Zu einem Approximationssatz von Koksma.

Von

L. Rédei in Szeged (Ungarn).

Herr KOKSMA[1]) hat folgenden Satz bewiesen: Für fast alle reellen Zahlen $\alpha \geqq 1$ ist die Folge α^x $(x = 1, 2, \ldots)$ gleichverteilt (mod 1).

Trivial ist der Fall, daß α ganz rational ist. Hiervon abgesehen wurde meines Wissens das Verhalten von α^x (mod 1) bisher für kein spezielles α angegeben. Im folgenden soll ein kleiner Beitrag zu dieser Frage geliefert werden.

Es werde ω eine Häufungsstelle (mod 1) einer Folge a_x genannt, wenn es ganz rationale Zahlen g_x gibt so, daß ω eine (gewöhnliche) Häufungsstelle von $a_x + g_x$ ist. Dann sind alle $\omega + g$ (g ganz rational) auch Häufungsstellen (mod 1), die wir äquivalent nennen. Gibt es keine weiteren Häufungsstellen (mod 1) und ist ω eine beliebige unter ihnen, so sagen wir, daß a_x gegen ω konvergiert (mod 1). Wir beweisen:

a. *Ist α ganz algebraisch und sind die von α verschiedenen Konjugierten von α absolut kleiner als* 1[2]), *so konvergiert α^x gegen* 0 (mod 1).

b. *Ist $\alpha = \frac{a}{b}$ (a, b ganz rational, $a > b > 1$, $b \nmid a$), so hat α^x unendlich viele nicht äquivalente Häufungsstellen* (mod 1). *Ist ω eine unter ihnen, so ist mit einem passenden ganz rationalen r auch $\alpha\,\omega + \frac{r}{b}$ eine solche. [Ob aber die Häufungsstellen* (mod 1) *überall dicht oder sogar gleichverteilt liegen, bleibt dahingestellt.]*

Zu **a.** Die über alle Konjugierten erstreckte Summe $\Sigma\,\alpha^x$ ist für jedes x ganz rational. Hieraus folgt schon die Behauptung.

---

[1]) J. F. KOKSMA, Ein mengentheoretischer Satz über die Gleichverteilung modulo Eins. Compositio math. **2** (1935), S. 250—258. Vgl. auch den Bericht desselben Verfassers: Diophantische Approximationen. Ergebnisse der Math. **4**, Heft 4, Berlin 1936, S. 1—157, insbes. S. 95.

[2]) Offenbar muß ein solches α absolut größer als 1, also auch reell sein. Zu jeder Gradzahl lassen sich unendlich viele solche α leicht angeben. Vgl. z. B. ST. LIPKA, Über die Irreduzibilität von Polynomen. Math. Annalen **118** (1941), S. 235—245.

Zu **b**. Wir beweisen zuerst die zweite Behauptung. Es sei ε eine vorgegebene positive Zahl. Nach der Annahme gibt es dann unendlich viele natürliche Zahlen x so, daß

$$\alpha^{x-1} = \omega + g_x + \delta_x$$

mit ganz rationalem g_x und $|\delta_x| < \frac{\varepsilon}{\alpha}$. Hieraus folgt

$$\alpha^x \equiv \alpha\,\omega + \frac{r}{b} + \alpha\delta_x \pmod 1$$

mit einem passenden $r = 0, 1, \ldots, b-1$. Da $|\alpha\delta_x| < \varepsilon$ ist und für r bloß ein endlicher Wertevorrat vorliegt, erhellt die Richtigkeit der zweiten Behauptung in **b**.

Kommt in **b** ein irrationales ω vor, so ergibt sich die erste Behauptung in **b** durch Iteration des eben Bewiesenen. Für alle Fälle gilt aber folgender Beweis. Neben allen ω betrachten wir auch noch diejenigen Zahlen $\overline{\omega} = \alpha\,\omega$, die unter den ω nicht vorkommen (natürlich können die $\overline{\omega}$ auch fehlen) und bezeichnen mit H die Menge der ω und $\overline{\omega}$. Nehmen wir jetzt an, daß die erste Behauptung in **b** falsch ist. Das bedeutet, daß die ω endlichviele Restklassen (mod 1) ausmachen; so besteht H offenbar aus ebenfalls endlichvielen Restklassen (mod 1), da ja α rational ist. Somit können wir um jedes Element ξ von H als Mittelpunkt ein Intervall $J(\xi)$ der Länge 2ε legen, wobei $\varepsilon (> 0)$ genügend klein gewählt ist, so daß alle diese $J(\xi)$ paarweise fremd sind. Sodann konstruieren wir ähnlich zu den ω weitere Intervalle $J'(\omega)$ der Länge $\frac{2\varepsilon}{\alpha}$ statt 2ε. [$J'(\omega)$ ist in $J(\omega)$ enthalten.] Jetzt wählen wir eine natürliche Zahl N so groß, daß α^x für $x = N, N+1, \ldots$ in die Vereinigungsmenge aller $J'(\omega)$ fällt. Dadurch wird jedem $x = N, N+1, \ldots$ ein bestimmtes $\omega = \omega_x$ zugeordnet mit

$$\alpha^x = \omega_x + \delta_x \quad \text{und} \quad |\delta_x| \leqq \frac{\varepsilon}{\alpha}. \tag{1}$$

Da

$$\alpha^{x+1} = \alpha\,\omega_x + \alpha\delta_x$$

und $|\alpha\delta_x| \leqq \varepsilon$ ist, so liegt α^{x+1} in $J(\alpha\,\omega_x)$. Letzteres muß also ein $J'(\omega)$ enthalten, und das heißt, daß $\alpha\,\omega_x$ einem ω gleich ist. Da (1) auch mit $x+1$ statt x gilt, so muß eben $\alpha\,\omega_x = \omega_{x+1}$ sein. Das hat wieder $\delta_{x+1} = \alpha\delta_x$ zur Folge. Also ist $\delta_{N+k} = \alpha^k \delta_N$ $(k = 1, 2, \ldots)$, und das ergibt wegen (1) und $\alpha > 1$: $\delta_x = 0$, $\alpha^x = \omega_x$ $(x = N, N+1, \ldots)$. Da aber alle α^x inkongruent sind (mod 1)[3]), so bedeutet letzteres unendlich viele nicht äquivalente Häufungsstellen von α^x (mod 1). Dieser Widerspruch beweist **b**.

---

[3]) Sie haben sogar verschiedene reduzierte Nenner.

Bemerkung. Ein bekannter Satz von WEYL[4]) lautet so: Sind je zwei der ganzen rationalen Zahlen a_x ($x = 1, 2, \ldots$) voneinander verschieden, so ist für fast alle reellen γ die Folge γa_x gleichverteilt (mod 1). Offenbar gilt dieser Satz auch dann, wenn a_x durch $a_x + \delta_x$ ersetzt wird, wobei δ_x eine reelle Nullfolge ist, insbesondere also für α^x statt a_x mit einem α aus **a**. Ist γ aus dem durch α erzeugten Zahlkörper, so hat $\gamma \alpha^x$ nur endlichviele nicht äquivalente Häufungsstellen (mod 1), wie das aus **a** leicht folgt.

---

[4]) H. WEYL, Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins. Math. Annalen **77** (1916), S. 313—352, insbes. S. 344. Vgl. auch den unter Anm. [1]) zitierten Bericht, S. 94.

(Eingegangen am 2. Mai 1942.)