

Werk

Titel: Mathematische Zeitschrift

Ort: Berlin

Jahr: 1942

Kollektion: Mathematica

Werk Id: PPN266833020_0048

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN266833020_0048|LOG_0040

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche.

Eine Bemerkung zu den Beiträgen VI und VII¹⁾.

Von

Wolfgang Krull in Bonn.

In Anmerkung²¹⁾ von Beitrag VI habe ich unter Berufung auf den Beweis von Satz 10 die Gültigkeit des folgenden *Primäridealsatzes* behauptet: Es sei \mathfrak{R} ein ganz abgeschlossener Integritätsbereich, \mathfrak{S} ein ganz abhängiger Oberring von \mathfrak{R} ²⁾, der über \mathfrak{R} eine Modulbasis von endlich vielen, linear unabhängigen Elementen $\omega_1, \dots, \omega_n$ besitzt. Ist dann \mathfrak{x} ein beliebiges Primärideal aus \mathfrak{R} , so besitzt $\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{S}$ eine Durchschnittsdarstellung $\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{S} = \mathfrak{y}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{y}_m$, bei der die \mathfrak{y}_i Primärideale sind, die alle mit \mathfrak{R} den Durchschnitt \mathfrak{x} haben.

Indessen zeigt eine genauere Untersuchung, daß der Beweis von Satz 10 nur dann stichhaltig ist, wenn \mathfrak{S} nicht bloß die gewünschte Modulbasis besitzt, sondern darüber hinaus noch der folgenden *Normenbedingung* genügt:

Gleichzeitig mit β gehört stets auch $\beta^{-1} \cdot N(\beta)$ zu \mathfrak{S} , falls $N(\beta)$ die Norm von β über dem Quotientenkörper \mathfrak{K} von \mathfrak{R} bedeutet.

Ob der Primäridealsatz auch unabhängig von der Normenbedingung gilt oder nicht, kann ich bis jetzt nicht entscheiden. Wichtig für die Beiträge VI und VII sind die folgenden beiden Bemerkungen:

a) Die Normenbedingung ist sicher erfüllt, wenn nicht nur \mathfrak{R} , sondern auch \mathfrak{S} ganz abgeschlossen ist. (Trivial, da gleichzeitig mit β stets auch $\beta^{-1} \cdot N(\beta)$ von \mathfrak{R} ganz abhängt.)

b) Der Primäridealsatz gilt für \mathfrak{S} (ohne Rücksicht auf das Erfülltsein oder Nichterfülltsein der Normenbedingung) immer, wenn zu \mathfrak{S} ein ganz abhängiger Oberring \mathfrak{T} existiert, der sowohl über \mathfrak{R} als auch über \mathfrak{S} eine Modulbasis von endlich vielen linear unabhängigen Elementen besitzt und seinerseits der Normenbedingung über \mathfrak{R} genügt.

In der Tat, unter unseren Voraussetzungen ist jedenfalls $\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{T} = \mathfrak{z}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{z}_m$, wobei die \mathfrak{z}_i Primärideale sind, für die die Gleichungen $\mathfrak{z}_i \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{x}$ ($i = 1, \dots, m$) gelten. Setzen wir $\mathfrak{y}_i = \mathfrak{z}_i \cap \mathfrak{S}$, so sind auch die \mathfrak{y}_i Primärideale, und es wird $\mathfrak{y}_i \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{z}_i \cap \mathfrak{S} \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{z}_i \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{x}$ ($i = 1, \dots, m$). Außerdem folgt aus der Existenz der Modulbasis von \mathfrak{T} über \mathfrak{S} nach einer elementaren, in

¹⁾ Math. Zeitschr. 45 (1939), S. 1–19 bzw. 319–334.

²⁾ Also ein Oberring, dessen sämtliche Elemente von \mathfrak{R} ganz abhängen.

Beitrag VI beim Beweise von Satz 8 ausführlich durchgeführten Überlegung sofort $\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{S} = ((\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{S}) \cdot \mathfrak{T}) \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{x} \cdot \mathfrak{T} \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{z}_1 \cap \mathfrak{z}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{z}_m \cap \mathfrak{S} = (\mathfrak{z}_1 \cap \mathfrak{S}) \cap \cdots \cap (\mathfrak{z}_m \cap \mathfrak{S}) = \mathfrak{y}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{y}_m$. Fertig!

Bemerkung a) zeigt, daß der Beweis von Satz 10 in Beitrag VI einwandfrei ist. Denn jeder „unverzweigte“ Oberring von \mathfrak{R} ist ganz abgeschlossen.

Bemerkung b) zeigt die Richtigkeit der Behauptung γ) des Satzes 2 von Beitrag VII, für die wegen der Berufung auf die zu weitgehende Behauptung der Anmerkung²¹⁾ von Beitrag VI in Beitrag VII selbst kein stichhaltiger Beweis gegeben worden war. — Es handelt sich an der genannten Stelle darum, zu zeigen, daß der Primäridealsatz gilt, wenn der ganz abgeschlossene Integritätsbereich \mathfrak{R} einen Unterkörper K enthält, über dem der Quotientenkörper \mathfrak{R} von \mathfrak{R} „streng transzendent“ ist, und wenn gleichzeitig der Oberring \mathfrak{S} von \mathfrak{R} die Gestalt $A \cdot \mathfrak{R}$ besitzt, wobei A einen endlich-algebraischen Oberkörper von K bedeutet. Verstehen wir nun unter N den kleinsten A umfassenden Normalkörper über K , und setzen wir $\mathfrak{T} = N \cdot \mathfrak{R}$, so hat \mathfrak{T} aus den beim Beweise von Satz 2 in Beitrag VII ausführlich dargelegten Gründen sowohl über \mathfrak{R} als auch über \mathfrak{S} eine Modulbasis von endlich vielen linear unabhängigen Elementen; außerdem genügt \mathfrak{T} der Normenbedingung über \mathfrak{R} , weil \mathfrak{T} gleichzeitig mit β stets auch sämtliche Konjugierten von β über \mathfrak{R} enthält. Man kann also unmittelbar das unter b) abgeleitete Kriterium anwenden.

Außer an den soeben behandelten Stellen wurde weder in Beitrag VI noch in Beitrag VII irgendwo auf Anmerkung²¹⁾ von Beitrag VI zurückgegriffen. Das in dieser Anmerkung begangene Versehen ist also bedeutungslos.

(Eingegangen am 25. April 1942.)