

## **Werk**

**Titel:** Mathematische Zeitschrift

**Ort:** Berlin

**Jahr:** 1942

**Kollektion:** Mathematica

**Werk Id:** PPN266833020\_0048

**PURL:** [http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN266833020\\_0048](http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN266833020_0048) | LOG\_0039

## **Terms and Conditions**

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## **Contact**

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

# Elementarer Beweis der Dreiecksungleichung in der Poincaréschen Halbebene.

Herrn Geh. Rat Prof. Dr. SEBASTIAN FINSTERWALDER  
zum 80. Geburtstag gewidmet.

Von  
Othmar Baier in Stuttgart.

In einer Ebene seien die drei Punkte  $A, B, C$  auf derselben Seite einer Geraden  $g$ . Einer oder mehrere der Punkte dürfen auch auf  $g$  liegen. Bezeichnen  $A_1, B_1, C_1$  die Spiegelpunkte von  $A, B, C$  bezüglich  $g$  und werden die positiv gerechneten Strecken durch ihre Endpunkte bezeichnet, dann gilt die Ungleichung

$$(1) \quad \frac{\frac{AC}{AC_1} + \frac{BC}{BC_1}}{1 + \frac{AC}{AC_1} \cdot \frac{BC}{BC_1}} \geq \frac{AB}{A_1B} \quad ^1).$$

Wenn wenigstens einer der Punkte  $A, C$  auf  $g$  liegt, ist  $AC/AC_1 = 1$ , andernfalls  $< 1$ . Für den fortan ausgeschlossenen Fall, daß wenigstens einer der Punkte  $A, B, C$  auf  $g$  liegt, besteht die Ungleichung (1) offenbar zu Recht, mit „ $>$ “, falls nur  $C$  auf  $g$ , sonst mit „ $=$ “.

Wird  $A$  festgehalten und bewegt sich  $C$  (Fig. 1), dann sind die Niveaulinien  $AC/AC_1 = AC/A_1C = \text{const}$  die Kreise des hyperbolischen Kreisbüschels  $[A]$  mit den Grundpunkten  $A$  und  $A_1$ . Entsprechend ergeben sich für  $BC/BC_1 = BC/B_1C = \text{const}$  die Kreise des hyperbolischen Kreisbüschels  $[B]$  mit den Grundpunkten  $B$  und  $B_1$ .

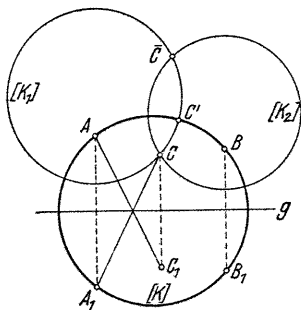


Fig. 1.

<sup>1)</sup> Das Problem, die Ungleichung (1) elementar zu beweisen, wurde von C. CARATHÉODORY gestellt. Durch

$$\text{tgh } s = AB/A_1B, \quad \text{tgh } s_1 = AC/AC_1, \quad \text{tgh } s_2 = BC/BC_1$$

sind  $s, s_1, s_2$  reell eindeutig bestimmt und (1) erhält die Form

$$\text{tgh } (s_1 + s_2) \geq \text{tgh } s, \quad \text{woraus folgt } s_1 + s_2 \geq s.$$

Dabei ist

$$2 ds = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}$$

das Nichteuklidische Bogenelement. — K. PISOT hat ebenfalls einen hübschen, elementaren Beweis der Ungleichung (1) gefunden.

$B$  liege zunächst nicht auf der Geraden  $AA_1$ . Die beiden Kreisbüschel  $[A]$  und  $[B]$  haben dann den gemeinsamen Orthogonalkreis  $(K)$ , dessen Mittelpunkt auf  $g$  liegt.  $(K_1)$  und  $(K_2)$  seien die beiden Kreise der Büschel  $[A]$  bzw.  $[B]$  durch  $C$ . Für diejenigen Punkte von  $(K_1)$ , die innerhalb von  $(K_2)$  liegen, ist die linke Seite von (1) kleiner geworden, da  $AC/A_1C$  auf  $(K_1)$  konstant ist und  $BC/B_1C$  innerhalb von  $(K_2)$  kleinere Werte annimmt<sup>2)</sup>. Solche Punkte gibt es höchstens dann nicht, wenn  $C$  schon auf  $(K)$  liegt, da  $(K_1)$  und  $(K_2)$  als Orthogonalkreise von  $(K)$  durch den Spiegelpunkt  $\bar{C}$  von  $C$  in bezug auf  $(K)$  gehen müssen. Bewegt sich also  $C$  auf  $(K_1)$ , dann wird das Minimum der linken Seite von (1) für den Schnittpunkt  $C'$  von  $(K_1)$  mit  $(K)$  angenommen, der innerhalb von  $(K_2)$  liegt.

Für  $C' = A$  oder  $C' = B$  gilt in (1) offenbar das Gleichheitszeichen.  $C'$  liege zwischen  $A$  und  $B$  (Fig. 2). Dann ergibt die linke Seite von (1) für  $C'$

$$(2) \quad \frac{AC' \cdot BC'_1 + BC' \cdot AC'_1}{AC'_1 \cdot BC'_1 + AC' \cdot BC'} = \frac{AC' \cdot B_1C' + B_1C'_1 \cdot AC'_1}{A_1C' \cdot B_1C' + A_1C'_1 \cdot B_1C'_1} \quad (\text{Spiegelung an } g)$$

$$= \frac{\frac{2}{\sin \mu} (\Delta AC'B_1 + \Delta AC'_1B_1)}{\frac{2}{\sin \lambda} (\Delta A_1C'B_1 + \Delta A_1C'_1B_1)}$$

$\lambda$  und  $\mu$  sind die zu  $A_1B_1$  bzw.  $AB_1 = A_1B$  gehörigen Peripheriewinkel; wegen  $\sin$  kann man jeweils irgendeinen nehmen. Nun ist

$$\Delta AC'B_1 + \Delta AC'_1B_1 = \text{Viereck } AC'B_1C'_1 = \text{Viereck } A_1C'B_1C'_1$$

( $AA_1 // C'C'_1$ )

$$\Delta A_1C'B_1 + \Delta A_1C'_1B_1 = \text{Viereck } A_1C'B_1C'_1.$$

Die rechte Seite von (2) ist also gleich ihrem Wert für  $C' = A$  oder  $C' = B$ , nämlich  $AB/A_1B$ , d. h. für  $C'$  gilt in (1) das Gleichheitszeichen.

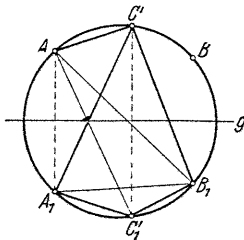


Fig. 2.

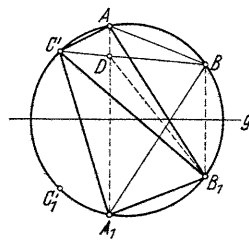


Fig. 3.

$C'$  liege außerhalb von  $AB$  (Fig. 3).  $A$  liege zwischen  $C'$  und  $B$ , andernfalls tauschen  $A$  und  $B$  im folgenden ihre Rollen.  $(K_1)$  und  $(K_2)$  seien die Kreise von  $[A]$  bzw.  $[B]$  durch  $C'$ .  $(K_2)$  berührt dann  $(K_1)$  in  $C'$  von außen. Bewegt

<sup>2)</sup>  $AC/AC_1 = a < 1$ ,  $BC/BC_1 = x$ ,  $y = \frac{a+x}{1+ax}$  nimmt für  $x > 0$  mit  $x$  ab.

sich nun  $C'$  auf  $(K_1)$ , dann wird das Minimum der linken Seite von (1) für den Schnittpunkt  $C''$  von  $(K_1)$  mit  $(K)$  erreicht. Falls  $C''$  innerhalb  $AB$  liegt, gilt (1). Andernfalls sei  $(K_3)$  der Kreis des Büschels  $[B]$ , der  $(K_1)$  von innen in  $C''$  berührt. Sein zweiter Schnittpunkt mit  $(K)$  sei  $C'''$ . Die linke Seite von (1) wird für  $C', C'', C'''$  stets verkleinert und es läßt sich unschwer zeigen, daß schließlich einer der Punkte  $C^{(n)}$  zwischen  $A$  und  $B$  zu liegen kommt, da die Kreisradien jeweils mindestens um den festen Betrag  $d$  ( $=$  Abstand  $AA_1$  von  $BB_1$ ) abnehmen. — (1) läßt sich in diesem Fall auch leicht direkt bestätigen:

Die linke Seite von (1) ergibt

$$(3) \quad \frac{AC' \cdot B_1C' + BC' \cdot A_1C'}{A_1C' \cdot B_1C' + AC' \cdot BC'} = \frac{\frac{2}{\sin \mu} (\Delta AC'B_1 + \Delta A_1C'B)}{\frac{2}{\sin \lambda} (\Delta A_1C'B_1 + \Delta AC'B)}$$

$D$  ist der Schnittpunkt von  $C'B$  mit  $AA_1$ . Wegen  $BB_1 \parallel AA_1$  ist

$$\begin{aligned} \Delta A_1BC' &= \text{Viereck } A_1B_1DC' \\ \Delta AB_1C' + \Delta A_1BC' &= \text{Viereck } AB_1A_1C' + \Delta C'DB_1 \\ \Delta A_1B_1C' + \Delta ABC' &= \text{Viereck } AB_1A_1C' - \Delta C'DB_1. \end{aligned}$$

Die rechte Seite von (3) ist somit stets größer als ihr Wert für  $C' = A$  oder  $C' = B$ . Für  $C'$  gilt in (1) „ $>$ “.

\* Schließlich ist noch der Fall nachzuholen, daß  $B$  auf der Geraden  $AA_1$  liegt.  $A$  und  $C$  werden festgehalten und  $B$  bewege sich auf dem Kreis des Büschels  $[A]$ .  $AB/A_1B$  und  $AC/AC_1$  bleiben fest,  $BC/BC_1$  kann wie oben verkleinert werden, bis  $B$  wieder auf dem Orthogonalkreis der Büschel  $[A]$  und  $[C]$  liegt.

Die Ungleichung (1) ist damit bewiesen. Das Gleichheitszeichen gilt nur, wenn 1.  $A, B, C$  auf einem  $g$  senkrecht schneidenden Kreis liegen und  $C$  zwischen  $A$  und  $B$  liegt oder 2. mindestens einer der Punkte  $A, B$  auf  $g$  liegt.

Aus (1) folgt

$$(4) \quad \frac{AC}{AC_1} + \frac{BC}{BC_1} > \frac{AB}{A_1B}$$

Wegen der Spiegelung (Fig. 1) ist  $AC$  auch der kürzeste Weg von  $A$  nach  $C'$  über  $g$ , so daß für die Verhältnisse der direkten kürzesten Wege zu den kürzesten Wegen über  $g$  die Dreiecksungleichung (4) gilt.

(Eingegangen am 25. Juli 1942.)