Konstruktion lösender Kerne für singuläre Integralgleichungen erster Art, insbesondere bei Differenzkern.

Von

M. Eichler in Darmstadt.

Aufgabestellung.

1. Den nachstehenden Ausführungen liegt eine Integralgleichung

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} L(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi \tag{1}$$

von erster Art zugrunde. Der Kern möge die spezielle Gestalt

$$\begin{aligned} L(x, \xi) = {} & \frac{1}{x-\xi} + c_0(x)\left(\gamma_0(\xi) + \mathfrak{J}_0(x-\xi)\right) \\ & + c_1(x)\left(\frac{1}{1!}\, x\gamma_0(\xi) + \gamma_1(\xi) + \mathfrak{J}_1(x-\xi)\right) \\ & + \cdots \\ & + c_n(x)\left(\frac{1}{1!}\, x^n \gamma_0(\xi) + \frac{1}{(n-1)!}\, x^{n-1}\gamma_1(\xi) + \cdots \right. \\ & \left. \qquad + \gamma_n(\xi) + \mathfrak{J}_n(x-\xi)\right) \end{aligned} \tag{2}$$

haben, wobei $c_\nu(x)$, $\gamma_\nu(\xi)$ stetig differenzierbare Funktionen sind und

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_0(x) &= \ln|x|, \\ \mathfrak{J}_n(x) &= \int_0^x \mathfrak{J}_{n-1}(x)\, dx, \end{aligned} \tag{3}$$

also

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_1(x) &= x(\ln|x| - 1), \\ \mathfrak{J}_2(x) &= \tfrac{1}{2}\, x^2 \ln|x| - \tfrac{3}{4}\, x^2, \\ \mathfrak{J}_3(x) &= \tfrac{1}{6}\, x^3 \ln|x| - \tfrac{11}{36}\, x^3, \text{ usw.} \end{aligned} \tag{4}$$

Die Besonderheit des Kerns, auf die sich alle Rechnungen stützen, ist die, daß die einzelnen Terme in (2) bis auf die Faktoren $c_\nu(x)$ auseinander durch Ableitung nach x hervorgehen.

$L(x, \xi)$ ist für $x = \xi$ singulär, und es ist in dem Integral (1) der Cauchysche Hauptwert zu nehmen. Es wird verabredet, daß Integrale mit singulärem Integranden stets im Sinne des Cauchyschen Hauptwertes zu verstehen sind.

Integralgleichungen dieser Art, wenn auch mit einer unendlichen Reihe (2), kommen in der Tragflügeltheorie oder bei gewissen Randwertaufgaben für die geschlitzte Ebene und die Differentialgleichung $\Delta u + u = 0$ vor. Als Kern tritt im letzteren Fall die HANKELsche Funktion $H_1^{(2)}(x - \xi)$ auf, die sich in eine gut konvergente Reihe (2) entwickeln läßt (vgl. hierzu den Abschnitt 12). Auf die dem Praktiker naheliegende Vermutung, daß man beim Lösen der Integralgleichung die unendliche Reihe durch einen endlichen Abschnitt ersetzen darf, wird hier nicht eingegangen.

Gesucht und konstruiert werden für eine endliche Reihe (2) zwei Funktionen $\mathsf{\Lambda}(\xi, t)$, $\mathsf{N}(\xi)$ von der Art, daß

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \mathsf{\Lambda}(\xi, t)\, f(t)\, dt \tag{5}$$

die Integralgleichung (1) löst, während $\mathsf{N}(\xi)$ der zugehörigen homogenen Gleichung

$$0 = \int_{-1}^{+1} L(x, \xi)\, \mathsf{N}(\xi)\, d\xi \tag{6}$$

genügt. Es ist demnach $\mathsf{\Lambda}(\xi, t) + \mathsf{N}(\xi)\, \varphi_0(t)$ mit beliebigem $\varphi_0(t)$ ein lösender Kern der vorgelegten Integralgleichung. Die Konstruktion wird auf die Auflösung eines Systems von $n+1$ linearen Gleichungen zurückgeführt, deren Lösbarkeit für die Durchführbarkeit der Berechnung von $\mathsf{\Lambda}$ und N maßgebend ist; in Ausnahmefällen versagt sie.

Die Konstruktion von $\mathsf{\Lambda}(\xi, t)$ und $\mathsf{N}(\xi)$ läßt sich für Differenzkerne der Form (2) weitgehend explizit leisten, wie zum Schluß gezeigt wird (Abschnitt 12 bis 14).

Ersetzt man in (2) die $c_\nu(x)$, $\gamma_\nu(\xi)$ durch $p^{\nu+1} c_\nu(x)$, $p^{-\nu-1}\gamma_\nu(\xi)$ und läßt den Parameter p gegen 0 streben, so geht (2) in einen von logarithmischen Bestandteilen freien Kern

$$L^*(x, \xi) = \frac{1}{x - \xi} + c_0(x)\gamma_0(\xi) + \cdots + c_n(x)\gamma_n(\xi)$$

über. Hierbei strebt auch $\mathsf{\Lambda}(\xi, t)$ einer Grenzfunktion $\mathsf{\Lambda}^*(\xi, t)$ zu, welche gleich dem zu L^* gehörigen lösenden Kern ist[1]). Obwohl man die Tatsache, daß $\mathsf{\Lambda}^*$ der lösende Kern von L^* ist, sehr leicht direkt verifizieren könnte, dürfte es doch interessant sein, die Entstehung von $\mathsf{\Lambda}^*$ aus $\mathsf{\Lambda}$ im einzelnen zu verfolgen. Diese Entartungsfälle von (2) sind wohl im allgemeinen von größerem Interesse als die nicht entarteten Fälle. Denn man kann jeden Kern

$$\tilde{L}(x, \xi) = \frac{1}{x - \xi} + \tilde{L}_1(x, \xi)$$

[1]) Man wird so auf ein Lösungsverfahren geführt für Integralgleichungen 1. Art mit einem Kern L^*, das mit dem Abspaltungsverfahren von E. SCHMIDT bei Integralgleichungen 2. Art (je nach der Auffassung) analog oder identisch ist.

mit stetigem und stückweise glattem $\widetilde{L}_1$ durch Kerne L^* gleichmäßig approximieren und nach unserem Ergebnis auch mit wenig Mühe eine Integralgleichung 1. Art mit diesem Kern angenähert lösen, falls es zutrifft, daß die Lösung der Integralgleichung mit dem Kern L^* bei wachsendem n gegen diejenige mit dem Kern $\widetilde{L}$ konvergiert. Diese Frage wird hier jedoch nicht behandelt. Außerdem führt die Betrachtung entarteter Kerne auf ein Iterationsverfahren zur Lösung von (1) (vgl. Abschnitt 16).

Alle im folgenden auftretenden Funktionen sollen, soweit etwas anderes nicht ausdrücklich bemerkt wird, im Intervall von -1 bis $+1$ stetig differenzierbar sein. An vielen Stellen könnte man zwar mit schwächeren Voraussetzungen auskommen, jedoch soll uns hier in erster Linie die Aufstellung eines zur Lösung von (1) führenden Formelapparates, nicht die Absteckung seiner Gültigkeitsgrenzen interessieren. Treten auch Ableitungen von Funktionen auf, so sollen sie wieder als stetig differenzierbar vorausgesetzt werden.

Beschreibung des Konstruktionsverfahrens.

2. Es werde

$$g(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\left(\frac{1}{n!}x^n\gamma_0(\xi) + \cdots + \gamma_n(\xi) + \mathfrak{J}_n(x-\xi)\right)\varphi(\xi)\,d\xi \tag{7}$$

gesetzt. Es ist dann

$$\frac{d^\mu}{dx^\mu}g(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\Big(\frac{1}{(n-\mu)!}x^{n-\mu}\gamma_0(\xi) + \cdots + \gamma_{n-\mu}(\xi) + \mathfrak{J}_{n-\mu}(x-\xi)\Big)\varphi(\xi)\,d\xi \tag{8}$$

für $\mu = 0, 1, \ldots, n$ und

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}g(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\ln|\varepsilon|\left(\varphi(x-\varepsilon) - \varphi(x+\varepsilon)\right) + \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\left(\int_{-1}^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^{+1}\right)\frac{\varphi(\xi)}{x-\xi}\,d\xi,$$

bei differenzierbarem φ also

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}g(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\varphi(\xi)}{d-\xi}\,d\xi. \tag{9}$$

Nach (7), (8), (9) einerseits, nach (1), (2) andererseits genügt $g(x)$ der linearen Differentialgleichung

$$\mathfrak{L}[g(x)] = g^{(n+1)}(x) + c_0(x)g^{(n)}(x) + \cdots + c_n(x)g(x) = f(x). \tag{10}$$

Bekanntlich genügt dann $g(x)$ auch einer Integralgleichung

$$g(x) = \int_{-1}^{+1} G(x, t)\, f(t)\, dt \tag{11}$$

mit einer Greenschen Funktion $G(x, t)$.

Man kennt nun die Lösungen der Integralgleichung (9)[2]), es sind dies die Funktionen

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1 - x^2}{1 - \xi^2}}\, \frac{g^{(n+1)}(x)}{x - \xi}\, dx + \frac{\varphi_0}{\pi \sqrt{1 - \xi^2}} \tag{12}$$

mit einer beliebigen Konstanten φ_0. Differenziert man (11) $(n+1)$-mal nach x und trägt das Ergebnis in (12) ein, so erhält man einen Ausdruck der Form (5). Dieser Grundgedanke ist nun im einzelnen durchzuführen.

Grundeigenschaften der Greenschen Funktion.

3. $G(x, t)$ genügt als Funktion von x der homogenen Differentialgleichung (10); sie ist samt ihren partiellen Ableitungen nach x bis zur $(n-1)$-ten Ordnung stetig, die n-te Ableitung macht an der Stelle $x = t$ einen Sprung von der Höhe -1, und von dieser Stelle abgesehen sind auch die n-te und $(n+1)$-te Ableitung stetig. Es ist demnach, wenn $h_0(x), \ldots, h_n(x)$ ein Lösungsfundamentalsystem der homogenen Gleichung (10) bezeichnet,

$$G(x, t) = \sum_{\nu=0}^{n} h_\nu(x) r_\nu(t) + \begin{cases} 0 & \text{für } x < t \\ \sum_{\nu=0}^{n} h_\nu(x)\, s_\nu(t) & \text{für } x > t \end{cases} \tag{13}$$

mit

$$\begin{aligned} &\sum_{\nu=0}^{n} h_\nu^{(\mu)}(t)\, s_\nu(t) = 0 \quad \text{für } n > 0 \text{ und } \mu = 0, \ldots, n-1 \\ &\sum_{\nu=0}^{n} h_\nu^{(n)}(t)\, s_\nu(t) = 1. \end{aligned} \tag{14}$$

Aus diesen linearen Gleichungen lassen sich die $s_\nu(t)$ in eindeutiger Weise bestimmen, da die Determinante des Gleichungssystems die Wronskische Determinante der $h_\nu(t)$ ist und demnach nicht verschwindet. Die Bestimmung der $r_\nu(t)$ ist weniger einfach und enthält den wesentlichen Teil der zu leistenden Konstruktionsarbeit.

---

[2]) Vgl. etwa Fuchs-Hopf-Seewald, Aerodynamik. Berlin 1935. Bd. 2, Kap. III, § 7. Ferner K. Schröder, Über eine Integralgleichung erster Art der Tragflügeltheorie. Sitz.-Ber. Preuß. Akad. Wiss., Math.-Phys. Kl. 1938, XXX. H. Söhngen, Die Lösungen der Integralgleichung ... Math. Zeitschr. 45 (1939), S. 245.

Wie jedoch die $r_\nu(t)$ auch ausfallen, ist (11) eine Lösung der Differentialgleichung (10), man erhält nämlich durch Ableitung von (11) nach x

$$\frac{d^\mu}{d\,x^\mu}\,g(x) = \int\limits_{-1}^{-1} \frac{\partial^\mu}{\partial\,x^\mu}\,G(x,t)\,f(t)\,dt, \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, n) \tag{15}$$

$$\frac{d^{n+1}}{d\,x^{n+1}}\,g(x) = f(x) + \int\limits_{-1}^{+1} \frac{\partial^{n-1}}{\partial\,x^{n+1}}\,G(x,t)\,f(t)\,dt. \tag{16}$$

Multipliziert man die einzelnen Ableitungen von $g(x)$ mit den $c_\mu(x)$ und summiert, so entsteht (10).

Ansatz für den lösenden Kern der Integralgleichung.

4. Es wird nun in Verfolgung des in 2. geschilderten Programms der lösende Kern

$$\mathsf{\Lambda}(\xi,t) + \varphi_0(t)\,\mathsf{N}(\xi) = \varphi(\xi,t)$$

in der Form

$$\varphi(\xi,t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}}\,\frac{\partial^{n+1}}{\partial\,x^{n+1}}\,G(x,t)\,\frac{d\,x}{x-\xi} + \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{1-t^2}{1-\xi^2}}\,\frac{1}{t-\xi} + \frac{\varphi_0(t)}{\pi\sqrt{1-\xi^2}} \tag{17}$$

angesetzt, wobei $\varphi_0(\xi)$ eine willkürliche Funktion ist. Dies ist wirklich ein lösender Kern von (1), falls die Gleichungen

$$\frac{\partial^\mu}{\partial\,x^\mu}\,G(x,t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{+1}\Big(\frac{x^{n-\mu}}{(n-\mu)!}\,\gamma_0(\xi) + \cdots \\ + \gamma_{n-\mu}(\xi) + \mathfrak{J}_{n-\mu}(x-\xi)\Big)\,\varphi(\xi,t)\,d\xi \tag{18}$$

für $\mu = 0, 1, \ldots, n$ bestehen. Zum Beweise multiplizieren wir (17) mit $f(t)$ und integrieren über t; es entsteht nach (16) bei Vertauschung der Integrationsreihenfolge, die noch zu rechtfertigen ist,

$$\begin{aligned}\varphi(\xi) &= \int\limits_{-1}^{+1} \varphi(\xi,t)\,f(t)\,dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{+1}\sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}}\,\frac{g^{(n+1)}(x)}{x-\xi}\,dx + \frac{\varphi_0}{\pi\sqrt{1-\xi^2}}\end{aligned}$$

mit

$$\varphi_0 = \int\limits_{-1}^{+} \varphi_0(t)\,f(t)\,dt,$$

und hieraus die Formel (9).

Aus (15) und (18) ergibt sich in gleicher Weise, bei ebenfalls noch zu rechtfertigender Vertauschung der Integrationsreihenfolge, die Formel (8). Aus (8) und (9) folgt aber (1) auf Grund von (10).

Beweis für die Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge bei gewissen Integralen.

5. Es bleibt zunächst die Aufgabe, die Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge in den Integralen

$$\mathfrak{J}_1 = \int_{-1}^{+1} f(t)\,dt \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}}\,\frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}} G(x,t)\,\frac{dx}{x-\xi} \tag{19}$$

und

$$\mathfrak{J}_2 = \int_{-1}^{+1} f(t)\,dt \int_{-1}^{+1} \Big(\frac{x^{n-\mu}}{(n-\mu)!}\gamma_0(\xi) + \cdots + \gamma_{n-\mu}(\xi) \tag{20}$$
$$+ \mathfrak{J}_{n-u}(x-\xi)\Big)\,\varphi(\xi,t)\,d\xi \quad (\mu = 0, 1, \ldots, n)$$

zu beweisen. Es ist

$$\mathfrak{J}_1 = \lim_{\eta\to 0} \mathfrak{J}_{1\eta}$$

mit

$$\mathfrak{J}_{1\eta} = \int_{-1}^{\xi-\eta} + \int_{\xi+\eta}^{+1} f(t)\,dt \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}}\,\frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}} G(x,t)\,\frac{dx}{x-\xi}.$$

Hier schreiben wir

$$\frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}} G(x,t) = \Big(\frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}} G(x,t) - \frac{\partial^{n+1}}{\partial \xi^{n+1}} G(\xi,t)\Big) + \frac{\partial^{n+1}}{\partial \xi^{n+1}} G(\xi,t),$$

entsprechend spaltet sich das Integral $\mathfrak{J}_{1\eta}$ in eine Summe zweier Integrale auf, deren erstes einen überall endlichen Integranden hat, während das zweite sich als Produkt eines Integrals über t und eines Integrals über x schreiben läßt. In beiden Integralen ist die Integrationsreihenfolge also vertauschbar, und es wird

$$\mathfrak{J}_{1\eta}^{*} = \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}}\,F(x,\eta,\xi)\,\frac{dx}{x-\xi} \tag{21}$$

mit

$$F(x,\eta,\xi) = \int_{-1}^{\xi-\eta} + \int_{\xi+\eta}^{+1} \frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}} G(x,t)\,f(t)\,dt.$$

Wegen der Beschränktheit des Integranden gilt nun erstens gleichmäßig in x und ξ

$$\lim_{\eta\to 0} F(x,\eta,\xi) = \int_{-1}^{+1} \frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}} G(x,t)\,f(t)\,dt; \tag{22}$$

zweitens besitzt $F(x, \eta, \xi)$ eine partielle Ableitung nach x, nämlich

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x, \eta, \xi) = \int\limits_{-1}^{\xi-\eta} + \int\limits_{\xi+\eta}^{+1} \frac{\partial^{n+2}}{\partial x^{n+2}} G(x, t) f(t)\, dt$$
$$+ \begin{Bmatrix} 0 & \text{für } |x - \xi| < \eta \\ f(x) \dfrac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}} G(x, t) \Big|_{t = x+0}^{t = x-0} & \text{für } |x - \xi| > \eta \end{Bmatrix}.$$

Hiernach existiert eine von x, ξ und η unabhängige Konstante C so, daß

$$\frac{F(x, \eta, \xi) - F(\xi, \eta, \xi)}{x - \xi} < C \tag{23}$$

ist. Schließlich existiert wegen (22) für jedes $\varepsilon > 0$ gleichmäßig in x und ξ für $|x - \xi| > \varepsilon$ der Grenzwert

$$\lim_{\eta \to 0} \frac{F(x, \eta, \xi) - F(\xi, \eta, \xi)}{x - \xi} = E(x, \xi) \tag{24}$$

und stellt eine über das ganze Intervall integrierbare Funktion von x dar.

Nach diesen Vorbereitungen kann endlich die Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge in (19) gezeigt werden.

Es ist nach (21)

$$\mathfrak{J}_{1\eta} = \int\limits_{-1}^{\xi-\varepsilon} + \int\limits_{\xi+\varepsilon}^{+1} \sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}} \frac{F(x, \eta, \xi) - F(\xi, \eta, \xi)}{x - \xi}\, dx$$
$$+ F(\xi, \eta, \xi) \int\limits_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}} \frac{dx}{x - \xi} + C_\eta(\varepsilon),$$

wobei $C_\eta(\varepsilon)$ nach (23) gleichmäßig in ξ und η mit ε gegen 0 strebt:

$$|C_\eta(\varepsilon)| < \varepsilon \cdot 2 \sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}}\, C.$$

Wegen der gleichmäßigen Existenz der Grenzwerte (22) und (24) gilt somit

$$\mathfrak{J}_1 = \lim_{\eta \to 0} \mathfrak{J}_{1\eta} = \int\limits_{-1}^{\xi+\varepsilon} + \int\limits_{\xi+\varepsilon}^{+1} \sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}} E(x, \xi)\, dx$$
$$+ \int\limits_{-1}^{+1} \frac{\partial^{n+1}}{\partial \xi^{n+1}} G(\xi, t) f(t)\, dt \cdot \int\limits_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}} \frac{dx}{x-\xi}$$
$$+ \lim_{\eta \to 0} C_\eta(\varepsilon)$$
$$= \int\limits_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}} E(x, \xi)\, dx$$
$$+ \int\limits_{-1}^{+1} \frac{\partial^{n+1}}{\partial \xi^{n+1}} G(\xi, t) f(t)\, dt \cdot \int\limits_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}} \frac{dx}{x-\xi} + D(\varepsilon),$$

wobei $D(\varepsilon)$ ebenso wie $C_\eta(\varepsilon)$ gleichmäßig in ξ gegen 0 strebt. $D(\varepsilon)$ muß aber nunmehr verschwinden, da alle übrigen Terme dieser Gleichung von ε nicht abhängen. Führt man hierin den Wert (24) von $E(x, \xi)$ unter Beachtung von (22) ein, so erhält man die Behauptung.

6. Einfacher läßt sich das Integral (20) behandeln. $\varphi(\xi, t)$ wird nach (17) durch seine 3 Summanden ersetzt. Für den letzten ist nichts zu beweisen. Der erste Summand besitzt logarithmische Singularitäten für $\xi = t$, die von der Sprungstelle von $\frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}} G(x, t)$ herrühren, sowie an den Intervallenden schwache algebraische Singularitäten, die eine absolute Integrierbarkeit nicht verhindern. Für den ersten Summanden von $\varphi(\xi, t)$ ist also nichts mehr zu beweisen.

Es bleibt damit übrig, die Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge für

$$\mathfrak{J}_3 = \int_{-1}^{+1} f(t)\, dt \int_{-1}^{+1} \left(\frac{x^{n-\mu}}{(n-\mu)!}\gamma_0(\xi) + \cdots + \gamma_{n-\mu}(\xi) + \mathfrak{J}_{n-\mu}(x-\xi)\right) \sqrt{\frac{1-t^2}{1-\xi^2}}\, \frac{d\xi}{t-\xi}$$

zu beweisen. Wir ersetzen dazu $f(t) \cdot \sqrt{1-t^2}$ durch $f(t)$ und schreiben

$$\bar{f}(\xi) = \left(\frac{x^{n-\mu}}{(n-\mu)!}\gamma_0(\xi) + \cdots + \gamma_{n-\mu}(\xi) + \mathfrak{J}_{n-\mu}(x-\xi)\right) \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}},$$

haben also die Identität von

$$\mathfrak{J}_3 = \int_{-1}^{+1} f(t)\, dt \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-1}^{t-\varepsilon} + \int_{t+\varepsilon}^{+1} \bar{f}(\xi) \frac{d\xi}{t-\xi}$$

mit

$$\mathfrak{J}_3^* = \int_{-1}^{+1} \bar{f}(\xi)\, d\xi \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-1}^{\xi-\varepsilon} + \int_{\xi+\varepsilon}^{+1} f(t) \frac{dt}{t-\xi}$$

nachzuweisen. Vor dem Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ ist die Differenz beider Integrale von der Größenordnung $\varepsilon \ln \varepsilon \cdot f(t)\, \bar{f}(\xi)$. Für verschwindendes ε strebt diese Differenz mithin gegen 0, was zu beweisen war.

II.

Festlegung der Nebenbedingungen für die Greensche Funktion.

7. Nach 4. besteht die Aufgabe, der Funktion $G(x, t)$ solche Nebenbedingungen aufzuerlegen, daß die Gleichungen (18) bestehen. Diese Nebenbedingungen entsprechen den Randbedingungen bei Differentialgleichungsproblemen. (18) wird $n+1$ Bedingungsgleichungen ergeben, aus denen sich die Funktionen $r_\nu(t)$ in (13) in eindeutiger Weise bestimmen lassen.

Wir beginnen bei der Herstellung der Gleichungen (18) mit $\mu = n$ und gehen dazu von dem Ansatz (13) aus. Es werde

$$\psi_\nu(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}} \frac{h_\nu^{(n+1)}(x)}{x-\xi} \, dx \tag{25}$$

gesetzt. Dann ist auf Grund des erwähnten Zusammenhanges zwischen den Integralgleichungen (9) und (12)

$$h_\nu^{(n+1)}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\psi_\nu(\xi)}{x-\xi} \, d\xi.$$

Man darf unter dem Integralzeichen nach x integrieren und erhält

$$h_\nu^{(n)}(x) + k_\nu = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \ln|x-\xi| \, \psi_\nu(\xi) \, d\xi \tag{26}$$

mit einer Konstanten k_ν. Weiterhin werde

$$h_\nu(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < t \\ h_\nu(x) & \text{für } x > t \end{cases} \tag{27}$$

und

$$\psi_\nu(\xi,t) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}} \frac{\frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}} h_\nu(x,t)}{x-\xi} \, dx \tag{28}$$

gesetzt. Dann gilt in analoger Weise mit einer von x nicht abhängigen Funktion

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} h_\nu(x,t) + k_\nu(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \ln|x-\xi| \, \psi_\nu(\xi,t) \, d\xi. \tag{29}$$

Eine explizite Berechnung der k_ν und $k_\nu(t)$ folgt an späterer Stelle (Abschnitt 10), damit hier der Gedankengang nicht unterbrochen wird.

Wir brauchen schließlich die Formeln

$$a(x,t) = \int_{-1}^{+1} \frac{\ln|x-\xi|}{\sqrt{1-\xi^2}\,(t-\xi)} \, d\xi = 0 \tag{30}$$

und

$$-\pi \ln 2 = \int_{-1}^{+1} \frac{\ln|x-\xi|}{\sqrt{1-\xi^2}} \, d\xi. \tag{31}$$

Zur Herleitung des Wertes des Integrals (31) beachte man, daß es durch Integration der aus (9) und (12) folgenden Identität

$$0 = \int_{-1}^{+1} \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}\,(x-\xi)}$$

nach x entsteht und demnach eine Konstante darstellt. Setzt man $x = 0$, $\xi = \cos\zeta$, so läßt sich (31) sehr leicht beweisen.

Zum Beweise von (30) wird zunächst

$$A(x,t) = \int_0^x a(x,t)\,dx = \int_{-1}^{+1} \frac{(x-\xi)\,(\ln|x-\xi|-1)}{\sqrt{1-\xi^2}\,(t-\xi)}\,d\xi$$

gebildet und hierin die Identität

$$\frac{x-\xi}{t-\xi} = 1 + \frac{x-t}{t-\xi}$$

angewendet. Man erhält dann

$$\begin{aligned} A(x,t) &= -\pi\,(1+\ln 2) + (x-t)\int_{-1}^{+1} \frac{\ln|x-\xi|}{\sqrt{1-\xi^2}\,(t-\xi)}\,d\xi \\ &\qquad + (x-t)\int_{-1}^{+1} \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}\,(t-\xi)}\,; \end{aligned}$$

das letzte Integral ist 0, also

$$A(x,t) = -\pi\,(1+\ln 2) + (x-t)\frac{\partial}{\partial x}A(x,t).$$

Es hängt demnach $a(x,t)$ von x nicht ab.

Es ist nun andererseits

$$\begin{aligned} a(x,t) &= \ln x \int_{-1}^{+1} \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}\,(1-\xi)} + \int_{-1}^{+1} \frac{\ln\left|1-\frac{\xi}{x}\right|}{\sqrt{1-\xi^2}\,(t-\xi)}\,d\xi \\ &= \int_{-1}^{+1} \frac{\ln\left|1-\frac{\xi}{x}\right|}{\sqrt{1-\xi^2}\,(t-\xi)}\,d\xi; \end{aligned}$$

dieser Ausdruck wird mit wachsendem x immer kleiner. Da er aber von x nicht abhängt, verschwindet er identisch, wie zu beweisen war.

Nach (13), (17) und (25) bis (31) ergibt sich nun

$$(32)\quad \varphi(\xi,t) = \sum_{\nu=0}^{n} \big(\psi_\nu(\xi)r_\nu(t) + \psi_\nu(\xi,t)s_\nu(t)\big) + \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{1-t^2}{1-\xi^2}}\,\frac{1}{t-\xi} + \frac{\varphi_0(t)}{\pi\sqrt{1-\xi^2}}$$

und

$$(33)\qquad \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \ln|x-\xi|\,\psi(\xi,t)\,d\xi = \frac{\partial^n}{\partial x^n}G(x,t) + \sum_{\nu=0}^{n}\left(k_\nu r_\nu(t) + k_\nu(t)s_\nu(t)\right) - \varphi_0(t)\frac{\ln 2}{\pi}.$$

Die letzte der Gleichungen (18) ($\mu = n$) verlangt nach (33) also

$$(34)\qquad \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \gamma_0(\xi)\,\varphi(\xi,t)\,d\xi = -\sum_{\nu=0}^{n}\left(k_\nu r_\nu(t) + k_\nu(t)s_\nu(t)\right) + \varphi_0(t)\frac{\ln 2}{\pi}.$$

Gilt (34), so integriere man die nunmehr gültige letzte Gleichung (18) nach x von 0 bis x und erhält die vorletzte

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \left(x\gamma_0(\xi) - \gamma_1(\xi) - \mathfrak{J}_1(x-\xi)\right)\varphi(\xi,t)\,d\xi = \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}G(x,t),$$

wofern

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \left(\gamma_1(\xi) + \mathfrak{J}_1(\xi)\right)\varphi(\xi,t)\,dt = \left[\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}G(x,t)\right]_{x=0}$$

ist. Dieses Verfahren wird nacheinander n-mal fortgesetzt, und man hat neben (34) die n Gleichungen

$$(35)\qquad \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \left(\gamma_\mu(\xi) + \mathfrak{J}_\mu(\xi)\right)\varphi(\xi,t)\,dt = \left[\frac{\partial^{n-\mu}}{\partial x^{n-\mu}}G(x,t)\right]_{x=0} \qquad (\mu = 1,\ldots,n)$$

zu erfüllen. Das sind zusammen $n+1$ lineare inhomogene Gleichungen für die $n+1$ noch unbekannten Funktionen $r_\nu(t)$.

Bestimmung der Funktionen $r_\nu(t)$. Existenzfragen.

8. Eine explizite Bestimmung der $r_\nu(t)$ kann natürlich nur in Spezialfällen durchgeführt werden, wo die Funktionen $c_\mu(x)$, $\gamma_\mu(\xi)$ bekannt sind. Jedoch können noch die Gleichungen (34), (35) in eine übersichtlichere Form gebracht und ihre Lösbarkeit im allgemeinen Falle erörtert werden.

Die Integrale auf der linken Seite von (34) und (35) haben die Form

$$(36)\qquad \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \left(\gamma_\mu(\xi) + \mathfrak{J}_\mu(\xi)\right)\varphi(\xi,t)\,d\xi = \sum_{\nu=0}^{n}\left(\varrho_{\mu\nu}\cdot r_\nu(t) + \varrho_{\mu\nu}(t)s_\nu(t)\right) + \sigma_\mu(t) + \sigma_\mu\cdot\varphi_0(t) \qquad (\mu = 0,\ldots,n)$$

mit

$$
(37)\quad
\begin{aligned}
\varrho_{\mu\nu} &= \frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{+1}\left(\gamma_\mu(\xi)+\mathfrak{J}_u(\xi)\right)d\xi\int_{-1}^{+1}\sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}}\,\frac{h_\nu^{(n+1)}(x)}{x-\xi}\,dx,\\
\varrho_{\mu\nu}(t) &= \frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{+1}\left(\gamma_\mu(\xi)+\mathfrak{J}_u(\xi)\right)d\xi\int_{-1}^{+1}\sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}}\,\frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}}h_\nu(x,t)\,\frac{dx}{x-\xi},\\
\sigma_\mu(t) &= \frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{+1}\sqrt{\frac{1-t^2}{1-\xi^2}}\,\frac{\gamma_\mu(\xi)+\mathfrak{J}_\mu(\xi)}{t-\xi}\,d\xi,\\
\sigma_u &= \frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{+1}\frac{\gamma_u(\xi)+\mathfrak{J}_u(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}\,d\xi,
\end{aligned}
$$

wobei für $\mu = 0$ das $\mathfrak{J}_0(\xi)$ auszulassen ist.

Die rechten Seiten von (35) haben die Form

$$
(38)\qquad -\sum_{\nu=0}^{n}\left[h_\nu^{(n-u)}(0)\,r_\nu(t)+\begin{Bmatrix}0 & \text{für } t>0\\ h_\nu^{(n-\mu)}(0)\,s_\nu(t) & \text{für } t<0\end{Bmatrix}\right]
$$

$$(\mu = 1, \ldots, n).$$

Die Funktionen (37) und die von $r_\nu(t)$ freien Glieder in (38) sind sämtlich stetige, allerdings teilweise nur stückweise stetig differenzierbare Funktionen. wie man leicht unter Benutzung von (14) und (27) nachweist.

Mit dem System der $r_\nu(t)$ als Zeilenvektor kann man (34) und (35) in der symbolischen Form

$$
(39)\qquad \mathfrak{r}(t)\mathfrak{R} = \mathfrak{u}(t) + \varphi_0(t)\cdot\mathfrak{v}
$$

anschreiben, wobei $\mathfrak{R}$ eine konstante Matrix, $\mathfrak{v}$ ein konstanter Vektor und $\mathfrak{u}(t)$ ein Vektor aus stetigen Funktionen von t ist.

Besitzt $\mathfrak{R}$ eine Inverse, so ist (39) eindeutig auflösbar, und die Lösung hat die Form

$$
\mathfrak{r}(t) = \mathfrak{l}(t) + \varphi_0(t)\mathfrak{n}.
$$

Nunmehr ist $G(x, t)$ vollständig definiert und damit auch

$$
\varphi(\xi, t) = \mathsf{\Lambda}(\xi, t) + \varphi_0(t)\,\mathsf{N}(\xi).
$$

Wie man sieht, ist neben $\mathsf{\Lambda}(\xi, t)$ auch $\mathsf{N}(\xi)$ eindeutig bestimmt. In diesem Falle besitzt (1) für jedes stetig differenzierbare $f(t)$ die Lösung (5), es gibt im wesentlichen eine einzige Lösung der zu (1) gehörigen homogenen Gleichung (6) und jede Lösung von (1) entsteht aus einer festen durch Addition von Vielfachen der Lösung von (6).

9. Die einzige wesentliche Schwierigkeit bei der numerischen Berechnung des lösenden Kerns (17) von (1) liegt in der Bestimmung der $r_\nu(t)$. Da man aber nicht den lösenden Kern, sondern für ein jeweils gegebenes $f(x)$ nur die Funktion $\varphi(\xi)$ sucht, genügt es, wenn man die Konstanten

$$r_\nu[f] = \int_{-1}^{+1} r_\nu(t)\, f(t)\, dt \tag{40}$$

berechnet. Setzt man nämlich diese an Stelle der $r_\nu(t)$ in (17) ein, so bekommt man die Lösung $\varphi(\xi)$ von (1). Führt man noch die Abkürzungen

$$\varrho_\mu[f] = \sum_{\nu=0}^{n} \int_{-1}^{+1} \varrho_{\mu\nu}(t) s_\nu(t) f(t)\, dt, \tag{41}$$

$$k[f] = \sum_{\nu=0}^{n} k_\nu(t) s_\nu(t) f(t)\, dt, \tag{42}$$

$$\sigma_\mu[f] = \int_{-1}^{+1} \sigma_\mu(t) f(t)\, dt \tag{43}$$

ein, so ist es das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} &\sum_{\nu=0}^{n} (\varrho_{0\nu} + k_\nu)\, r_\nu[f] = -\sigma_0[f] - k[f] + \varphi_0 \cdot \left(\frac{\ln 2}{\pi} - \sigma_0\right) \\ &\sum_{\nu=0}^{n} \left(\varrho_{\mu\nu} + h_\nu^{(n-\mu)}(0)\right) r_\nu[f] = -\sigma_\mu[f] - \sum_{\nu=0}^{n} h_\nu^{(n-\mu)}(0) \int_{-1}^{0} s_\nu(t) f(t)\, dt - \varphi_0 \cdot \sigma_\mu \end{aligned} \tag{44}$$

mit derselben Koeffizientenmatrix $\mathfrak{R}$ wie (39), das man aufzulösen hat, was im Einzelfall keine Schwierigkeiten mehr bereitet.

Berechnung der k_ν und $k_\nu(t)$.

10. Es wird gesetzt

$$\Psi_\nu(\xi) = \int_{-1}^{\xi} \psi_\nu(\xi)\, d\xi; \tag{45}$$

dann ist $\Psi_\nu(-1) = 0$ und

$$\Psi_\nu(1) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1-x^2}\, h_\nu^{(n+1)}(x)}{x-\xi}\, dx.$$

Hier darf auf Grund einer zu 6. völlig analogen Überlegung die Integrationsreihenfolge vertauscht werden, und man erhält

$$\Psi_\nu(1) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-x^2}\, h_\nu^{(n+1)}(x)\, dx \int_{-1}^{+1} \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}\,(x-\xi)} = 0.$$

Durch partielle Integration wird nun

$$\int_{-1}^{+1} \ln|x-\xi|\,\varphi_\nu(\xi)\,d\xi = \ln|x-\xi|\,\Psi_\nu(\xi)\Big|_{\xi=-1}^{\xi=+1} + \int_{-1}^{+1} \frac{\Psi_\nu(\xi)}{x-\xi}\,d\xi$$
$$= \int_{-1}^{+1} \frac{\Psi_\nu(\xi)}{x-\xi}\,d\xi,$$

also nach (26)

$$h_\nu^{(n)}(x) + k_\nu = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{\Psi_\nu(\xi)}{x-\xi}\,d\xi.$$

Auf Grund des Zusammenhanges zwischen den Integralgleichungen (9) und (12) ist jetzt

$$\Psi_\nu(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}}\,\frac{h_\nu^{(n)}(x)+k_\nu}{x-\xi}\,dx + \frac{k_\nu'}{\pi\sqrt{1-\xi^2}} \tag{46}$$

mit einer weiteren Konstanten k_ν'. Diese Formel wird nun nach ξ differenziert und das Ergebnis mit (25) unter Benutzung von (45) verglichen. Zur Bildung der Ableitung von (46) ist zu benutzen:

$$\frac{d}{d\xi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1-x^2}\,(h_\nu^{(n)}(x)+k_\nu)}{x-\xi}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}\,(h_\nu^{(n)}(x)+k_\nu)}{x-\xi}\Bigg|_{x=\xi+\varepsilon}^{x=\xi-\varepsilon}$$
$$+\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-1}^{\xi-\varepsilon} + \int_{\xi+\varepsilon}^{+1}\right)\sqrt{1-x^2}\,(h_\nu^{(n)}(x)+k_\nu)\,\frac{dx}{(x-\xi)^2};$$

das wird nach partieller Integration

$$= -\frac{\sqrt{1-x^2}\,(h_\nu^{(n)}(x)+k_\nu)}{x-\xi}\Bigg|_{x=-1}^{x=+1} + \int_{-1}^{+1} \frac{\frac{d}{dx}\sqrt{1-x^2}\,(h_\nu^{(n)}(x)+k_\nu)}{x-\xi}\,dx,$$

wobei der erste Summand verschwindet. Man erhält somit

$$\Psi_\nu'(\xi) = \frac{\xi}{\pi\sqrt{(1-\xi^2)^3}}\int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1-x^2}\,(h_\nu^{(n)}(x)+k_\nu)}{x-\xi}\,dx + \frac{k_\nu'\,\xi}{\pi\sqrt{(1-\xi^2)^3}} +$$
$$+\frac{1}{\pi\sqrt{1-\xi^2}}\int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1-x^2}\,h_\nu^{(n+1)}(x)}{x-\xi}\,dx - \frac{1}{\pi\sqrt{1-\xi^2}}\int_{-1}^{+1} \frac{x\,(h_\nu^{(n)}(x)+k_\nu)}{\sqrt{1-x^2}\,(x-\xi)}\,dx$$
$$= \varphi_\nu(\xi) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-\xi^2}}\int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1-x^2}\,h_\nu^{(n+1)}(x)}{x-\xi}\,dx.$$

Es folgt hieraus

$$\int_{-1}^{+1} \frac{(\xi (1-x^2) - x(1-\xi^2))\,(h_\nu^{(n)}(x) + k_\nu)}{\sqrt{1-x^2}\,(x-\xi)}\, dx + \frac{k_\nu'}{\pi}\,\xi = 0,$$

also

(47) $$k_\nu = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{h_\nu^{(n)}(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx;$$

der Wert von k_ν' interessiert nicht.

Die gleichen Rechnungen lassen sich mit der unstetigen Funktion (27) an Stelle von $h_\nu(x)$ durchführen, und man erhält

(48) $$k_\nu(t) = -\frac{1}{\pi}\int_{t}^{1} \frac{h_\nu^{(n)}(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

Entartete Kerne.

11. In (2) wird

(49) $$c_\nu(x) = p^{\nu-1} c_\nu^*(x), \quad \gamma_\nu(\xi) = p^{-\nu-1}\gamma_\nu^*(\xi)$$

gesetzt, mit der Absicht, später zur Grenze $p = 0$ überzugehen. Der Kern L geht bei diesem Grenzprozeß in einen Kern L^* über, der von logarithmischen Bestandteilen frei ist. Wir wollen zeigen, daß auch Λ und N Grenzwerte Λ^* und N^* besitzen, die mit L^* in derselben Beziehung stehen wie Λ und N mit L.

Wir bedienen uns dabei der folgenden Schreibweise: Eine Formel, die aus einer Formel (m) durch den beschriebenen Grenzübergang entsteht, wird mit (m^*) beziffert. Eine Größe $P(x, \xi)$, die hierbei gleichmäßig in x, ξ und p beschränkt bleibt, wird

$$P(x, \xi) = O(p)$$

geschrieben. Die Formel

(2*) $$L(x, \xi) = \frac{1}{x-\xi} + \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu^*(x)\,\gamma_\nu^*(\xi) + p\,O(p)$$

$$= L^*(x, \xi) + p\,O(p)$$

fällt zwar nicht unter diese Abmachung, sie darf jedoch mit Rücksicht auf die schwache, die Integrierbarkeit nicht störende Unendlichkeitsstelle des Logarithmus ausnahmsweise zugelassen werden.

Das Lösungsfundamentalsystem $h_\nu(x)$ der zu (10) gehörigen homogenen linearen Differentialgleichung werde durch die Zusatzbedingungen

$$h_\nu^{(\mu)}(0) = \begin{cases} p^{n-\mu} & \text{für } \mu = n - \nu \\ 0 & \text{für } \mu \neq n - \nu \end{cases}$$

präzisiert. Setzt man

$$h_\nu(x) = l_\nu(y), \quad y = px, \tag{50}$$

so gilt

$$l_\nu^{(n+1)}(y) + c_0^*(x)\, l_\nu^{(n)}(y) + \cdots + c_n^*(x)\, l_\nu(y) = 0, \tag{51}$$

$$l_\nu^{(\mu)}(0) = \begin{cases} 1 & \text{für } \mu = n - \nu \\ 0 & \text{für } \mu \neq n - \nu \end{cases}. \tag{52}$$

Es gilt das Verhalten der $l_\nu^{(u)}(y)$ für kleine p zu untersuchen. Dazu seien zunächst $\bar{l}_\nu(y)$ Funktionen, die den Differentialgleichungen

$$\bar{l}_\nu^{(n+1)}(y) = \bar{c}_0 \bar{l}_\nu^{(n)}(y) + \cdots + \bar{c}_n \bar{l}_\nu(y)$$

und denselben Anfangsbedingungen (52) wie die $l_\nu(y)$ genügen; dabei soll

$$\bar{c}_\nu = \operatorname{Max} |c_\nu^*(x)|$$

für $-1 \leqq x \leqq 1$ sein. Dann ist für x in diesem Intervall

$$|l_\nu^{(\mu)}(y)| \leqq \bar{l}_\nu^{(\mu)}(y) = O(p) \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, n+1). \tag{53}$$

Jetzt gilt

$$l_\nu^{(\mu)}(y) = l_\nu^{(\mu)}(0) + px\, l_\nu^{(\mu+1)}(\vartheta_{\nu\mu} y) \qquad (\mu = 0, \ldots, n)$$

mit Zahlen $0 \leqq \vartheta_{\nu\mu} \leqq 1$. Das ergibt nach (52) und (53)

$$l_\nu^{(\mu)}(y) = \begin{Bmatrix} 1 & \text{für } \mu = n - \nu \\ 0 & \text{für } \mu \neq n - \nu \end{Bmatrix} + p\, O(p) \qquad (\mu = 0, \ldots, n). \tag{54}$$

(54) in (51) eingesetzt, liefert sodann

$$l_\nu^{(n+1)}(y) = -c_\nu^*(x) + p\lambda_\nu(x) \tag{55}$$

mit

$$\lambda_\nu(x) = O(p), \quad \frac{d}{dx}\lambda_\nu(x) = O(p), \tag{56}$$

wovon die zweite Behauptung noch zu beweisen ist.

Wir beachten dazu, daß die $h_\nu^{(u)}(x)$ analytische ganze Funktionen von p sind. Die $l_\nu^{(u)}(y)$ entstehen aus ihnen durch Division durch p^u; da diese letzteren wegen (53) für $p = 0$ endlich bleiben, sind sie auch analytische ganze Funktionen von p. Es ist speziell also

$$l_\nu^{(n+1)}(y) = -c_\nu^*(x) + p\alpha_1(x) + p^2\alpha_2(x) + \cdots,$$

woraus sich durch Integration über den Einheitskreis

$$\alpha_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{l_\nu^{(n+1)}(y)}{p^{\nu+1}}\,dp$$

ergibt. Da die $c_\iota(x)$ voraussetzungsgemäß nach x stetig differenzierbar sind, folgt aus dieser Gleichung auch die stetige Differenzierbarkeit der $\alpha_\nu(x)$. Nunmehr ergibt sich die zweite Behauptung (56) auch.

Jetzt ist der lösende Kern für (2*) verhältnismäßig leicht berechnet. Zunächst folgt aus (14), (50) und (54)

(14*) $$s_\nu(t) = p^{-n}O(p).$$

Sodann aus (47), (48), (50) und (54)

(47*) $$k_\nu = \begin{Bmatrix} -p^n & \text{für } \nu = 0 \\ 0 & \text{für } \nu > 0 \end{Bmatrix} + p^{n+1}O(p),$$

(48*) $$k_\nu(t) = p^n O(p).$$

Ferner aus (37), (49), (50), (55) und (56), unter eventueller Vertauschung der Integrationsreihenfolge

$(37^*)_1$ $$\begin{aligned}\varrho_{\mu\nu} &= -p^{n-\mu}\cdot\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{+1}\!\!\int \sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}}\,\frac{\gamma_\mu^*(\xi)\,c_\nu^*(x)}{x-\xi}\,dx\,d\xi + p^{n-\mu+1}O(p)\\ &= p^{n-\mu}\cdot\varrho_{\mu\nu}^* + p^{n-\mu+1}O(p),\end{aligned}$$

$(37^*)_2$ $$\begin{aligned}\varrho_{\mu\nu}(t) &= -p^{n-\mu}\cdot\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{+1}\gamma_\mu^*(\xi)\,d\xi\int_t^1 \sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}}\,\frac{c_\nu^*(x)}{x-\xi}\,dx + p^{n-\mu+1}O(p)\\ &= p^{n-\mu}\varrho_{\mu\nu}^*(t) + p^{n-\mu+1}O(p),\end{aligned}$$

$(37^*)_3$ $$\begin{aligned}\sigma_\mu(t) &= p^{-\mu-1}\cdot\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{+1}\sqrt{\frac{1-t^2}{1-\xi^2}}\,\frac{\gamma_\mu^*(\xi)}{t-\xi}\,d\xi + p^{-\mu}O(p)\\ &= p^{-\mu-1}\cdot\sigma_\mu^*(t) + p^{-\mu}O(p),\end{aligned}$$

$(37^*)_4$ $$\begin{aligned}\sigma_\mu &= p^{-\mu-1}\cdot\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{+1}\frac{\gamma_\mu^*(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}\,d\xi + p^{-\mu}O(p)\\ &= p^{-\mu-1}\cdot\sigma_\mu^* + p^{-\mu}O(p).\end{aligned}$$

Nun aus (34), (35), (14*), (47*), (48*), (37*)

(57) $$r_\nu(t) = p^{-n-1}\cdot r_\nu^*(t) + p^{-n}O(p),$$

wobei die $r_\nu^*(t)$ den linearen Gleichungen

$$(34^*) \qquad \sum_{\nu=0}^{n} \varrho_{0\nu}^* \, r_\nu^*(t) + \sigma_0^*(t) + \varphi_0(t) \cdot \sigma_0^* = r_0^*(t)$$

$$(35^*) \qquad \sum_{\nu=0}^{n} \varrho_{\mu\nu}^* \, r_\nu^*(t) + \sigma_\mu^*(t) + \varphi_0(t) \cdot \sigma_\mu^* = r_\mu^*(t)$$

genügen. (34*) ist als Spezialfall in (35*) enthalten, aber nicht (34) in (35).

Der lösende Kern wird jetzt endlich nach (13), (17), (50), (55), (56), (14*), (57)

$$(17^*) \qquad \begin{aligned} \varphi(\xi, t) = & -\frac{1}{\pi} \sum_{\nu=0}^{n} \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}} \, c_\nu^*(x) \, r_\nu^*(t) \frac{dx}{x-\xi} \\ & + \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1-t^2}{1-\xi^2}} \frac{1}{t-\xi} + \frac{\varphi_0(t)}{\pi\sqrt{1-\xi^2}} + p\,O(p) \\ = & \ \varphi^*(\xi, t) + p\,O(p). \end{aligned}$$

Wie die Formeln (2*) und (17*) zeigen, ist der Grenzübergang $p \to 0$ durchführbar, ohne daß dadurch die Beziehung gestört würde, daß (17*) der allgemeinste lösende Kern von (2*) ist. Ist nämlich $f(x)$ irgendeine stetig differenzierbare Funktion, so gilt für

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) = \int_{-1}^{+1} \varphi(\xi, t)\, f(t)\, dt & = \int_{-1}^{+1} \varphi^*(\xi, t)\, f(t)\, dt + p\,O(p) \\ & = \varphi^*(\xi) + p\,O(p) \end{aligned}$$

die Integralgleichung

$$\int_{-1}^{+1} L^*(x, \xi)\, \varphi^*(\xi)\, d\xi = f(x) + p\,O(p).$$

Daß (17*) ein lösender Kern von (2*) ist (bei $p = 0$), kann man selbstverständlich viel einfacher nachweisen, indem man nur (37*), (34*), (35*) und den Zusammenhang zwischen den Integralgleichungen (9) und (12) ausnutzt. Jedoch würde man dann keine Aussage über die Größe des Fehlergliedes bei dem Grenzübergang erhalten.

Die Bemerkungen des 9. Abschnitts zur numerischen Auflösung einer Integralgleichung (1) gelten für Kerne (2*) in gleicher Weise.

Hilfsformeln für die praktische Rechnung bei speziellen Differenzkernen.

12. Es soll jetzt einmal zunächst untersucht werden, was für Differenzkerne $L(x, \xi) = L(x - \xi)$ überhaupt in eine Reihe (2) mit eventuell unendlicher Gliederzahl entwickelt werden können. Wir setzen dazu

$$x - \xi = w.$$

Es werde ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen, daß

$$\lim_{\xi \to x} (x - \xi) L(x - \xi) = 1$$

ist. Nun werden die Konstanten c_0, α_0 so bestimmt, daß

$$L(w) - \frac{1}{w} - c_0 \ln |w| - \alpha_0 = L_1(w)$$

für $w = 0$ verschwindet. Dann c_1, α_1 so, daß

$$L_1'(w) - c_1 \ln |w| - \alpha_1 = L_2(w)$$

für $w = 0$ verschwindet, und so fort.

Es ist dann nach (3)

$$L(w) = \frac{1}{w} + c_0 \mathfrak{J}_0(w) + \alpha_0 + c_1 \mathfrak{J}_1(w) + \alpha_1 w + \cdots \tag{58}$$
$$+ c_n \mathfrak{J}_n(w) + \frac{1}{n!} \alpha_n w^n + \int_0^w \cdots \int_0^w L_n(w)\, dw^n.$$

Mindestens einmal sei $c_n \neq 0$; dann ist das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= c_n \beta_0, \\
\alpha_{n-1} &= c_n \beta_1 + c_{n-1} \beta_0, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\alpha_0 &= c_n \beta_n + c_{n-1} \beta_{n-1} + \cdots + c_0 \beta_0
\end{aligned}$$

nach den β_ν auflösbar, und (58) läßt sich in der Form

$$L(w) = \frac{1}{w} + c_0(\beta_0 + \mathfrak{J}_0(w)) + c_1(\beta_0 w + \beta_1 + \mathfrak{J}_1(w)) + \cdots$$
$$+ c_n \left(\frac{1}{n!} \beta_0 w^n + \frac{1}{(n-1)!} \beta_1 w^{n-1} + \cdots + \beta_n + \mathfrak{J}_n(w) \right)$$
$$+ \int_0^w \cdots \int_0^w L_n(w)\, dw^n$$

schreiben. Das Restglied in dieser Formel ist

$$\left| \int_0^w \cdots \int_0^w L_n(w)\, dw^n \right| \leqq \frac{w^n}{n!} \left| L_n(w) \right|,$$

es strebt mit wachsendem n für alle w gegen 0, wenn nicht gleichzeitig $f_n(w)$ allzu stark anwächst.

In dieser Form lassen sich also alle Funktionen

$$L(w) = \frac{1}{w} + L_1(w) + \ln |w| \cdot L_2(w)$$

entwickeln, wobei entweder L_1 und L_2 Polynome sind, von denen L_1 nicht den größeren Grad hat, oder L_1 und L_2 in einem Kreise $|w| < \varrho < 2$ reguläre analytische nicht ganze rationale Funktionen. Speziell die HANKELsche Funktion $H_1^{(2)}(w)$ hat diese Eigenschaft.

Führt man wieder $x - \xi$ an Stelle von w ein, so geht (59) bei Vernachlässigung des Restes in (2) über, wenn man noch setzt:

$$c_\mu(x) = c_\mu, \quad \gamma_\mu(\xi) = \sum_{\nu=0}^{\mu} \frac{(-\xi)^{\mu-\nu}}{(\mu-\nu)!}\beta_\nu. \tag{60}$$

13. Bei solchermaßen spezialisierten Kernen läßt sich die Aufstellung des Gleichungssystems (44) zum großen Teil explizit leisten, wozu wir nunmehr übergehen. Formeln, die aus einer allgemeinen Formel (m) entstehen, schreiben wir zur leichteren Rückorientierung (m_1), (m_2) usw.

Zunächst stellen wir fest, daß

$$h_\nu(x) = e^{\lambda_\nu x} \tag{61}$$

ein Lösungsfundamentalsystem der zu (10) gehörigen homogenen Differentialgleichung ist. Dabei sind die λ_ν die Wurzeln der algebraischen Gleichung

$$p(\lambda_\nu) = \lambda_\nu^{n+1} + c_0\lambda_\nu^n + \cdots + c_n = 0;$$

wir wollen den einfacheren Fall voraussetzen, daß sie alle untereinander verschieden sind. Man rechnet leicht nach:

$$s_\nu(t) = e^{-\lambda_\nu t}\prod_{\mu \neq \nu}\frac{1}{\lambda_\mu - \lambda_\nu} = \frac{(-1)^{n-1}}{p'(\lambda_\nu)}e^{-\lambda_\nu t}. \tag{14_1}$$

Ferner.

$$k_\nu = -\lambda_\nu^n J_0(i\lambda_\nu), \tag{47_1}$$

wobei J_0 die nullte Besselsche Funktion bezeichnet.

Die Größen $\varrho_{\mu\nu}$ in (37) sind lineare homogene Integralformen, was durch die Schreibweise

$$\varrho_{\mu\nu} = \mathsf{P}[\gamma_\mu(\xi) + \mathfrak{J}_\mu(\xi),\ h_\nu^{(n+1)}(x)]$$

zum Ausdruck kommen soll.

Sie lassen sich mittels der speziellen Integralformen

$$\mathsf{P}[\cos\varrho\zeta,\ e^{\lambda x}], \quad \mathsf{P}[\xi^\varrho \ln|\xi|,\ e^{\lambda x}] \quad (\cos\zeta = \xi,\ \varrho = 0, 1, 2, \ldots)$$

linear zusammensetzen. Diese letzteren sind jetzt zu berechnen.

Verwendet man die bekannte Identität[2])

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\cos\varrho\zeta}{\sqrt{1-\xi^2}}\frac{d\xi}{x-\xi} = -\frac{\sin\varrho z}{\sin z} \qquad (\cos z = x), \tag{62}$$

so ergibt sich nach Vertauschung der Integrationsreihenfolge

$$\mathsf{P}[1, e^{\lambda x}] = 0 \tag{37_1}$$

und für $\varrho > 0$

$$\mathsf{P}[\cos\varrho\zeta,\ e^{\lambda x}] = -\frac{\lambda^{n+1}}{\pi}\int\limits_0^\pi e^{\lambda\cos z}\sin\varrho z\sin z\,dz$$

$$= \frac{\lambda^{n+1}}{2}\left(i^{\varrho+1}J_{\varrho+1}(-i\lambda) - i^{\varrho-1}J_{\varrho-1}(-i\lambda)\right),$$

wenn J_ϱ die ϱ-te Besselsche Funktion bezeichnet, infolge ihrer bekannten Rekursionsformel also

$$(37_2)\qquad \mathsf{P}[\cos\varrho\zeta,\ e^{\lambda x}] = i^{2-\varrho}\lambda^n J_\varrho(i\lambda) \qquad (\varrho > 0).$$

Weniger einfach sind die $\mathsf{P}[\xi^\varrho\ln|\xi|,\ e^{\lambda x}]$ zu berechnen. Ich muß mich leider damit begnügen, ein endliches Berechnungs*verfahren* anzugeben. Es ist nach (30)

$$\int\limits_{-1}^{+1}\frac{\ln|\xi|}{\sqrt{1-\xi^2}\,(x-\xi)}\,d\xi = 0,$$

hiernach und nach (31)

$$(63)\qquad \begin{aligned} &\int\limits_{-1}^{+1}\frac{\xi\ln|\xi|}{\sqrt{1-\xi^2}\,(x-\xi)}\,d\xi = -\int\limits_{-1}^{+1}\frac{\ln|\xi|}{\sqrt{1-\xi^2}} = \pi\ln 2,\\ &\int\limits_{-1}^{+1}\frac{\xi^2\ln|\xi|}{\sqrt{1-\xi^2}\,(x-\xi)}\,d\xi = x\cdot\pi\ln 2,\ \text{usw.}\end{aligned}$$

Also

$$(37_3)\qquad \begin{aligned} &\mathsf{P}[\xi^0\ln|\xi|,\ e^{\lambda x}] = 0,\\ &\mathsf{P}[\xi^1\ln|\xi|,\ e^{\lambda x}] = -i\lambda^n\ln 2\cdot J_1(i\lambda),\\ &\mathsf{P}[\xi^2\ln|\xi|,\ e^{\lambda x}] = \frac{i}{4}\lambda^{n+1}\ln 2\cdot\left(J_3(i\lambda) - 3J_1(i\lambda)\right),\ \text{usw.}\end{aligned}$$

Es sind also alle $\varrho_{\mu\nu}$ als Linearkombinationen von Besselschen Funktionen darstellbar.

Schließlich lassen sich noch die $\sigma_\mu(t)$ und σ_μ unter Anwendung von (62) und (63) explizit bestimmen, und damit auch die Integrale (43).

14. Die noch übrige Berechnung der Integrale (41) und (42) enthält die einzige Schwierigkeit, die bei der Lösung der Integralgleichung auftritt, und diese ist auch nicht erheblich. Neben $f(x)$ werden zunächst die Funktionen

$$(64)\qquad \mathfrak{f}_\nu(t) = \int\limits_{-1}^{t} e^{-\lambda_\nu x} f(x)\,dx$$

eingeführt. Es ergibt sich dann nach partieller Integration unter Benutzung von (14_1), (37) und (47)

$$(41_1)\quad \varrho_\mu[f] = -\frac{1}{\pi}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(-\lambda_\nu)^n}{p'(\lambda_\nu)}\int_{-1}^{+1}(\gamma_\mu(\xi)+\mathfrak{J}_\mu(\xi))\,d\xi\int_{-1}^{+1}\sqrt{\frac{1-t^2}{1-\xi^2}}\,\frac{e^{\lambda_\nu t}\,\mathfrak{f}_\nu(t)}{t-\xi}\,dt,$$

$$(42_1)\quad k[f] = \frac{1}{\pi}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(-\lambda_\nu)^n}{p'(\lambda_\nu)}\int_{-1}^{+1}\frac{e^{\lambda_\nu t}\,\mathfrak{f}_\nu(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(-\lambda_\nu)^n}{p'(\lambda_\nu)}\int_{0}^{\pi}e^{\lambda_\nu\cos\tau}\,\mathfrak{f}_\nu(\cos\tau)\,d\tau,$$

wobei man noch in (41_1) die Integration über ξ mit Hilfe der Formeln (62) und (63) explizit ausführen kann, so daß in beiden Fällen nur noch einfache Integrale übrigbleiben.

Hiermit ist jetzt alles zur Auflösung des Gleichungssystems (44) vorbereitet; hat man die $r_\nu[f]$ aus (44) bestimmt, so ist

$$(17_1)\quad \varphi(\xi) = \sum_{\nu=0}^{n}\lambda_\nu^{n+1}r_\nu[f]\,\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}}\,\frac{e^{\lambda_\nu x}}{x-\xi}\,dx$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\sqrt{\frac{1-t^2}{1-\xi^2}}\,\frac{f(t)}{t-\xi}\,dt+\frac{\varphi_0}{\pi\sqrt{1-\xi^2}}$$

die gesuchte Lösung der Integralgleichung. Das zweite und dritte Glied hier stellt die Grundlösung für den Kern $L(x,\xi) = (x-\xi)^{-1}$ dar; das erste gibt die Korrektur an, mit der diese Grundlösung bei allgemeinen Kernen (2) zu versehen ist. Es enthält die höheren transzendenten Funktionen

$$(25_1)\quad \chi(\xi,\lambda_\nu) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}}\,\frac{e^{\lambda_\nu x}}{x-\xi}\,dx = \lambda_\nu^{-n-1}\,\psi_\nu(\xi),$$

von denen ich zum Schluß einige einfache Eigenschaften angeben will.

15. Es ist

$$\chi(\xi,\lambda) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-\xi^2}}\int_{-1}^{+1}\frac{\sqrt{1-x^2}\,e^{\lambda x}-\sqrt{1-\xi^2}\,e^{\lambda\xi}}{x-\xi}\,dx+\frac{e^{\lambda\xi}}{\pi\sqrt{1-\xi^2}}\ln\left|\frac{1-\xi}{1+\xi}\right|,$$

wobei der erste Bestandteil in der Riemannschen Fläche von $\sqrt{1-\xi^2}$ eindeutig und im Endlichen bis auf Pole erster Ordnung in den beiden Verzweigungspunkten regulär ist. χ hat demnach für $\xi = \pm 1$ je eine algebraisch und logarithmisch singuläre Stelle.

Es soll für χ eine Reihenentwicklung hergeleitet werden. Man verifiziert dazu leicht

$$e^{\lambda x} = J_0(i\lambda) + 2\sum_{\varrho=1}^{\infty} i^{-\varrho} J_\varrho(i\lambda)\cos\varrho z \qquad (\cos z = x);$$

setzt man diese Reihe in (25_1) unter Benutzung von

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \sin\varrho z \frac{dx}{x-\xi} = -\cos\varrho\zeta^{2})$$

ein, so entsteht die gesuchte Entwicklung

$$\chi(\xi,\lambda) = 2\sum_{\varrho=1}^{\infty} i^{-\varrho} J_\varrho(i\lambda)\frac{\cos\varrho\zeta}{\sin\zeta}; \tag{65}$$

sie konvergiert für $|\xi| < 1$.

Für $\xi = \pm 1$ ist ferner

$$\left[\sqrt{1-\xi^2}\,\chi(\xi,\lambda)\right]_{\xi=\pm 1} = J_0(i\lambda) \mp J_1(i\lambda). \tag{66}$$

Schlußbemerkung. Das Iterationsverfahren.

16. In manchen Fällen dürfte sich die Berechnung der Lösungsfunktion $\varphi(\xi)$ in Form von Reihen empfehlen, die nach den Funktionen $\frac{\cos\varrho\zeta}{\sin\zeta}$ fortschreiten. Wenn man $f(x)$ nach $\frac{\sin\varrho z}{\sin z}$ entwickelt, bekommt man das Hauptglied von (17_1) in dieser Gestalt, und das gleiche gilt nach (65) für das Korrekturglied. Auf diese Weise nutzt man am besten die Identität (65) aus.

In anderen Fällen wird ein Iterationsansatz für die Lösung von (1) anzuraten sein. Man löst zunächst (1) für den entarteten Kern L^*, bildet mit der so gefundenen Lösung $\varphi^*(\xi)$ die Funktion

$$f_1(x) = f(x) - \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} L(x,\xi)\,\varphi^*(\xi)\,d\xi, \tag{67}$$

die man als neue linke Seite für die Integralgleichung mit dem Kern L^* nimmt, und fährt so fort. Das Verfahren kann unter Umständen schnell konvergieren. Mit dem Ansatz (49) ist die Matrix $\mathfrak{R}$ des Gleichungssystems (39) bzw. (40) eine ganze rationale Funktion von p, und das gleiche gilt für die rechten Seiten. Vermöge dieser Gleichungen hängt der lösende Kern (17) analytisch von p ab, und in (11. wurde gezeigt, daß er für $p = 0$ regulär analytisch von p abhängt. Nun ist das Iterationsverfahren aber nichts anderes als eine Entwicklung von (17) in eine Potenzreihe von p um den Punkt $p = 0$.

Es konvergiert demnach bis zur absolut kleinsten singulären Stelle. Solche muß es aber gewiß geben, und zwar gerade dort, wo die Determinante $|\mathfrak{R}|$, die von p ganz rational abhängt, verschwindet, den Punkt $p = 0$ ausgenommen. An genau diesen Stellen nämlich existiert der lösende Kern (17) nicht.

Die Handhabung des Iterationsverfahrens ist in dem zuletzt betrachteten Spezialfalle eines Differenzkerns überaus einfach. Der entartete Kern reduziert sich nach (49) und (60) auf

$$L^*(x - \xi) = \frac{1}{x - \xi} + \text{const},$$

und entsprechend einfach sind die Lösung $\varphi^*(\xi)$ sowie die Integrale von (67) zu gewinnen.

Jetzt hat auch die Entartung des Kerns eine auf der Hand liegende Bedeutung, es ist nämlich

$$L^*(x - \xi) - c_0^* \gamma_0^* = \lim_{p \to 0} p L\left(p(x - \xi)\right).$$

(Eingegangen am 27. Juni 1942.)