

Werk

Titel: Mathematische Zeitschrift

Ort: Berlin

Jahr: 1942

Kollektion: Mathematica

Werk Id: PPN266833020_0048

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN266833020_0048 | LOG_0036

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Eine notwendige und hinreichende Bedingung für Doppelreihen.

Von

Ludwig Neder in Münster i. W.

Unter den nach CAUCHYS Definition konvergent genannten Doppelreihen

$$(1) \quad \Sigma a_{\mu, \nu} \quad (\mu \text{ und } \nu = 1, 2, 3, \dots)$$

besitzen diejenigen mit ausnahmslos konvergenten Zeilen und Spalten eine Reihe von Eigenschaften, durch die sie vor den übrigen Reihen ausgezeichnet sind, und durch die sie den berechtigten Erwartungen entsprechen, die man einer sinnvollen Verallgemeinerung der eindimensionalen konvergenten Reihen entgegenbringt. Von solchen Eigenschaften erwähnen wir hier nur die folgenden: a) Die Teilsummen

$$(2) \quad s_{m, n} = \sum_{\mu=1}^m \sum_{\nu=1}^n a_{\mu, \nu}, \quad (m \text{ und } n = 1, 2, 3, \dots)$$

bilden eine beschränkte Zahlenmenge. b) Desgleichen die Glieder $a_{\mu, \nu}$ der Doppelreihe. c) Jede durch Weglassung von je höchstens endlich vielen Anfangszeilen und -spalten erzeugte Teilreihe konvergiert (samt allen Zeilen und Spalten). d) Die iterierten Reihen

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{ \sum_{\mu=1}^{\infty} a_{\mu, \nu} \right\} \quad \text{und} \quad \sum_{\mu=1}^{\infty} \left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\mu, \nu} \right\}$$

konvergieren, und zwar gegen die Summe s der Doppelreihe.

Zweck dieser kurzen Note ist es nun, eine einfache notwendige und hinreichende Bedingung anzugeben dafür, daß eine Doppelreihe zur oben genannten Teilklasse der nach CAUCHY konvergenten Doppelreihen gehört:

Satz. Damit eine Doppelreihe (1) konvergent ist samt allen ihren Zeilen und Spalten, ist notwendig und hinreichend, daß für die Teilsumme (2) eine Entwicklung besteht

$$(3) \quad s_{m, n} = s - \varphi_m - \psi_n + \chi_{m, n},$$

wobei

$$(4) \quad \varphi_m \rightarrow 0 \text{ bei } m \rightarrow \infty, \quad \psi_n \rightarrow 0 \text{ bei } n \rightarrow \infty, \quad \chi_{m, n} \rightarrow 0 \text{ bei } m + n \rightarrow \infty.$$

Beweis. A. Die Bedingung ist hinreichend. Aus (3) und (4) folgt, daß $s_{m, n}$ einem wohlbestimmten Grenzwert zustrebt, wenn $m \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$ bzw. wenn $m \rightarrow \infty$, n fest oder m fest, $n \rightarrow \infty$. Und dies liefert gerade die Konvergenz der Doppelreihe (nach CAUCHY) bzw. die Konvergenz der Zeilen und Spalten.

B. Die Bedingung ist notwendig. Restkern heiße der Ausdruck

$$r_{m, n} = \sum a_{\mu, \nu} \quad (\mu > m, \nu > n).$$

Dann haben wir zunächst die Zerlegung

$$(5) \quad \sum_{\mu=m+1}^M \sum_{\nu=n+1}^N a_{\mu, \nu} = s_{M, N} + s_{m, n} - s_{m, N} - s_{M, n},$$

aus der sich bei $M \rightarrow \infty, N \rightarrow \infty$ ergibt

$$r_{m, n} = s + s_{m, n} - s_{m, \infty} - s_{\infty, n} = s + s_{m, n} - (s - r_{m, 0}) - (s - r_{0, n}).$$

Daraus resultiert

$$s_{m, n} = s - r_{m, 0} - r_{0, n} + r_{m, n},$$

womit die gewünschte Entwicklung (3) gefunden ist, und auch (4) besteht, sobald die Beziehung

$$(6) \quad r_{m, n} \rightarrow 0 \text{ bei } m + n \rightarrow \infty$$

sichergestellt ist, was nunmehr erfolgen soll.

Dazu haben wir zunächst wegen der vorausgesetzten Konvergenz (nach CAUCHY) der Doppelreihe

$$|s - s_{m, n}| < \delta \quad \text{für } m \geq P, n \geq P.$$

Setzen wir also in (5) voraus

$$M \geq m \geq P, \quad N \geq n \geq P,$$

und subtrahieren wir in (5) von jeder der vier Teilsummen einmal s (was sich im Effekt gegenseitig aufhebt), so kommt nach dem Grenzübergang $M \rightarrow \infty, N \rightarrow \infty$ die Beziehung

$$(7) \quad |r_{m, n}| < 4\delta \quad \text{für } m \geq P, n \geq P.$$

Weiter ist wegen der vorausgesetzten Konvergenz der Zeilen und Spalten

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left| \sum_{\mu=m+1}^{\infty} a_{\mu, \nu} \right| < \frac{\delta}{P} \quad \text{für } m \geq M, \quad (\nu = 1, 2, \dots, P), \\ \left| \sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_{\mu, \nu} \right| < \frac{\delta}{P} \quad \text{für } n \geq N_{\mu} \quad (\mu = 1, 2, \dots, P), \end{array} \right.$$

Wenn wir dann setzen

$$Q = \max (P, M_1, \dots, M_P, N_1, \dots, N_P),$$

so ergibt sich jetzt die Beziehung

$$|r_{m, n}| < 5\delta \quad \text{für } m \geq Q \text{ (und entsprechend auch für } n \geq Q)$$

folgendermaßen: Für $n \geq P$ ist sie in (7) enthalten, und für $n = 0, 1, \dots, P - 1$ gilt

$$r_{m,n} = r_{m,P} + \sum_{\nu=n+1}^P \left\{ \sum_{\mu=m+1}^{\infty} a_{\mu,\nu} \right\},$$

so daß die Behauptung aus (7) und (8) folgt.

Nunmehr aber gilt

$$|r_{m,n}| < 5\delta \quad \text{für} \quad m+n \geq 2Q,$$

da dann $m \geq Q$ oder $n \geq Q$, womit (6) und somit alles bewiesen ist.

Schlußbemerkung. Die Übertragung unserer notwendigen und hinreichenden Bedingung auf drei- und mehrfach unendliche Reihen dürfte von geringerem Interesse sein.

(Eingegangen am 31. März 1942.)