Elementarer Beweis der Dreiecksungleichung in der Poicaréschen Halbebene.

Herrn Geh. Rat Prof. Dr. Sebastian Finsterwalder
zum 80. Geburtstag gewidmet.

Von

Othmar Baier in Stuttgart.

In einer Ebene seien die drei Punkte A, B, C auf derselben Seite einer Geraden g. Einer oder mehrere der Punkte dürfen auch auf g liegen. Bezeichnen A_1, B_1, C_1 die Spiegelpunkte von A, B, C bezüglich g und werden die positiv gerechneten Strecken durch ihre Endpunkte bezeichnet, dann gilt die Ungleichung

$$(1) \qquad \frac{\dfrac{AC}{AC_1} + \dfrac{BC}{BC_1}}{1 + \dfrac{AC}{AC_1} \cdot \dfrac{BC}{BC_1}} \geqq \frac{AB}{A_1B} \text{ [1]}.$$

Wenn wenigstens einer der Punkte A, C auf g liegt, ist $AC/AC_1 = 1$, andernfalls < 1. Für den fortan ausgeschlossenen Fall, daß wenigstens einer der Punkte A, B, C auf g liegt, besteht die Ungleichung (1) offenbar zu Recht, mit „$>$", falls nur C auf g, sonst mit „$=$".

Wird A festgehalten und bewegt sich C (Fig. 1), dann sind die Niveaulinien $AC/AC_1 = AC/A_1C = \text{const}$ die Kreise des hyperbolischen Kreisbüschels $[A]$ mit den Grundpunkten A und A_1. Entsprechend ergeben sich für $BC/BC_1 = BC/B_1C = \text{const}$ die Kreise des hyperbolischen Kreisbüschels $[B]$ mit den Grundpunkten B und B_1.

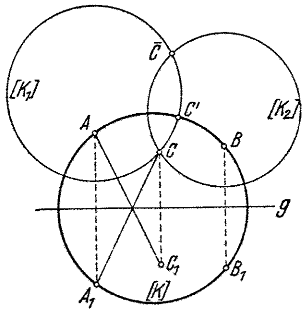

Fig. 1.

[1]) Das Problem, die Ungleichung (1) elementar zu beweisen, wurde von C. Carathéodory gestellt. Durch

$$\operatorname{tgh} s = AB/A_1B, \quad \operatorname{tgh} s_1 = AC/AC_1, \quad \operatorname{tgh} s_2 = BC/BC_1$$

sind s, s_1, s_2 reell eindeutig bestimmt und (1) erhält die Form

$$\operatorname{tgh}(s_1 + s_2) \geqq \operatorname{tgh} s, \quad \text{woraus folgt} \quad s_1 + s_2 \geqq s.$$

Dabei ist

$$2\,ds = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}$$

das Nichteuklidische Bogenelement. — K. Pisot hat ebenfalls einen hübschen, elementaren Beweis der Ungleichung (1) gefunden.

B liege zunächst nicht auf der Geraden AA_1. Die beiden Kreisbüschel $[A]$ und $[B]$ haben dann den gemeinsamen Orthogonalkreis (K), dessen Mittelpunkt auf g liegt. (K_1) und (K_2) seien die beiden Kreise der Büschel $[A]$ bzw. $[B]$ durch C. Für diejenigen Punkte von (K_1), die innerhalb von (K_2) liegen, ist die linke Seite von (1) kleiner geworden, da AC/A_1C auf (K_1) konstant ist und BC/B_1C innerhalb von (K_2) kleinere Werte annimmt[2]. Solche Punkte gibt es höchstens dann nicht, wenn C schon auf (K) liegt, da (K_1) und (K_2) als Orthogonalkreise von (K) durch den Spiegelpunkt $\bar{C}$ von C in bezug auf (K) gehen müssen. Bewegt sich also C auf (K_1), dann wird das Minimum der linken Seite von (1) für den Schnittpunkt C' von (K_1) mit (K) angenommen, der innerhalb von (K_2) liegt.

Für $C' = A$ oder $C' = B$ gilt in (1) offenbar das Gleichheitszeichen.

C' liege zwischen A und B (Fig. 2). Dann ergibt die linke Seite von (1) für C'

$$(2)\qquad \frac{AC'\cdot BC_1' + BC'\cdot AC_1'}{AC_1'\cdot BC_1' + AC'\cdot BC'} = \frac{AC'\cdot B_1C' + B_1C_1'\cdot AC_1'}{A_1C'\cdot B_1C' + A_1C_1'\cdot B_1C_1'} \quad \text{(Spiegelung an } g)$$

$$= \frac{\dfrac{2}{\sin\mu}\left(\triangle AC'B_1 + \triangle AC_1'B_1\right)}{\dfrac{2}{\sin\lambda}\left(\triangle A_1C'B_1 + \triangle A_1C_1'B_1\right)}.$$

λ und μ sind die zu A_1B_1 bzw. $AB_1 = A_1B$ gehörigen Peripheriewinkel; wegen sin kann man jeweils irgendeinen nehmen. Nun ist

$$\triangle AC'B_1 + \triangle AC_1'B_1 = \text{Viereck } AC'B_1C_1' = \text{Viereck } A_1C'B_1C_1' \quad (AA_1 // C'C_1')$$

$$\triangle A_1C'B_1 + \triangle A_1C_1'B_1 = \text{Viereck } A_1C'B_1C_1'.$$

Die rechte Seite von (2) ist also gleich ihrem Wert für $C' = A$ oder $C' = B$, nämlich AB/A_1B, d. h. für C' gilt in (1) das Gleichheitszeichen.

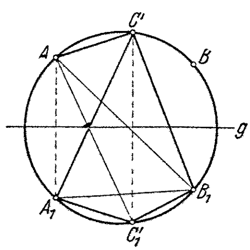

Fig. 2.

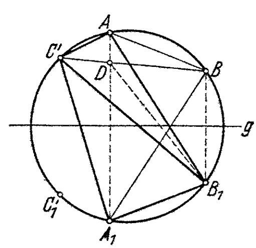

Fig. 3.

C' liege außerhalb von AB (Fig. 3). A liege zwischen C' und B, andernfalls tauschen A und B im folgenden ihre Rollen. (K_1) und (K_2) seien die Kreise von $[A]$ bzw. $[B]$ durch C'. (K_2) berührt dann (K_1) in C' von außen. Bewegt

[2]) $AC/AC_1 = a < 1$, $BC/BC_1 = x$, $y = \dfrac{a+x}{1+ax}$ nimmt für $x > 0$ mit x ab.

sich nun C' auf (K_1), dann wird das Minimum der linken Seite von (1) für den Schnittpunkt C'' von (K_1) mit (K) erreicht. Falls C'' innerhalb AB liegt, gilt (1). Andernfalls sei (K_3) der Kreis des Büschels $[B]$, der (K_1) von innen in C'' berührt. Sein zweiter Schnittpunkt mit (K) sei C'''. Die linke Seite von (1) wird für C', C'', C''' stets verkleinert und es läßt sich unschwer zeigen, daß schließlich einer der Punkte $C^{(n)}$ zwischen A und B zu liegen kommt, da die Kreisradien jeweils mindestens um den festen Betrag d (= Abstand AA_1 von BB_1) abnehmen. — (1) läßt sich in diesem Fall auch leicht direkt bestätigen:

Die linke Seite von (1) ergibt

$$(3)\qquad \frac{AC' \cdot B_1C' + BC' \cdot A_1C'}{A_1C' \cdot B_1C' + AC' \cdot BC'} = \frac{\frac{2}{\sin\mu}(\measuredangle AC'B_1 + \measuredangle A_1C'B)}{\frac{2}{\sin\lambda}(\measuredangle A_1C'B_1 + \measuredangle AC'B)}.$$

D ist der Schnittpunkt von $C'B$ mit AA_1. Wegen $BB_1 // AA_1$ ist

$$\begin{aligned} \triangle A_1BC' &= \text{Viereck } A_1B_1DC' \\ \triangle AB_1C' + \triangle A_1BC' &= \text{Viereck } AB_1A_1C' + \triangle C'DB_1 \\ \triangle A_1B_1C' + \triangle ABC' &= \text{Viereck } AB_1A_1C' - \triangle C'DB_1. \end{aligned}$$

Die rechte Seite von (3) ist somit stets größer als ihr Wert für $C' = A$ oder $C' = B$. Für C' gilt in (1) „>".

Schließlich ist noch der Fall nachzuholen, daß B auf der Geraden AA_1 liegt. A und C werden festgehalten und B bewege sich auf dem Kreis des Büschels $[A]$. AB/A_1B und AC/AC_1 bleiben fest, BC/BC_1 kann wie oben verkleinert werden, bis B wieder auf dem Orthogonalkreis der Büschel $[A]$ und $[C]$ liegt.

Die Ungleichung (1) ist damit bewiesen. Das Gleichheitszeichen gilt nur, wenn 1. A, B, C auf einem g senkrecht schneidenden Kreis liegen und C zwischen A und B liegt oder 2. mindestens einer der Punkte A, B auf g liegt.

Aus (1) folgt

$$(4)\qquad \frac{AC}{AC_1} + \frac{BC}{BC_1} > \frac{AB}{A_1B}.$$

Wegen der Spiegelung (Fig. 1) ist AC auch der kürzeste Weg von A nach C über g, so daß für die Verhältnisse der direkten kürzesten Wege zu den kürzesten Wegen über g die Dreiecksungleichung (4) gilt.

(Eingegangen am 25. Juli 1942.)