

Werk

Titel: Mathematische Zeitschrift

Ort: Berlin

Jahr: 1942

Kollektion: Mathematica

Werk Id: PPN266833020_0048

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN266833020_0048 | LOG_0037

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Zu einem Approximationsatz von Koksma.

Von

L. Rédei in Szeged (Ungarn).

Herr KOKSMA¹⁾ hat folgenden Satz bewiesen: Für fast alle reellen Zahlen $\alpha \geq 1$ ist die Folge α^x ($x = 1, 2, \dots$) gleichverteilt (mod 1).

Trivial ist der Fall, daß α ganz rational ist. Hiervon abgesehen wurde meines Wissens das Verhalten von α^x (mod 1) bisher für kein spezielles α angegeben. Im folgenden soll ein kleiner Beitrag zu dieser Frage geliefert werden.

Es werde ω eine Häufungsstelle (mod 1) einer Folge a_x genannt, wenn es ganz rationale Zahlen g_x gibt so, daß ω eine (gewöhnliche) Häufungsstelle von $a_x + g_x$ ist. Dann sind alle $\omega + g$ (g ganz rational) auch Häufungsstellen (mod 1), die wir äquivalent nennen. Gibt es keine weiteren Häufungsstellen (mod 1) und ist ω eine beliebige unter ihnen, so sagen wir, daß a_x gegen ω konvergiert (mod 1). Wir beweisen:

a. Ist α ganz algebraisch und sind die von α verschiedenen Konjugierten von α absolut kleiner als 1²⁾, so konvergiert α^x gegen 0 (mod 1).

b. Ist $\alpha = \frac{a}{b}$ (a, b ganz rational, $a > b > 1$, $b \nmid a$), so hat α^x unendlich viele nicht äquivalente Häufungsstellen (mod 1). Ist ω eine unter ihnen, so ist mit einem passenden ganz rationalen r auch $\alpha \omega + \frac{r}{b}$ eine solche. [Ob aber die Häufungsstellen (mod 1) überall dicht oder sogar gleichverteilt liegen, bleibt dahingestellt.]

Zu a. Die über alle Konjugierten erstreckte Summe $\Sigma \alpha^x$ ist für jedes x ganz rational. Hieraus folgt schon die Behauptung.

¹⁾ J. F. KOKSMA, Ein mengentheoretischer Satz über die Gleichverteilung modulo Eins. *Compositio math.* 2 (1935), S. 250—258. Vgl. auch den Bericht desselben Verfassers: Diophantische Approximationen. *Ergebnisse der Math.* 4, Heft 4, Berlin 1936, S. 1—157, insbes. S. 95.

²⁾ Offenbar muß ein solches α absolut größer als 1, also auch reell sein. Zu jeder Gradzahl lassen sich unendlich viele solche α leicht angeben. Vgl. z. B. ST. LIPKA, Über die Irreduzibilität von Polynomen. *Math. Annalen* 118 (1941), S. 235—245.

Zu **b**. Wir beweisen zuerst die zweite Behauptung. Es sei ε eine vorgegebene positive Zahl. Nach der Annahme gibt es dann unendlich viele natürliche Zahlen x so, daß

$$\alpha^{x-1} = \omega + g_x + \delta_x$$

mit ganz rationalem g_x und $|\delta_x| < \frac{\varepsilon}{\alpha}$. Hieraus folgt

$$\alpha^x \equiv \alpha \omega + \frac{r}{b} + \alpha \delta_x \pmod{1}$$

mit einem passenden $r = 0, 1, \dots, b-1$. Da $|\alpha \delta_x| < \varepsilon$ ist und für r bloß ein endlicher Wertevorrat vorliegt, erhellt die Richtigkeit der zweiten Behauptung in **b**.

Kommt in **b** ein irrationales ω vor, so ergibt sich die erste Behauptung in **b** durch Iteration des eben Bewiesenen. Für alle Fälle gilt aber folgender Beweis. Neben allen ω betrachten wir auch noch diejenigen Zahlen $\bar{\omega} = \alpha \omega$, die unter den ω nicht vorkommen (natürlich können die $\bar{\omega}$ auch fehlen) und bezeichnen mit H die Menge der ω und $\bar{\omega}$. Nehmen wir jetzt an, daß die erste Behauptung in **b** falsch ist. Das bedeutet, daß die ω endlichviele Restklassen (mod 1) ausmachen; so besteht H offenbar aus ebenfalls endlichvielen Restklassen (mod 1), da ja α rational ist. Somit können wir um jedes Element ξ von H als Mittelpunkt ein Intervall $J(\xi)$ der Länge 2ε legen, wobei $\varepsilon (> 0)$ genügend klein gewählt ist, so daß alle diese $J(\xi)$ paarweise fremd sind. Sodann konstruieren wir ähnlich zu den ω weitere Intervalle $J'(\omega)$ der Länge $\frac{2\varepsilon}{\alpha}$ statt 2ε . [$J'(\omega)$ ist in $J(\omega)$ enthalten.] Jetzt wählen wir eine natürliche Zahl N so groß, daß α^x für $x = N, N+1, \dots$ in die Vereinigungsmenge aller $J'(\omega)$ fällt. Dadurch wird jedem $x = N, N+1, \dots$ ein bestimmtes $\omega = \omega_x$ zugeordnet mit

$$(1) \quad \alpha^x = \omega_x + \delta_x \quad \text{und} \quad |\delta_x| \leq \frac{\varepsilon}{\alpha}.$$

Da

$$\alpha^{x+1} = \alpha \omega_x + \alpha \delta_x$$

und $|\alpha \delta_x| \leq \varepsilon$ ist, so liegt α^{x+1} in $J(\alpha \omega_x)$. Letzteres muß also ein $J'(\omega)$ enthalten, und das heißt, daß $\alpha \omega_x$ einem ω gleich ist. Da (1) auch mit $x+1$ statt x gilt, so muß eben $\alpha \omega_x = \omega_{x+1}$ sein. Das hat wieder $\delta_{x+1} = \alpha \delta_x$ zur Folge. Also ist $\delta_{N+k} = \alpha^k \delta_N$ ($k = 1, 2, \dots$), und das ergibt wegen (1) und $\alpha > 1$: $\delta_x = 0$, $\alpha^x = \omega_x$ ($x = N, N+1, \dots$). Da aber alle α^x inkongruent sind (mod 1)³⁾, so bedeutet letzteres unendlich viele nicht äquivalente Häufungsstellen von $\alpha^x \pmod{1}$. Dieser Widerspruch beweist **b**.

³⁾ Sie haben sogar verschiedene reduzierte Nenner.

Bemerkung. Ein bekannter Satz von WEYL⁴⁾ lautet so: Sind je zwei der ganzen rationalen Zahlen a_x ($x = 1, 2, \dots$) voneinander verschieden, so ist für fast alle reellen γ die Folge γa_x gleichverteilt (mod 1). Offenbar gilt dieser Satz auch dann, wenn a_x durch $a_x + \delta_x$ ersetzt wird, wobei δ_x eine reelle Nullfolge ist, insbesondere also für α^x statt a_x mit einem α aus \mathfrak{a} . Ist γ aus dem durch α erzeugten Zahlkörper, so hat $\gamma \alpha^x$ nur endlichviele nicht äquivalente Häufungsstellen (mod 1), wie das aus \mathfrak{a} leicht folgt.

⁴⁾ H. WEYL, Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins. *Math. Annalen* **77** (1916), S. 313–352, insbes. S. 344. Vgl. auch den unter Anm. ¹⁾ zitierten Bericht, S. 94.

(Eingegangen am 2. Mai 1942.)