestellt zu werden braucht.

wert wären, müssen wir in dieser Arbeit absehen. Bemerkt sei nur, daß die Anzahl der Darstellungen in der Form (A) sich durchaus nicht mit der Vielfachheit des betreffenden Flächenpunktes im Sinne der algebraischen Geometrie zu decken braucht.

Satz 8. *Unter den Voraussetzungen von Satz 7 zerfällt die Fläche $F = 0$ nie in zwei verschiedene algebraische Flächen; wohl aber kann sie eine im Sinne der algebraischen Geometrie mehrfach zählende Fläche sein. Die Ordnung der (einfach gezählten) Fläche ist gleich m^{n-1} oder ein Teiler von m^{n-1}. Insbesondere im allgemeinen Fall, d. h. wenn die Koeffizienten der Polynome f_ν Unbestimmte sind, ist die Fläche nur einfach zählend und hat die Ordnung m^{n-1}.*

Das ergibt sich unmittelbar aus Satz 6.

Beispiel I. $\quad f_0 = \varrho_1^2, \quad f_1 = \varrho_2^2, \quad f_2 = a\varrho_1^2 + b\varrho_1\varrho_2 + c\varrho_2^2.$

Hier ist $m = 2$, $n = 2$ und die Polynome sind ohne gemeinsame Nullstelle. Da $n = 2$ ist, läßt sich die Resultante P als Sylvestersche Determinante schreiben:

$$\mathsf{P} = R\Big(\underset{\varrho_1,\qquad\qquad\qquad\qquad \varrho_2}{x_0\varrho_2^2 - x_1\varrho_1^2, \quad x_0(a\varrho_1^2 + b\varrho_1\varrho_2 + c\varrho_2^2) - x_2\varrho_1^2}\Big)$$

$$= \begin{vmatrix} -x_1 & 0 & x_0 & 0 \\ 0 & -x_1 & 0 & x_0 \\ a x_0 - x_2 & b x_0 & c x_0 & 0 \\ 0 & a x_0 - x_2 & b x_0 & c x_0 \end{vmatrix} = x_0^2\,[(a x_0 + c x_1 - x_2)^2 - b^2 x_0 x_1].$$

F ergibt sich nach Abspaltung des Faktors x_0^2; also ist

$$F = (a x_0 + c x_1 - x_2)^2 - b^2 x_0 x_1.$$

Falls $b \neq 0$, ist F irreduzibel und die Fläche (Kurve) von zweiter Ordnung. Jeder Punkt der Kurve läßt sich auf genau *eine* Art in der Gestalt

$$x_0 = \varrho_1^2, \quad x_1 = \varrho_2^2, \quad x_2 = a\varrho_1^2 + b\varrho_1\varrho_2 + c\varrho_2^2$$

darstellen. Falls $b = 0$, ist F die zweite Potenz eines linearen Polynoms, die Kurve also von erster Ordnung. Jeder Punkt der Kurve läßt sich auf *zwei* Arten in der Gestalt

$$x_0 = \varrho_1^2, \quad x_1 = \varrho_2^2, \quad x_2 = a\varrho_1^2 + c\varrho_2^2$$

darstellen, außer den beiden Punkten $0, 1, c$ und $1, 0, a$, die nur *eine* Darstellung zulassen.

Beispiel II. $\quad f_0 = \varrho_1^2, \quad f_1 = \varrho_1\varrho_2, \quad f_2 = \varrho_2^2, \quad f_3 = \varrho_3^2.$

Hier ist $m = 2$, $n = 3$ und die Polynome sind wieder ohne gemeinsame Nullstelle. Nach den Rechenregeln für Resultanten (Algebra, S. 221 f. und Satz 148) findet man

$$\begin{aligned}
\mathsf{P} &= R\begin{pmatrix} x_0\varrho_1\varrho_2 - x_1\varrho_1^2, & x_0\varrho_2^2 - x_2\varrho_1^2, & x_0\varrho_3^2 - x_3\varrho_1^2 \\ \varrho_1 & , \quad \varrho_2 & , \quad \varrho_3 \end{pmatrix} \\
&= \prod_{\varepsilon,\eta} R\begin{pmatrix} \varrho_1, & \sqrt{x_0}\,\varrho_2 - \varepsilon\sqrt{x_2}\,\varrho_1, & \sqrt{x_0}\,\varrho_3 - \eta\sqrt{x_3}\,\varrho_1 \\ \varrho_1, & \varrho_2 & , \quad \varrho_3 \end{pmatrix} \times \\
&\times \prod_{\varepsilon,\eta} R\begin{pmatrix} x_0\varrho_2 - x_1\varrho_1, & \sqrt{x_0}\,\varrho_2 - \varepsilon\sqrt{x_2}\,\varrho_1, & \sqrt{x_0}\,\varrho_3 - \eta\sqrt{x_3}\,\varrho_1 \\ \varrho_1 & , \quad \varrho_2 & , \quad \varrho_3 \end{pmatrix} \quad (\varepsilon, \eta = \pm 1) \\
&= \prod_{\varepsilon,\eta} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\varepsilon\sqrt{x_2} & \sqrt{x_0} & 0 \\ -\eta\sqrt{x_3} & 0 & \sqrt{x_0} \end{vmatrix} \cdot \prod_{\varepsilon,\eta} \begin{vmatrix} -x_1 & x_0 & 0 \\ -\varepsilon\sqrt{x_2} & \sqrt{x_0} & 0 \\ -\eta\sqrt{x_3} & 0 & \sqrt{x_0} \end{vmatrix} \\
&= x_0^4 \cdot (x_0^3\,x_2 - x_0^2\,x_1^2)^2.
\end{aligned}$$

F ergibt sich nach Abspaltung des Faktors x_0^8; also ist

$$F = (x_0 x_2 - x_1^2)^2.$$

F ist die zweite Potenz eines irreduziblen Polynoms zweiten Grades; die Fläche ist der Kegel $x_0 x_2 - x_1^2 = 0$ (vgl. auch S. 470, Beispiel I). Jeder Punkt des Kegels läßt sich auf *zwei* Arten in der Gestalt

$$x_0 = \varrho_1^2, \quad x_1 = \varrho_1\varrho_2, \quad x_2 = \varrho_2^2, \quad x_3 = \varrho_3^2$$

darstellen, mit Ausnahme der Kegelspitze 0, 0, 0, 1 und der Schnittpunkte mit der Ebene $x_3 = 0$, die nur je *eine* Darstellung zulassen.

Die Beispiele dienen zur Illustration unserer Sätze und der verschiedenen vorkommenden Fälle. Die Elimination selbst ließe sich natürlich auch viel einfacher durchführen.

§ 5.

Andere Gewinnung des Polynoms $F(x_0, \ldots, x_n)$.

Bei der Wichtigkeit des Polynoms F wird man den Wunsch haben, zu ihm zu gelangen ohne den Umweg über die Resultante P, da die Berechnung einer Resultante für $n > 2$ bekanntlich eine äußerst komplizierte Sache ist. Dabei wird es natürlich erlaubt sein, die Koeffizienten der f_ν als Unbestimmte vorauszusetzen. Alsdann hat aber nach Satz 5 das Polynom $F(x_0, \ldots, x_n)$ die Eigenschaft, daß $F(f_0, \ldots, f_n) = 0$ ist, und beim Beweis des zweiten Teiles von Satz 6 ergab sich, daß jedes Polynom Φ mit derselben Eigenschaft durch F teilbar ist. Daher ist F durch diese Eigenschaft und durch seinen Grad m^{n-1} bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt.

Nun habe ich kürzlich gerade die Existenz eines solchen Polynoms auf ganz andere Art bewiesen [12]) und dieser Beweis enthält zugleich eine Methode zur Herstellung des Polynoms. Das Verfahren ist folgendes:

Bezeichnet man die Potenzprodukte

$$\varrho_1^{r_1}\varrho_2^{r_2}\ldots\varrho_n^{r_n}$$

$$\text{für } 0 \leqq r_\nu \leqq m-1, \quad r_1+r_2+\cdots+r_n \equiv 0 \pmod m,$$

deren Anzahl gleich $m^{n-1} = l$ ist, in irgendeiner Reihenfolge mit $U_1, \ldots, U_l$, so kann man l^2 Polynome $\Phi_{\lambda\mu}(x_1, \ldots, x_n)$ so bestimmen, daß die Identitäten gelten:

$$f_0 U_\lambda = \sum_{\mu=1}^{l} \Phi_{\lambda\mu}(f_1, \ldots, f_n)\, U_\mu \qquad (\lambda = 1, \ldots, l), \tag{17}$$

woraus folgt:

$$\begin{vmatrix} \Phi_{11}-f_0 & \Phi_{12} & \ldots & \Phi_{1l} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Phi_{l1} & \Phi_{l2} & \ldots & \Phi_{ll}-f_0 \end{vmatrix} = 0. \tag{18}$$

Die Polynome $\Phi_{\lambda\mu}$, d. h. ihre Koeffizienten, ergeben sich dabei aus einem linearen Gleichungssystem mit ebensoviel Gleichungen wie Unbekannten, und die bei der Auflösung auftretende Nennerdeterminante ist von 0 verschieden. Die Relation (18) ist in bezug auf die f_ν homogen vom Grad l und ist daher, von einem konstanten Faktor abgesehen, gerade die Relation $F(f_0, \ldots, f_n) = 0$.

In Spezialfällen, wenn die Koeffizienten der f_ν keine Unbestimmte sind, lassen sich die $\Phi_{\lambda\mu}$ unter Umständen viel einfacher ermitteln. Aber es kann auch sein, daß die Berechnung unmöglich wird, weil die erwähnte Nennerdeterminante gleich 0 ist. Sie ist jedoch gewiß von 0 verschieden, wenn für $\nu = 1, \ldots, n$ der Koeffizient a_ν von ϱ_ν^m in f_ν von 0 verschieden, und zwar eine Unbestimmte ist. Das kann oft schon, wenn es nicht von vornherein der Fall ist, durch Umnumerieren der f_ν erreicht werden. Wenn nicht, so kann man die fehlenden Glieder zunächst mit Unbestimmten als Koeffizienten ergänzen, mit diesen die Rechnung durchführen und im Endresultat die Unbestimmten spezialisieren. Denn die Koeffizienten von F sind, wie sich aus der Definition von F ergibt, mit ganzzahligen Koeffizienten versehene Polynome der Koeffizienten der f_ν; man bekommt also F für beliebig spezialisierte f_ν, indem man die Rechnung zunächst mit Unbestimmten als Koeffizienten irgendwie durchführt und im Endresultat die Spezialisierung vornimmt.

Beispiel. $f_0 = \varrho_1^2, \quad f_1 = \varrho_1\varrho_2, \quad f_2 = \varrho_2^2, \quad f_3 = \varrho_3^2.$

[12]) In § 3 der in Fußnote [3]) zitierten Arbeit.

Die Potenzprodukte U_λ sind hier: 1, $\varrho_1\varrho_2$, $\varrho_1\varrho_3$, $\varrho_2\varrho_3$. In f_1 fehlt das Glied mit ϱ_1^2. Nimmt man aber eine Umnumerierung vor, indem man f_0 und f_1 ihre Rollen tauschen läßt, so hat man das Gewünschte, und die Identitäten (17) sind ohne weiteres hinzuschreiben:

$$\begin{aligned}
f_1\cdot 1 &= 0\cdot 1 + 1\cdot\varrho_1\varrho_2 + 0\cdot\varrho_1\varrho_3 + 0\cdot\varrho_2\varrho_3,\\
f_1\cdot\varrho_1\varrho_2 &= f_0f_2\cdot 1 + 0\cdot\varrho_1\varrho_2 + 0\cdot\varrho_1\varrho_3 + 0\cdot\varrho_2\varrho_3,\\
f_1\cdot\varrho_1\varrho_3 &= 0\cdot 1 + 0\cdot\varrho_1\varrho_2 + 0\cdot\varrho_1\varrho_3 + f_0\cdot\varrho_2\varrho_3,\\
f_1\cdot\varrho_2\varrho_3 &= 0\cdot 1 + 0\cdot\varrho_1\varrho_2 + f_2\cdot\varrho_1\varrho_3 + 0\cdot\varrho_2\varrho_3.
\end{aligned}$$

Also kommt

$$\begin{vmatrix} -f_1 & 1 & 0 & 0\\ f_0f_2 & -f_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -f_1 & f_0\\ 0 & 0 & f_2 & -f_1 \end{vmatrix} = 0,$$

oder $(f_1^2 - f_0f_2)^2 = 0$. In der Tat wurde auch in § 4 bei diesem Beispiel gefunden: $F = (x_0x_2 - x_1^2)^2$.

Ohne Umnumerierung kann man so verfahren, daß man zunächst das allgemeinere Polynomsystem

$$f_0 = \varrho_1^2,\quad f_1 = a\varrho_1^2 + \varrho_1\varrho_2,\quad f_2 = \varrho_2^2,\quad f_3 = \varrho_3^2$$

mit der Unbestimmten a betrachtet. Um ganz sicher zu gehen, könnte man $f_2 = b\varrho_2^2$, $f_3 = c\varrho_3^2$ setzen; doch sieht man leicht voraus, daß die Rechnung auch gehen muß, wenn man von Anfang an b und c zu 1 spezialisiert. Das System (17) ist jetzt das folgende:

$$\begin{aligned}
f_0\cdot 1 &= \frac{f_1}{a}\cdot 1 - \frac{1}{a}\cdot\varrho_1\varrho_2 \quad * \quad *,\\
f_0\cdot\varrho_1\varrho_2 &= -\frac{f_1f_2}{a^2}\cdot 1 + \frac{af_1+f_2}{a^2}\cdot\varrho_1\varrho_2 \quad * \quad *,\\
f_0\cdot\varrho_1\varrho_3 &= \quad * \quad * \quad + \frac{af_1+f_2}{a^2}\cdot\varrho_1\varrho_3 - \frac{f_1}{a^2}\cdot\varrho_2\varrho_3,\\
f_0\cdot\varrho_2\varrho_3 &= \quad * \quad * \quad - \frac{f_2}{a}\cdot\varrho_1\varrho_3 + \frac{f_1}{a}\cdot\varrho_2\varrho_3.
\end{aligned}$$

Also kommt

$$\begin{vmatrix} \frac{f_1}{a} - f_0 & -\frac{1}{a} & 0 & 0\\ -\frac{f_1f_2}{a^2} & \frac{af_1+f_2}{a^2} - f_0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{af_1+f_2}{a^2} - f_0 & -\frac{f_1}{a^2}\\ 0 & 0 & -\frac{f_2}{a} & \frac{f_1}{a} - f_0 \end{vmatrix} = 0,$$

oder ausgerechnet:

$$\frac{1}{a^6}\,[(f_1 - a\,f_0)\,(f_2 + a\,f_1 - a^2 f_0) - f_1 f_2]^2 = 0.$$

Nach Multiplikation mit a^4 (nicht erst mit a^6) läßt sich der Nenner wegheben und man erhält:

$$(f_1^2 - f_0 f_2 - 2\,a f_0 f_1 + a^2 f_0^2)^2 = 0.$$

Wenn man jetzt a zu 0 spezialisiert, kommt wieder wie vorhin: $(f_1^2 - f_0 f_2)^2 = 0$.

Eine elegante Darstellung gestattet das Polynom F im Falle $n = 2$. Setzt man nämlich in diesem Falle

$$\begin{aligned} f_0 &= a_0 \varrho_1^m + a_1 \varrho_1^{m-1} \varrho_2 + \cdots + a_m \varrho_2^m, \\ f_1 &= b_0 \varrho_1^m + b_1 \varrho_1^{m-1} \varrho_2 + \cdots + b_m \varrho_2^m, \\ f_2 &= c_0 \varrho_1^m + c_1 \varrho_1^{m-1} \varrho_2 + \cdots + c_m \varrho_2^m, \end{aligned}$$

so läßt sich die Resultante P als $(2\,m)$-reihige Sylvestersche Determinante schreiben. Diese kann man leicht durch Ränderung in eine $(3\,m)$-reihige Determinante verwandeln, von der sich der Faktor x_0^m abspalten läßt, so daß gerade F übrigbleibt. Man erhält so die Darstellung

$$F(x_0, x_1, x_2) = \begin{array}{|ccc|l}
\overbrace{}^{m} & \overbrace{}^{m+1} & \overbrace{}^{m-1} & \\
x_0\ \ 0\ \ldots\ 0 & a_0\ \ a_1\ \ldots\ a_m & 0\ \ldots\ 0 & 1 \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \\
x_1\ \ 0\ \ldots\ 0 & b_0\ \ b_1\ \ldots\ b_m & 0\ \ldots\ 0 & m+1 \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \\
x_2\ \ 0\ \ldots\ 0 & c_0\ \ c_1\ \ldots\ c_m & 0\ \ldots\ 0 & 2m+1 \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots &
\end{array},$$

und zwar ist diese Determinante so gebildet, daß nach der angeschriebenen ersten, $(m+1)$-ten und $(2\,m+1)$-ten Zeile immer noch $(m-1)$-mal dieselbe Zeile kommt, aber jedesmal um eine weitere Stelle zyklisch nach rechts verschoben wie bei einer Sylvesterschen Determinante. Man sieht auch leicht direkt, daß die obige Determinante die das Polynom F charakterisierenden Eigenschaften hat: Sie ist in bezug auf die x_ν ein homogenes Polynom m-ten Grades [13]), und wenn man x_ν durch f_ν ersetzt, verschwindet sie; denn wenn man alsdann die Spalten der Reihe nach mit

$$\varrho_1^{m-1},\ \varrho_1^{m-2}\varrho_2, \ldots, \varrho_2^{m-1},\ -\varrho_1^{2m-1},\ -\varrho_1^{2m-2}\varrho_2, \ldots, -\varrho_2^{2m-1}$$

multipliziert und zueinander addiert, kommt in jeder Zeile 0.

---

[13]) Nicht etwa identisch 0; denn z. B. der Koeffizient von x_0^m ist die Resultante von f_1 und f_2, verschwindet also gewiß nicht, wenn die Koeffizienten der f_ν Unbestimmte sind.

§ 6.

Eine weitere Resultante.

Wenn die f_ν eine gemeinsame Nullstelle haben, so verschwindet F nach Satz 3 identisch, so daß man auf die bisherige Weise zu keiner Flächengleichung gelangt. Zwar gibt es nach Satz 5 der in Fußnote [3]) erwähnten Arbeit auch in diesem Falle eine homogene Identität vom Grad m^{n-1} zwischen den f_ν. Aber wir werden jetzt auf ganz andere Art sehen, daß es sogar *eine Identität von geringerem Grad gibt, so daß die Ordnung der Fläche sich erniedrigt.* Dazu benötigen wir einige vorbereitende Sätze. Unerledigt wird allerdings der Fall bleiben, daß die f_ν *unendlich viele* gemeinsame Nullstellen haben.

Die n homogenen Polynome m-ten Grades

$$(19) \qquad f_1(\varrho_1, \ldots, \varrho_n), \quad \ldots, \quad f_n(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$$

mögen endlich viele gemeinsame Nullstellen haben (eventuell gar keine). Sind dann $u_1, \ldots, u_n$ Unbestimmte, so haben die $n+1$ Polynome

$$f_1(\varrho_1, \ldots, \varrho_n), \quad \ldots, \quad f_n(\varrho_1, \ldots, \varrho_n), \quad \sum u_\nu \varrho_\nu,$$

wo die Summe nach ν von 1 bis n läuft, offenbar gar keine gemeinsame Nullstelle. Dann haben aber auch, wenn $x_1, \ldots, x_n, y$ weitere Unbestimmte sind, die $n+1$ homogenen Polynome von $\varrho_1, \ldots, \varrho_n, \sigma$

$$(20) \qquad f_1 - x_1\sigma^m, \quad \ldots, \quad f_n - x_n\sigma^m, \quad \sum u_\nu \varrho_\nu - y\sigma$$

keine gemeinsame Nullstelle. Denn nach dem bereits Gesagten haben sie jedenfalls keine mit $\sigma = 0$. Hätten sie eine andere, so könnte man $\sigma = 1$ annehmen, und das Gleichungssystem

$$f_1 = x_1, \quad \ldots, \quad f_n = x_n, \quad \sum u_\nu \varrho_\nu = y$$

hätte eine Lösung. Aber zwischen den $n+1$ links stehenden Polynomen besteht nach Algebra, Satz 56 eine Abhängigkeit; die gleiche Abhängigkeit müßte dann zwischen $x_1, \ldots, x_n, y$ bestehen, während das doch Unbestimmte sind.

Nachdem hiermit gezeigt ist, daß die Polynome (20) keine gemeinsame Nullstelle haben, folgt aus Algebra, Satz 139, daß die Resultante

$$(21) \qquad \mathsf{T} = R\begin{pmatrix} f_1 - x_1\sigma^m, & \ldots, & f_n - x_n\sigma^m, & \sum u_\nu \varrho_\nu - y\sigma \\ \varrho_1 \quad , & \ldots, & \varrho_n \quad , & \sigma \end{pmatrix}$$

nicht verschwindet. Daraus folgt aber weiter (Algebra, S. 290), daß das Gleichungssystem

$$(22) \qquad f_1 - x_1\sigma^m = 0, \quad \ldots, \quad f_n - x_n\sigma^m = 0$$

nur endlich viele Lösungen hat, und wir gewinnen den

Satz 9. *Wenn die n homogenen Polynome* (19) *vom Grad m nur endlich viele gemeinsame Nullstellen haben (eventuell gar keine), so hat auch, wenn $x_1, \ldots, x_n$ Unbestimmte sind, das homogene Gleichungssystem* (22) *mit den Unbekannten $\varrho_1, \ldots, \varrho_n, \sigma$ nur endlich viele Lösungen.*

Die Anzahl der Lösungen des Systems (22) ist nach dem Bézoutschen Satz, wenn jede ihrer Multiplizität entsprechend gezählt wird, gleich m^n (Algebra, Satz 145). Unter diesen finden sich, falls die Polynome (19) wirklich gemeinsame Nullstellen haben, auch Lösungen mit $\sigma = 0$, und die zugehörigen Systeme $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ sind dann gerade diese gemeinsamen Nullstellen. Das gibt Veranlassung zu folgender

Definition. *Als Pseudomultiplizität einer gemeinsamen Nullstelle $\varrho_1^0, \ldots, \varrho_n^0$ der Polynome* (19) *bezeichnen wir die* (*Bézoutsche*) *Multiplizität der Lösung $\varrho_1^0, \ldots, \varrho_n^0, 0$ des Gleichungssystems* (22), *bei dem $x_1, \ldots, x_n$ Unbestimmte sind.*

Bemerkung. Der allgemein anerkannte Multiplizitätsbegriff, den wir hier durch den Namen Bézout kennzeichnen, bezieht sich immer auf den Fall, daß die Anzahl der homogenen Gleichungen um 1 kleiner ist als die der Unbekannten. Es gibt aber auch verschiedene Multiplizitätsdefinitionen, die auf das Gleichungssystem passen, das durch Nullsetzen der Polynome (19) entsteht, und manche Mathematiker mögen vielleicht noch ihre privaten Vorstellungen von diesem Begriff haben. Was wir hier als „Pseudomultiplizität" definieren, deckt sich damit nicht, sondern hat oft (vielleicht immer) einen größeren Wert als die Multiplizität. Im Falle $n = 2$ hat z. B. das Gleichungssystem

$$(\varrho_1 - \varrho_2)^m = 0, \qquad (\varrho_1 - \varrho_2)(\varrho_1 + \varrho_2)^{m-1} = 0$$

nur die eine Lösung $\varrho_1 = \varrho_2$, der wohl niemand eine andere Multiplizität als 1 zuerkennen wird; die Pseudomultiplizität ist aber m. Das System

$$(\varrho_1 - \varrho_2)^m = 0, \quad (\varrho_1 - \varrho_2)^m = 0 \quad \text{(zweimal dieselbe Gleichung)}$$

hat wieder nur die eine Lösung $\varrho_1 = \varrho_2$, diesmal mit der Multiplizität m; die Pseudomultiplizität ist aber m^2.

Ist nun die Anzahl der gemeinsamen Nullstellen der Polynome (19), wenn jede ihrer Pseudomultiplizität entsprechend gezählt wird, gleich p, wobei dann $0 \leqq p \leqq m^n$ ist, und bezeichnet man diese Nullstellen mit

$$\varrho_{1\lambda}^0, \ldots, \varrho_{n\lambda}^0 \qquad (\lambda = 1, \ldots, p), \tag{23}$$

so hat das System (22), wenn jede Lösung ihrer (Bézoutschen) Multiplizität entsprechend gezählt wird, noch $m^n - p$ Lösungen

$$\varrho_{1\lambda}^*, \ldots, \varrho_{n\lambda}^*, \sigma_\lambda \qquad (\lambda = 1, \ldots, m^n - p). \tag{24}$$

bei denen $\sigma_\lambda \neq 0$ ist, und bei geeigneter Wahl des in einer Lösung steckenden willkürlichen Faktors ergibt sich für die Resultante T, wenn wieder $m^{n-1} = l$ gesetzt wird, der Ausdruck (Algebra, S. 290)

$$(25)\qquad \mathsf{T} = \prod_{\lambda=1}^{p} (\Sigma u_\nu \varrho^0_{\nu\lambda}) \cdot \prod_{\lambda=1}^{l\,m-p} (\Sigma u_\nu \varrho^*_{\nu\lambda} - y\sigma_\lambda),$$

wobei im Falle $p = 0$ das erste, im Falle $p = lm$ das zweite Produkt durch 1 zu ersetzen ist.

Andererseits ist aber T ein Polynom der Gestalt

$$(26)\qquad \mathsf{T} = \Sigma\, \Phi_{\lambda_1 \ldots \lambda_n \mu} (u_1, \ldots, u_n)\, x_1^{\lambda_1} \ldots x_n^{\lambda_n} y^\mu,$$

wobei nach Algebra, Satz 121 in jedem Glied

$$(26\text{a})\qquad m\lambda_1 + m\lambda_2 + \cdots + m\lambda_n + \mu = m^n$$

und wobei $\Phi_{\lambda_1 \ldots \lambda_n \mu}$ nach Algebra, Satz 120 ein homogenes Polynom der u_ν vom Grad $m^n - \mu$ oder identisch 0 ist. Wegen (26a) sind alle μ durch m teilbar; T ist also ein Polynom von y^m, und aus (25) folgt dann, daß auch p durch m teilbar ist: $p = qm$; es ist dann $0 \leqq q \leqq l$. Aus (25) folgt weiter, daß sich in (26) ein homogenes in Linearfaktoren zerlegbares Polynom der u_ν allein vom Grad $p = qm$ abspaltet, so daß man für T schließlich die folgende Gestalt erhält:

$$(27)\qquad \mathsf{T} = \Phi(u_1, \ldots, u_n)\, [\Omega_0 y^{m(l-q)} + \Omega_1 y^{m(l-q-1)} + \cdots + \Omega_{l-q}].$$

Dabei ist $\Phi(u_1, \ldots, u_n)$ einfach das erste Produkt in Formel (25), also homogen vom Grad $p = qm$; speziell für $p = 0$, also $q = 0$ ist $\Phi = 1$. Ferner ist

$$\Omega_\lambda = \Omega_\lambda (u_1, \ldots, u_n;\ x_1, \ldots, x_n)$$

entweder identisch 0 oder in bezug auf die u_ν homogen vom Grad λm und in bezug auf die x_ν homogen vom Grad $q + \lambda$. Speziell Ω_0 ist nicht identisch 0, sondern also ein Polynom von $x_1, \ldots, x_n$ allein, homogen vom Grad q:

$$(28)\qquad \Omega_0 = \Omega_0 (x_1, \ldots, x_n).$$

Von jetzt an bis § 8 einschließlich setzen wir $q < l$, also $p < lm$ voraus, so daß in (25) das zweite Produkt nicht durch 1 zu ersetzen ist. In diesem Produkt muß dann, da T ein Polynom von y^m ist, neben dem Faktor

$$\Sigma\, u_\nu \varrho^*_{\nu\lambda} - y\sigma_\lambda$$

stets auch der Faktor

$$\Sigma\, u_\nu \varrho^*_{\nu\lambda} - y\sigma_\lambda \varepsilon,$$

wo ε eine beliebige m-te Einheitswurzel ist, mit der gleichen Vielfachheit vorkommen. Es ist ja auch von vornherein klar, daß das System (22) neben der Lösung (24) stets auch die Lösung

$$\varrho^*_{1\lambda}, \ldots, \varrho^*_{n\lambda}, \sigma_\lambda \varepsilon$$

hat; darüber hinaus sehen wir aber jetzt, daß die m zu den verschiedenen m-ten Einheitswurzeln ε gehörenden Lösungen dieselbe Multiplizität haben. Faßt man jetzt im zweiten Produkt von (25) je m Faktoren, bei denen die σ_λ sich nur um m-te Einheitswurzeln unterscheiden, zusammen und setzt $\varrho^*_{\nu\lambda}\sigma_\lambda^{-1} = \varrho_{\nu\lambda}$, so kommt

$$\mathsf{T} = \Phi(u_1, \ldots, u_n)\, \Omega_0(x_1, \ldots, x_n) \prod_{\lambda=1}^{l-q} [y^m - (\Sigma\, u_\nu \varrho_{\nu\lambda})^m], \tag{29}$$

wobei Φ und Ω_0 dieselben Polynome wie in (27), (28) sind. Nach der Bedeutung der $\varrho_{\nu\lambda}$ ist natürlich

$$f_\nu(\varrho_{1\lambda}, \ldots, \varrho_{n\lambda}) = x_\nu \quad (\nu = 1, \ldots, n;\ \lambda = 1, \ldots, l-q). \tag{30}$$

Ein Vergleich der Formeln (27) und (29) lehrt, daß die symmetrischen Grundfunktionen der $l-q$ Größen

$$\Big(\sum_{\nu=1}^n u_\nu \varrho_{\nu 1}\Big)^m, \quad \Big(\sum_{\nu=1}^n u_\nu \varrho_{\nu 2}\Big)^m, \quad \ldots, \quad \Big(\sum_{\nu=1}^n u_\nu \varrho_{\nu, l-q}\Big)^m$$

bekannt sind. Daher sind auch die Potenzsummen dieser Größen

$$\sum_{\lambda=1}^{l-q}\Big(\sum_{\nu=1}^n u_\nu \varrho_{\nu\lambda}\Big)^{rm} \qquad (r = 1, 2, 3, \ldots)$$

und folglich die Potenzproduktsummen

$$\sum_{\lambda=1}^{l-q} \varrho_{1\lambda}^{\mu_1}\varrho_{2\lambda}^{\mu_2}\ldots\varrho_{n\lambda}^{\mu_n} \quad (\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n = rm) \tag{31}$$

bekannt; und zwar sind die letzteren rationale Funktionen von $x_1, \ldots, x_n$ mit dem Nenner Ω_0^r.

Wenn die Koeffizienten der f_ν Unbestimmte sind, die wir vorübergehend mit $\xi_1, \ldots, \xi_k$ bezeichnen wollen, so haben die f_ν keine gemeinsame Nullstelle; daher ist in diesem Falle

$$p = 0, \quad q = 0, \quad \Phi(u_1, \ldots, u_n) = 1, \quad \Omega_0(x_1, \ldots, x_n) = \text{konstant}.$$

Alsdann lehrt aber die Formel (29), wenn man die Resultante T speziell für $y = 0$ mit T_0 bezeichnet, daß T_0 die m-te Potenz eines Polynoms der u_ν ist:

$$\mathsf{T}_0 = \mathsf{T}_0(u_1, \ldots, u_n) = [V(u_1, \ldots, u_n)]^m.$$

Nach der Definitionsformel (21) sind die Koeffizienten von T_0 (vielleicht aber nicht die von V) Polynome der Unbestimmten $\xi_1, \ldots, \xi_k$. Sie erfüllen natürlich, da T_0 eine m-te Potenz ist, die Bedingungsgleichungen, die nach dem unten in § 10 bewiesenen Hilfssatz dafür notwendig sind. Diese Bedingungsgleichungen sind aber Identitäten in den Unbestimmten $\xi_1, \ldots, \xi_k$ und bleiben daher erfüllt, wenn diese Unbestimmten nachträglich spezialisiert werden. Da sie auch hinreichend sind, muß T_0 auch nach der Spezialisierung eine m-te

Potenz bleiben, so daß in Formel (29) für $y = 0$ stets eine m-te Potenz steht. Da dann aber das Produkt bereits eine m-te Potenz ist, ergibt sich, daß auch Φ eine sein muß:

$$\Phi(u_1, \ldots, u_n) = [\Psi(u_1, \ldots, u_n)]^m. \tag{32}$$

In (25) ist daher das erste Produkt, welchem ja Φ gleich war, eine m-te Potenz, so daß die Faktoren zu je m einander gleich sind. Daraus folgt

Satz 10. *Die Pseudomultiplizität einer gemeinsamen Nullstelle der Polynome* (19) *ist stets durch m teilbar.*

§ 7.

Fortsetzung.

Unter Beibehaltung der Bezeichnungen des vorigen Paragraphen sei $f_0(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ ein weiteres homogenes Polynom m-ten Grades und sei x_0 eine weitere Unbestimmte. Dann gibt es (vgl. den Beweis von Satz 1) ein homogenes absolut irreduzibles Polynom $P(x_0, \ldots, x_n)$ derart, daß $P(f_0, \ldots, f_n)$ als Polynom der ϱ_ν identisch verschwindet. P sei etwa vom Grad N, also

$$P(x_0, \ldots, x_n) = \sum C_{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_n} x_0^{\lambda_0} x_1^{\lambda_1} \ldots x_n^{\lambda_n} \quad (\lambda_0 + \cdots + \lambda_n = N), \tag{33}$$

$$P(f_0, \ldots, f_n) = 0. \tag{34}$$

Wir wollen jetzt annehmen, daß in P das Glied mit x_0^N wirklich vorkommt, daß also $C_{N0\ldots0} \neq 0$ ist. Aus der Identität (34) folgt dann, daß f_0 an den gemeinsamen Nullstellen von $f_1, \ldots, f_n$ ebenfalls verschwindet. Da die Potenzproduktsummen (31) rationale Funktionen von $x_1, \ldots, x_n$ sind, so ist auch das Produkt

$$\prod_{\lambda=1}^{l-q} [x_0 - f_0(\varrho_{1\lambda}, \ldots, \varrho_{n\lambda})] \tag{35}$$

ein Polynom von x_0, dessen Koeffizienten rationale Funktionen von $x_1, \ldots, x_n$ sind.

Aus (34) folgt mit Rücksicht auf (30) insbesondere

$$P(f_0(\varrho_{1\lambda}, \ldots, \varrho_{n\lambda}), x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad (\lambda = 1, \ldots, l-q).$$

Daher ist $P(x_0, \ldots, x_n)$ als Polynom von x_0 durch jeden Faktor des Produkts (35) teilbar und eine genügend hohe Potenz von $P(x_0, \ldots, x_n)$ ist durch das ganze Produkt (35) teilbar. Hieraus folgt, da in P das Glied mit x_0^N wirklich vorkommt, daß das Produkt (35) sogar in bezug auf alle x_ν ein Polynom ist (Algebra, Satz 93). Da es Teiler von einer Potenz des homogenen Polynoms P ist, ist es außerdem homogen, und zwar vom Grad $l - q$. Setzt man demgemäß

$$\prod_{\lambda=1}^{l-q} [x_0 - f_0(\varrho_{1\lambda}, \ldots, \varrho_{n\lambda})] = Q(x_0, \ldots, x_n), \tag{36}$$

so ist, da Q ein Teiler von einer Potenz des absolut irreduziblen Polynoms P ist, wegen (34)

(37) $$Q(f_0, \ldots, f_n) = 0.$$

Im Falle $q = 0$, d. h. wenn die Polynome $f_1, \ldots, f_n$ keine gemeinsame Nullstelle haben, ist Q, von einem konstanten Faktor abgesehen, das frühere Polynom F; denn Q hat alsdann die zu Beginn des § 5 für F als charakteristisch erkannten Eigenschaften. Für $q > 0$ wird es eine analoge Rolle spielen.

Nun seien umgekehrt $x'_0, \ldots, x'_n$ irgendwelche Größen, für die

(38) $$Q(x'_0, \ldots, x'_n) = 0$$

ist; außerdem sei aber

(39) $$\Omega_0(x'_1, \ldots, x'_n) \neq 0.$$

Bildet man dann die Resultante

(40) $$\mathsf{T}' = R\begin{pmatrix} f_1 - x'_1\sigma^m, & \ldots, & f_n - x'_n\sigma^m, & \sum u_\nu \varrho_\nu - y\sigma \\ \varrho_1 & , \ldots, & \varrho_n & , \quad \sigma \end{pmatrix},$$

die sich von T nur dadurch unterscheidet, daß die Unbestimmten $x_1, \ldots, x_n$ zu $x'_1, \ldots, x'_n$ spezialisiert sind, so ist nach (27)

(41) $$\mathsf{T}' = \Phi(u_1, \ldots, u_n)\,[\Omega'_0 y^{m(l-q)} + \Omega'_1 y^{m(l-q-1)} + \cdots + \Omega'_{l-q}],$$

wobei $\Omega'_\lambda = \Omega_\lambda(u_1, \ldots, u_n;\ x'_1, \ldots, x'_n)$ ist, wegen (39) also insbesondere

(42) $$\Omega'_0 = \Omega_0(x'_1, \ldots, x'_n) \neq 0.$$

Daher ist $\mathsf{T}' \neq 0$, und daraus folgt, daß das Gleichungssystem

(43) $$f_1 - x'_1\sigma^m = 0, \quad \ldots, \quad f_n - x'_n\sigma^m = 0$$

ebenso wie das System (22) nur endlich viele Lösungen hat. Und zwar hat es, wie der Faktor $\Phi(u_1, \ldots, u_n)$ in (41) lehrt, zunächst die $p = qm$ Lösungen des Systems (22):

(44) $$\varrho^0_{1\lambda}, \ldots, \varrho^0_{n\lambda}, 0 \qquad (\lambda = 1, \ldots, qm).$$

Es hat aber keine weiteren Lösungen mit $\sigma = 0$, weil in der eckigen Klammer von (41) das erste Glied von den u_ν frei ist und nach (42) nicht verschwindet, so daß sich kein weiterer Faktor, der ein Polynom der u_ν allein ist, abspalten läßt. Das System (43) hat also außer den Lösungen (44) nur noch Lösungen, bei denen $\sigma \neq 0$ ist. Da T' nach (41) ein Polynom von y^m ist, so ist analog wie bei dem System (22) neben einer Lösung

$$\varrho'_{1\lambda}, \ldots, \varrho'_{n\lambda}, \sigma_\lambda$$

stets auch die Lösung

$$\varrho'_{1\lambda}, \ldots, \varrho'_{n\lambda}, \sigma_\lambda\varepsilon,$$

wo ε eine beliebige m-te Einheitswurzel ist, mit gleicher Multiplizität vorhanden, und da $\sigma_\lambda \neq 0$ ist, also gleich 1 angenommen werden kann, ergibt sich analog zu (29) die Formel

$$\text{(45)} \qquad \mathsf{T}' = \Phi(u_1, \ldots, u_n)\, \Omega_0(x_1', \ldots, x_n') \prod_{\lambda=1}^{l-q} [y^m - (\Sigma\, u_\nu\, \varrho_{\nu\lambda}')^m].$$

Durch Vergleich von (45) mit (41) erkennt man, daß die Potenzproduktsummen, die entstehen, wenn man in den Potenzproduktsummen (31), die ja rationale Funktionen von $x_1, \ldots, x_n$ mit dem Nenner Ω_0^r waren, die $\varrho_{\nu\lambda}$ durch $\varrho_{\nu\lambda}'$ ersetzt, wieder bekannt sind; man erhält sie einfach, indem man in den erwähnten rationalen Funktionen die x_ν zu x_ν' spezialisiert, was wegen der Voraussetzung (39) möglich ist. Nach (36) ist daher

$$\text{(46)} \qquad \prod_{\lambda=1}^{l-q} [x_0 - f_0(\varrho_{1\lambda}', \ldots, \varrho_{n\lambda}')] = Q(x_0, x_1', \ldots, x_n').$$

Dabei genügen die $\varrho_{\nu\lambda}'$ dem zu (30) analogen Gleichungssystem

$$f_\nu(\varrho_{1\lambda}', \ldots, \varrho_{n\lambda}') = x_\nu' \quad (\nu = 1, \ldots, n;\ \lambda = 1, \ldots, l-q).$$

Für wenigstens einen Wert λ gilt aber außerdem auch die Gleichung

$$f_0(\varrho_{1\lambda}', \ldots, \varrho_{n\lambda}') = x_0',$$

wie ein Vergleich von (46) für den Spezialwert $x_0 = x_0'$ mit (38) lehrt. Die gewonnenen Resultate fassen wir zusammen in dem folgenden Analogon zu Satz 5:

Satz 11. *Die n homogenen Polynome m-ten Grades*

$$f_1(\varrho_1, \ldots, \varrho_n), \quad \ldots, \quad f_n(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$$

mögen qm gemeinsame Nullstellen haben, wobei jede ihrer (stets durch m teilbaren) Pseudomultiplizität entsprechend gezählt ist, und es sei[14]*): $q < m^{n-1}$.*

Wenn dann $f_0(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ ein weiteres homogenes Polynom m-ten Grades ist und wenn zwischen $f_0, f_1, \ldots, f_n$ eine homogene Abhängigkeit von irgendeinem Grad N besteht, bei der das Glied mit f_0^N einen von 0 verschiedenen Koeffizienten hat[15]*), dann ist das in (36) eingeführte Polynom $Q(x_0, \ldots, x_n)$ homogen vom Grad $m^{n-1} - q$. Sein von $x_1, \ldots, x_n$ freies Glied hat einen von 0 verschiedenen Koeffizienten (nämlich offenbar 1) und das Polynom hat die Eigenschaft, daß zwischen den f_ν die Abhängigkeit $Q(f_0, \ldots, f_n) = 0$ besteht.*

Wenn umgekehrt $x_0', \ldots, x_n'$ irgendein Größensystem ist, für welches $Q(x_0', \ldots, x_n') = 0$ ist, so gibt es im allgemeinen (mindestens) ein Größensystem $\varrho_1', \ldots, \varrho_n'$, für welches die Gleichungen gelten:

$$x_\nu' = f_\nu(\varrho_1', \ldots, \varrho_n') \qquad (\nu = 0, \ldots, n).$$

---

[14]) Nach § 6 ist stets $q \leq m^{n-1}$. Der Fall $q = m^{n-1}$ wird in § 9 erledigt.

[15]) Die beim Beweis vorausgesetzte absolute Irreduzibilität von P braucht hier natürlich nicht gefordert zu werden, da man an Stelle von P ja stets einen geeigneten irreduziblen Teiler von P betrachten kann.

Eine Ausnahme besteht höchstens bei solchen Systemen x'_ν, für die auch $\Omega_0(x'_1, \ldots, x'_n) = 0$ ist, wo Ω_0 das in (27), (28) eingeführte homogene Polynom vom Grad q bedeutet.

Auch zu Satz 6 gibt es ein Analogon:

Satz 12. *Unter den Voraussetzungen des ersten Teiles von Satz 11 ist das Polynom $Q(x_0, \ldots, x_n)$ entweder absolut irreduzibel oder eine Potenz eines absolut irreduziblen Polynoms.*

Beweis. Zerlegt man das Polynom Q, falls es reduzibel ist, in irreduzible Faktoren

$$Q(x_0, \ldots, x_n) = \prod_{\lambda=1}^{r} G_\lambda(x_0, \ldots, x_n),$$

so ist nach Satz 11 $\prod G_\lambda(f_0, \ldots, f_n) = 0$; also verschwindet wenigstens einer der Faktoren, etwa

$$G_1(f_0, \ldots, f_n) = 0. \tag{47}$$

Wir setzen $Q = G_1 H$ (also $H = G_2 \ldots G_r$):

$$Q(x_0, x_1, \ldots, x_n) = G_1(x_0, x_1, \ldots, x_n)\, H(x_0, x_1, \ldots, x_n).$$

Läßt man nun $x_1, \ldots, x_n$ als Unbestimmte und spezialisiert x_0 zu x'_0 so, daß

$$H(x'_0, x_1, \ldots, x_n) = 0 \tag{48}$$

ist[16]), so ist auch $Q(x'_0, x_1, \ldots, x_n) = 0$, und folglich gibt es nach Satz 11 ein Größensystem $\varrho'_1, \ldots, \varrho'_n$ derart, daß

$$x'_0 = f_0(\varrho'_1, \ldots, \varrho'_n),$$
$$x_\nu = f_\nu(\varrho'_1, \ldots, \varrho'_n) \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

ist[17]). Nach (47) ist daher

$$G_1(x'_0, x_1, \ldots, x_n) = 0. \tag{49}$$

Aus (48) folgt also allemal (49). Daher muß eine Potenz von $G_1(x_0, \ldots, x_n)$, als Polynom von x_0 allein betrachtet, teilbar sein durch $H(x_0, \ldots, x_n)$. Aber in Q hat das von $x_1, \ldots, x_n$ freie Glied einen von 0 verschiedenen Koeffizienten; die Teiler G_1 und H haben daher dieselbe Eigenschaft, und aus Algebra, Satz 72 folgt dann, daß die genannte Potenz von G_1 auch als Polynom aller x_ν durch H teilbar ist. Die irreduziblen Faktoren von H, d. h. die Polynome $G_2, \ldots, G_r$ sind daher sämtlich mit G_1 äquivalent. Somit ist $Q = c\,G_1^r$, wo c eine Konstante. W. z. b. w.

---

[16]) Das ist möglich, weil in Q und folglich auch in dem Teiler H das von $x_1, \ldots, x_n$ freie Glied einen von 0 verschiedenen Koeffizienten hat, so daß x_0 in H wirklich vorkommt.

[17]) Man beachte, daß ja $x_1, \ldots, x_n$ Unbestimmte sind, so daß der am Schluß von Satz 11 erwähnte Ausnahmefall gewiß nicht vorliegt.

§ 8.

Anwendung auf rationale Flächen.

Satz 13. *Wenn zwischen den $n+1$ homogenen Polynomen m-ten Grades*

$$f_0(\varrho_1, \ldots, \varrho_n),\; f_1(\varrho_1, \ldots, \varrho_n),\; \ldots,\; f_n(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$$

eine homogene Abhängigkeit von irgendeinem Grad N besteht, bei der das Glied mit f_0^N einen von 0 verschiedenen Koeffizienten hat, und wenn speziell die letzten n Polynome genau qm gemeinsame Nullstellen haben [18], *wobei jede ihrer (stets durch m teilbaren) Pseudomultiplizität entsprechend gezählt ist, so liegen die Punkte des rationalen Gebildes*

$$x_\nu = f_\nu(\varrho_1, \ldots, \varrho_n) \qquad (\nu = 0, \ldots, n),$$

falls $q < m^{n-1}$ ist [19], *auf einer nicht zerfallenden algebraischen Fläche, deren Ordnung gleich $m^{n-1} - q$ oder ein Teiler davon ist. Und zwar enthält das Gebilde alle Punkte dieser Fläche außer allenfalls die Schnittpunkte mit einer zweiten (möglicherweise zerfallenden) algebraischen Fläche, deren Ordnung gleich q ist.*

Der Satz ist eine unmittelbare Folge der Sätze 11 und 12. Ausdrücklich sei wieder bemerkt, der Satz besagt nicht, daß die einzelnen Flächenpunkte sich etwa nur auf *eine* Art in der Parameterform darstellen lassen.

Beispiel I (Beispiel III von S. 470 nach Umnumerierung der f_ν).

$$f_0 = \varrho_1 \varrho_2, \quad f_1 = \varrho_1^2, \quad f_2 = \varrho_2^2, \quad f_3 = \varrho_1 \varrho_3.$$

Hier ist $n = 3$, $m = 2$; man findet ohne weiteres die Abhängigkeit zweiten Grades $f_0^2 - f_1 f_2 = 0$, bei der das Glied mit f_0^2 vorkommt. Die Polynome f_1, f_2, f_3 haben nur die eine gemeinsame Nullstelle $\varrho_1 = 0$, $\varrho_2 = 0$. Eine Rechnung ähnlich der auf S. 478 bei Beispiel II ergibt

$$\begin{aligned} \mathsf{T} &= R\begin{pmatrix} \varrho_1^2 - x_1\sigma^2, & \varrho_2^2 - x_2\sigma^2, & \varrho_1\varrho_3 - x_3\sigma^2, & \sum u_\nu \varrho_\nu - y\sigma \\ \varrho_1, & \varrho_2, & \varrho_3, & \sigma \end{pmatrix} \\ &= u_3^4 \{x_1^2 y^4 - 2x_1 [(u_1x_1 + u_3x_3)^2 + u_2^2 x_1 x_2]\, y^2 + \\ &\quad + [(u_1x_1 + u_3x_3)^2 - u_2^2 x_1 x_2]^2\}; \end{aligned}$$

doch hätte es genügt, von der geschweiften Klammer das erste Glied zu berechnen. Es ist also

$$\Phi(u_1, u_2, u_3) = u_3^4, \qquad \Omega_0(x_1, x_2, x_3) = x_1^2.$$

Nach S. 484 ist Φ vom Grad $qm = 2q$, Ω_0 vom Grad q. Daher ist $q = 2$, die Ordnung der Fläche also ein Teiler von $2^2 - 2 = 2$. In der Tat handelt es sich um den Kegel zweiter Ordnung $x_0^2 - x_1 x_2 = 0$.

---

[18]) Hier gilt wieder das in Fußnote [11]) Gesagte.

[19]) Hier gilt wieder das in Fußnote [14]) Gesagte.

Durch die Parameterdarstellung werden nach Satz 11 alle Punkte des Kegels erfaßt außer allenfalls die Schnittpunkte mit $x_1^2 = 0$, also die Punkte der Mantellinie $x_1 = 0$, $x_0 = 0$. In der Tat sieht man sofort, daß von dieser nur der eine Punkt 0, 0, 1, 0 erfaßt wird.

Beispiel II (Beispiel IV von S. 470 nach Umnumerierung der f_ν).

$$f_0 = \varrho_1\varrho_2, \quad f_1 = \varrho_1^2, \quad f_2 = \varrho_2\varrho_3, \quad f_3 = \varrho_1\varrho_3 + \varrho_2^2.$$

Hier ist wieder $n = 3$, $m = 2$; man findet leicht die Abhängigkeit dritten Grades $f_0^3 - f_0f_1f_3 + f_1^2f_2 = 0$, bei der das Glied mit f_0^3 vorkommt. Die Polynome f_1, f_2, f_3 haben wieder nur die eine gemeinsame Nullstelle $\varrho_1 = 0$, $\varrho_2 = 0$. Daher muß (was man auch bei Beispiel I hätte ausnutzen können) Φ von u_1 und u_2 frei sein [20]). Zur Berechnung von Φ und Ω_0 genügt es also, die Resultante T für $u_1 = u_2 = 0$ zu berechnen; sie sei T^*. Man findet

$$\mathsf{T}^* = R\begin{pmatrix} \varrho_1^2 - x_1\sigma^2, & \varrho_2\varrho_3 - x_2\sigma^2, & \varrho_1\varrho_3 + \varrho_2^2 - x_3\sigma^2, & u_3\varrho_3 - y\sigma \\ \varrho_1 & \varrho_2 & \varrho_3 & \sigma \end{pmatrix}$$
$$= u_3^2\,[-x_1y^6 + \cdots].$$

Es ist also $\Phi = u_3^2$, $\Omega_0 = -x_1$. Daher ist $q = 1$, die Ordnung der Fläche also ein Teiler von $2^2 - 1 = 3$. In der Tat handelt es sich um die Fläche dritter Ordnung

$$x_0^3 - x_0x_1x_3 + x_1^2x_2 = 0.$$

Durch die Parameterdarstellung werden nach Satz 11 alle Punkte der Fläche erfaßt außer allenfalls die Schnittpunkte mit $x_1 = 0$, also die Punkte der Geraden $x_1 = 0$, $x_0 = 0$. Man sieht aber leicht, daß diesmal auch diese Punkte erfaßt werden mit Ausnahme des einen Punktes 0, 0, 1, 0.

Beispiel III. $f_0 = \varrho_1^2\varrho_2$, $f_1 = \varrho_1^3$, $f_2 = \varrho_2^2(\varrho_2 - \varrho_3)$, $f_3 = (\varrho_1 + \varrho_2)\,\varrho_3^2$. Hier ist $n = 3$, $m = 3$. Durch sukzessive Elimination findet man leicht die Abhängigkeit siebenten Grades

$$(f_0^3 - f_1^2f_2)^2\,(f_0 + f_1) - f_0^4f_1^2f_3 = 0,$$

bei der das Glied mit f_0^7 vorkommt. Aus gleichem Grunde wie beim vorigen Beispiel genügt es wieder, die Resultante T für $u_1 = u_2 = 0$ zu berechnen. Man findet

$$\mathsf{T}^* = R\begin{pmatrix} \varrho_1^3 - x_1\sigma^3, & \varrho_2^2(\varrho_2 - \varrho_3) - x_2\sigma^3, & (\varrho_1 + \varrho_2)\,\varrho_3^2 - x_3\sigma^3, & u_3\varrho_3 - y\sigma \\ \varrho_1 & \varrho_2 & \varrho_3 & \sigma \end{pmatrix}$$
$$= u_3^6\,[x_1^2y^{21} + \cdots].$$

[20]) Φ ist ja das erste Produkt in Formel (25).

Es ist also $\Phi = u_3^6$, $\Omega_0 = x_1^2$. Daher ist $q = 2$ und die Ordnung der Fläche ein Teiler von $3^2 - 2 = 7$. In der Tat handelt es sich um die Fläche siebenter Ordnung

$$(x_0^3 - x_1^2 x_2)^2 (x_0 + x_1) - x_0^4 x_1^2 x_3 = 0.$$

Durch die Parameterdarstellung werden nach Satz 11 alle Punkte der Fläche erfaßt außer allenfalls die Schnittpunkte mit $x_1 = 0$. Man sieht aber leicht, daß diesmal auch diese Punkte ausnahmslos erfaßt werden.

Bei Satz 13 ist unbequem, daß zwischen den f_ν eine homogene Abhängigkeit von einem gewissen Grad N bestehen muß, *in der das Glied mit f_0^N wirklich vorkommt.* Ist diese Bedingung aber nicht erfüllt, so kann ihr Erfülltsein stets durch eine lineare Transformation

$$f_\nu = \sum_{u=0}^{n} a_{\nu u} \varphi_\mu \qquad (\nu = 0, \ldots, n), \tag{50}$$

$$\begin{vmatrix} a_{00} & \cdots & a_{0n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n0} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{51}$$

erreicht werden (unter Umständen schon durch Umnumerieren der f_ν, siehe oben Beispiel I und II). Denn daß überhaupt eine homogene Abhängigkeit

$$\Sigma A_{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_n} f_0^{\lambda_0} f_1^{\lambda_1} \ldots f_n^{\lambda_n} = 0 \qquad (\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = N) \tag{52}$$

besteht, ist zu Beginn des § 2 gezeigt. Übt man hier die Transformation (50) aus, so entsteht zwischen den φ_ν die Abhängigkeit

$$\Sigma B_{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_n} \varphi_0^{\lambda_0} \varphi_1^{\lambda_1} \ldots \varphi_n^{\lambda_n} = 0 \quad (\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = N), \tag{53}$$

wobei insbesondere

$$B_{N0\ldots 0} = \Sigma A_{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_n} a_{00}^{\lambda_0} a_{10}^{\lambda_1} \ldots a_{n0}^{\lambda_n} \tag{54}$$

ist. Nun kann man die $a_{\nu\mu}$ so wählen (nach Algebra, Satz 29 sogar als ganze Zahlen), daß

$$B_{N0\ldots 0} \neq 0 \tag{55}$$

ist und daß zugleich die Bedingung (51) erfüllt ist. Dann hat man das Gewünschte.

Haben nun die $n+1$ Polynome $f_0, \ldots, f_n$ nur endlich viele gemeinsame Nullstellen, so haben die n Polynome $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, da man die Gleichungen (50) nach den φ_ν auflösen kann, ebenfalls diese Nullstellen. Sie haben aber keine weiteren, also gewiß auch nur endlich viele. Denn wenn sie noch eine hätten, so hätte wegen (53) und (55) auch φ_0 diese Nullstelle, die dann nach (50) auch eine weitere gemeinsame Nullstelle aller f_ν wäre. Jetzt lassen sich die Sätze 11 und 12 auf die Polynome φ_ν anwenden. Dabei ist aber die Berechnung von Φ

und Ω_0, wie schon die obigen Beispiele zeigen, eine mühsame Sache. Unter Verzicht darauf kann man aber aus Satz 13 nach Rückkehr zu den Polynomen f_ν immerhin das folgende weniger präzise Resultat entnehmen:

Satz 14. *Die Punkte des rationalen Gebildes*

$$x_\nu = f_\nu(\varrho_1, \ldots, \varrho_n) \qquad (\nu = 0, \ldots, n)$$

liegen, wenn die f_ν homogene Polynome m-ten Grades mit s verschiedenen gemeinsamen Nullstellen sind[21]), *und wenn $s < m^{n-1}$* ist[22]), *im allgemeinen auf einer nicht zerfallenden algebraischen Fläche, deren Ordnung höchstens gleich $m^{n-1} - s$ ist; und zwar enthält das Gebilde alle Punkte dieser Fläche außer allenfalls die Schnittpunkte mit einer zweiten (möglicherweise zerfallenden) algebraischen Fläche. — Ausnahmsweise kann es sich aber auch um ein Gebilde von weniger als $n-1$ Dimensionen handeln.*

Nach Fußnote [22]) ist nämlich $s \leqq q$, also $m^{n-1} - q \leqq m^{n-1} - s$. — Der Ausnahmefall liegt vor für $q = m^{n-1}$ (siehe § 9).

Beispiel. $f_0 = p_1 p_2$, $f_1 = p_1 p_3$, $f_2 = p_2 p_4$, $f_3 = p_3 p_4$.

Die p_ν seien ein System linearer Formen von $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ derart, daß $\frac{p_4}{p_1}$ und $\frac{p_3}{p_2}$ nicht konstant sind. Hier gibt es im allgemeinen zwei verschiedene gemeinsame Nullstellen, nämlich

eine aus dem System $p_1 = 0$, $p_4 = 0$

und eine aus dem System $p_2 = 0$, $p_3 = 0$.

Die Ordnung der Fläche ist also höchstens gleich $2^2 - 2 = 2$. In der Tat ist es die Fläche zweiter Ordnung $x_0 x_3 - x_1 x_2 = 0$. — Der Ausnahmefall liegt vor, wenn die gemeinsame Nullstelle von p_1 und p_4 mit der von p_2 und p_3 zusammenfällt, wenn also die Koeffizientenmatrix der vier Linearformen p_ν vom Rang 2 ist. Dann besteht zwischen den f_ν auch noch eine lineare Relation, und das Gebilde ist ein Kegelschnitt.

§ 9.

Der Fall $q = m^{n-1}$.

Nach § 6 ist stets $q \leqq m^{n-1}$, und wir haben bisher $q < m^{n-1}$ vorausgesetzt. Wenn nun $q = m^{n-1}$, also $p = m^n$ ist, so hat das Gleichungs-

---

[21]) Hier gilt wieder das in Fußnote [11]) Gesagte.

[22]) Von selbst ist stets $s \leqq m^{n-1}$. Denn die s verschiedenen Nullstellen der $n+1$ Polynome f_ν sind als Nullstellen der n Polynome $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ ihrer Pseudomultiplizität entsprechend zu zählen, und da eine Pseudomultiplizität nach Satz 10 durch m teilbar, also mindestens gleich m ist, so liefern sie mindestens ms gemeinsame Nullstellen von $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Da wir die genaue Anzahl dieser Nullstellen mit qm bezeichnet haben, so ist $s \leqq q$, wegen $q \leqq m^{n-1}$ also auch $s \leqq m^{n-1}$. Der Fall $s = m^{n-1}$ wird in § 9 erledigt.

system (22), wo die x_ν Unbestimmte sind, gar keine Lösung mit $\sigma \neq 0$; denn die Anzahl dieser Lösungen war ja gleich $m^n - p$. Das besagt dann, daß das inhomogene Gleichungssystem

(56) $$f_1(\varrho_1, \ldots, \varrho_n) = x_1, \quad \ldots, \quad f_n(\varrho_1, \ldots, \varrho_n) = x_n$$

keine Lösung hat. Daraus läßt sich aber schließen, daß die Funktionaldeterminante der f_ν identisch verschwindet. Denn wenn sie etwa für das Spezialsystem $\varrho_1^0, \ldots, \varrho_n^0$ nicht verschwände, so könnte man den zugrunde gelegten Körper so erweitern, daß das Gleichungssystem (56), wo die x_ν Unbestimmte sind, auflösbar wird. Eine Lösung wäre nämlich vorhanden in dem zu seinem Quotientenkörper erweiterbaren Ring der formalen Potenzreihen nach Potenzen der Größen

$$y_1 = x_1 - f_1(\varrho_1^0, \ldots, \varrho_n^0), \quad \ldots, \quad y_n = x_n - f_n(\varrho_1^0, \ldots, \varrho_n^0),$$

die ja zugleich mit $x_1, \ldots, x_n$ den Charakter von Unbestimmten haben; das zeigt man genau wie in der Funktionentheorie, wobei nur die Konvergenzbetrachtungen wegfallen. Nachdem somit das Verschwinden der Funktionaldeterminante feststeht, ergibt sich aus Algebra, Satz 61, daß zwischen den f_ν eine Abhängigkeit besteht, und wie zu Beginn des § 2 sieht man dann, daß sogar eine *homogene* Abhängigkeit besteht. Somit gewinnen wir als Ergänzung der Sätze 11 und 13 den

Satz 15. *Wenn die n homogenen Polynome m-ten Grades*

$$f_1(\varrho_1, \ldots, \varrho_n), \ldots, f_n(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$$

genau m^n gemeinsame Nullstellen haben, wobei jede ihrer (stets durch m teilbaren) Pseudomultiplizität entsprechend gezählt ist, so besteht zwischen den n Polynomen (mindestens) eine homogene Abhängigkeit $G(f_1, \ldots, f_n) = 0$[23].

Liegen jetzt $n+1$ homogene Polynome m-ten Grades

$$f_0(\varrho_1, \ldots, \varrho_n), \ldots, f_n(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$$

mit genau m^{n-1} verschiedenen gemeinsamen Nullstellen vor, so gehen wir wie in der zweiten Hälfte des § 8 durch eine lineare Transformation zu $n+1$ neuen Polynomen

$$\varphi_0(\varrho_1, \ldots, \varrho_n), \ldots, \varphi_n(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$$

über, zwischen denen eine homogene Abhängigkeit etwa N-ten Grades besteht, bei der das Glied mit φ_0^N wirklich vorkommt. Aber die letzten n Polynome φ_ν

---

[23]) Man beachte, daß bei weniger als m^n gemeinsamen Nullstellen keine solche Abhängigkeit besteht. Dann haben nämlich die Gleichungen (22), wo die x_ν Unbestimmte sind, eine Lösung mit $\sigma \neq 0$, also auch mit $\sigma = 1$; d. h. die Gleichungen (56) sind lösbar. Zwischen den f_ν kann daher keine Abhängigkeit bestehen, weil sonst dieselbe Abhängigkeit auch zwischen den Unbestimmten x_ν bestehen würde.

haben auch genau dieselben m^{n-1} gemeinsamen Nullstellen (Beweis wie in § 8), so daß bereits zwischen ihnen nach Satz 15 eine homogene Abhängigkeit besteht [24]). Kehrt man zu den ursprünglichen Polynomen f_ν zurück, so ergibt sich als Ergänzung zu Satz 14 der

Satz 16. *Wenn die $n+1$ homogenen Polynome m-ten Grades*

$$f_0(\varrho_1, \ldots, \varrho_n), \ldots, f_n(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$$

genau m^{n-1} verschiedene gemeinsame Nullstellen haben, dann gehören die Punkte des rationalen Gebildes

$$x_\nu = f_\nu(\varrho_1, \ldots, \varrho_n) \qquad (\nu = 0, \ldots, n)$$

dem Durchschnitt von mindestens zwei verschiedenen algebraischen Flächen an. Das Gebilde ist also höchstens $(n-2)$-dimensional.

Beispiel. $x_0 = \varrho_1^2 - \varrho_2^2,\ x_1 = \varrho_2^2 - \varrho_3^2,\ x_2 = \varrho_3^2 - \varrho_1^2,$

$$x_3 = \varrho_1^2 - 2\,\varrho_2^2 + \varrho_3^2.$$

Hier ist $n = 3$, $m = 2$ und die Polynome haben genau $2^2 = 4$ verschiedene gemeinsame Nullstellen, nämlich

$$\varrho_2 = \pm\,\varrho_1, \quad \varrho_3 = \pm\,\varrho_1$$

mit allen vier Vorzeichenkombinationen. Das Gebilde ist keine Fläche, sondern die Kurve (Gerade)

$$x_0 + x_1 + x_2 = 0, \quad x_0 - x_1 - x_3 = 0.$$

Jeder Punkt der Geraden läßt sich auf unendlich viele Arten in der Parameterform darstellen.

§ 10.

Beweis eines in § 6 benutzten Hilfssatzes.

Hilfssatz. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ein homogenes Polynom vom Grad km*

$$\Sigma\, a_{\lambda_1 \ldots \lambda_n} u_1^{\lambda_1} \ldots u_n^{\lambda_n} \qquad (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = km)$$

die m-te Potenz eines Polynoms ist, besteht darin, daß seine Koeffizienten einem System von Bedingungsgleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten genügen.

---

[24]) Die m^{n-1} verschiedenen gemeinsamen Nullstellen der f_ν liefern nämlich, wie sich aus Fußnote [22]) ergibt, m^n gemeinsame Nullstellen der n Polynome $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, so daß man Satz 15 anwenden kann.

Beweis. Setzt man das Polynom versuchsweise gleich

$$\text{(I)} \qquad (\Sigma\, b_{\nu_1 \ldots \nu_n} u_1^{\nu_1} \ldots u_n^{\nu_n})^m \qquad (\nu_1 + \cdots + \nu_n = k),$$

so ist

$$\text{(II)} \qquad a_{\lambda_1 \ldots, \lambda_n} = \Sigma\, b_{\nu_{11} \ldots \nu_{n1}} b_{\nu_{12} \ldots \nu_{n2}} \ldots b_{\nu_{1m} \ldots \nu_{nm}},$$

wobei die Summe sich über alle Systeme von Indizes erstreckt, für die

$$\nu_{11} + \nu_{12} + \cdots + \nu_{1m} = \lambda_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\nu_{n1} + \nu_{n2} + \cdots + \nu_{nm} = \lambda_n$$

ist. Gesucht sind also die Bedingungen, unter denen das System (II) mit den Unbekannten $b_{\nu_1 \ldots \nu_n}$ eine Lösung hat. Betrachtet man statt dessen das homogene Gleichungssystem

$$\text{(III)} \qquad a_{\lambda_1 \ldots \lambda_n} c^m = \Sigma\, b_{\nu_{11} \ldots \nu_{n1}} b_{\nu_{12} \ldots \nu_{n2}} \ldots b_{\nu_{1m} \ldots \nu_{nm}}$$

mit den Unbekannten c und $b_{\nu_1 \ldots \nu_n}$, so ist die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer nichttrivialen Lösung das Verschwinden eines Resultantensystems. Ist die Bedingung erfüllt, so ist bei einer nichttrivialen Lösung gewiß $c \neq 0$, so daß man $c = 1$ setzen kann, womit auch das System (I) gelöst ist. Denn wenn $c = 0$ wäre, so würde aus (III) folgen:

$$\Sigma\, b_{\nu_{11} \ldots, \nu_{n1}} b_{\nu_{12} \ldots \nu_{n2}} \ldots b_{\nu_{1n} \ldots \nu_{nm}} = 0,$$

was aber besagen würde, daß die m-te Potenz (I) und also auch das Basispolynom identisch verschwände. Daher wären auch alle $b_{\nu_1 \ldots \nu_n}$ gleich 0, und die Lösung von (III) wäre die triviale.

Nach Algebra, Satz 139 gibt es ein Resultantensystem, das aus Polynomen der $a_{\lambda_1 \ldots \lambda_n}$ mit ganzzahligen Koeffizienten besteht, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

(Eingegangen am 1. Mai 1942.)