Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche.

Eine Bemerkung zu den Beiträgen VI und VII[1]).

Von

Wolfgang Krull in Bonn.

In Anmerkung[21]) von Beitrag VI habe ich unter Berufung auf den Beweis von Satz 10 die Gültigkeit des folgenden *Primäridealsatzes* behauptet: Es sei $\mathfrak{R}$ ein ganz abgeschlossener Integritätsbereich, $\mathfrak{S}$ ein ganz abhängiger Oberring von $\mathfrak{R}$[2]), der über $\mathfrak{R}$ eine Modulbasis von endlich vielen, linear unabhängigen Elementen $\omega_1, \ldots, \omega_n$ besitzt. *Ist dann* $\mathfrak{x}$ *ein beliebiges Primärideal aus* $\mathfrak{R}$, *so besitzt* $\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{S}$ *eine Durchschnittsdarstellung* $\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{S} = \mathfrak{y}_1 \frown \cdots \frown \mathfrak{y}_m$, *bei der die* $\mathfrak{y}_i$ *Primärideale sind, die alle mit* $\mathfrak{R}$ *den Durchschnitt* $\mathfrak{x}$ *haben.*

Indessen zeigt eine genauere Untersuchung, daß der Beweis von Satz 10 nur dann stichhaltig ist, wenn $\mathfrak{S}$ nicht bloß die gewünschte Modulbasis besitzt, sondern darüber hinaus noch der folgenden *Normenbedingung* genügt:

Gleichzeitig mit β *gehört stets auch* $\beta^{-1} \cdot N(\beta)$ *zu* $\mathfrak{S}$, *falls* $N(\beta)$ *die Norm von* β *über dem Quotientenkörper* $\mathfrak{K}$ *von* $\mathfrak{R}$ *bedeutet.*

Ob der Primäridealsatz auch unabhängig von der Normenbedingung gilt oder nicht, kann ich bis jetzt nicht entscheiden. Wichtig für die Beiträge VI und VII sind die folgenden beiden Bemerkungen:

a) *Die Normenbedingung ist sicher erfüllt, wenn nicht nur* $\mathfrak{R}$, *sondern auch* $\mathfrak{S}$ *ganz abgeschlossen ist.* (Trivial, da gleichzeitig mit β stets auch $\beta^{-1} \cdot N(\beta)$ von $\mathfrak{R}$ ganz abhängt.)

b) *Der Primäridealsatz gilt für* $\mathfrak{S}$ (ohne Rücksicht auf das Erfülltsein oder Nichterfülltsein der Normenbedingung) *immer, wenn zu* $\mathfrak{S}$ *ein ganz abhängiger Oberring* $\mathfrak{T}$ *existiert, der sowohl über* $\mathfrak{R}$ *als auch über* $\mathfrak{S}$ *eine Modulbasis von endlich vielen linear unabhängigen Elementen besitzt und seinerseits der Normenbedingung über* $\mathfrak{R}$ *genügt.*

In der Tat, unter unseren Voraussetzungen ist jedenfalls $\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{T} = \mathfrak{z}_1 \frown \cdots \frown \mathfrak{z}_m$, wobei die $\mathfrak{z}_i$ Primärideale sind, für die die Gleichungen $\mathfrak{z}_i \frown \mathfrak{R} = \mathfrak{x}$ $(i = 1, \ldots, m)$ gelten. Setzen wir $\mathfrak{y}_i = \mathfrak{z}_i \frown \mathfrak{S}$, so sind auch die $\mathfrak{y}_i$ Primärideale, und es wird $\mathfrak{y}_i \frown \mathfrak{R} = \mathfrak{z}_i \frown \mathfrak{S} \frown \mathfrak{R} = \mathfrak{z}_i \frown \mathfrak{R} = \mathfrak{x}$ $(i = 1, \ldots, m)$. Außerdem folgt aus der Existenz der Modulbasis von $\mathfrak{T}$ über $\mathfrak{S}$ nach einer elementaren, in

---

[1]) Math. Zeitschr. 45 (1939), S. 1—19 bzw. 319—334.

[2]) Also ein Oberring, dessen sämtliche Elemente von $\mathfrak{R}$ ganz abhängen.

Beitrag VI beim Beweise von Satz 8 ausführlich durchgeführten Überlegung sofort $\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{S} = ((\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{S}) \cdot \mathfrak{T}) \frown \mathfrak{S} = \mathfrak{x} \cdot \mathfrak{T} \frown \mathfrak{S} = \mathfrak{z}_1 \frown \mathfrak{z}_2 \frown \cdots \frown \mathfrak{z}_m \frown \mathfrak{S} = (\mathfrak{z}_1 \frown \mathfrak{S}) \frown \cdots \frown (\mathfrak{z}_m \frown \mathfrak{S}) = \mathfrak{y}_1 \frown \cdots \frown \mathfrak{y}_m$. Fertig!

Bemerkung a) zeigt, daß der Beweis von Satz 10 in Beitrag VI einwandfrei ist. Denn jeder „unverzweigte" Oberring von $\mathfrak{R}$ ist ganz abgeschlossen.

Bemerkung b) zeigt die Richtigkeit der Behauptung γ) des Satzes 2 von Beitrag VII, für die wegen der Berufung auf die zu weitgehende Behauptung der Anmerkung [21]) von Beitrag VI in Beitrag VII selbst kein stichhaltiger Beweis gegeben worden war. — Es handelt sich an der genannten Stelle darum, zu zeigen, daß der Primäridealsatz gilt, wenn der ganz abgeschlossene Integritätsbereich $\mathfrak{R}$ einen Unterkörper K enthält, über dem der Quotientenkörper $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{R}$ „streng transzendent" ist, und wenn gleichzeitig der Oberring $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{R}$ die Gestalt $\Lambda \cdot \mathfrak{R}$ besitzt, wobei Λ einen endlich-algebraischen Oberkörper von K bedeutet. Verstehen wir nun unter N den kleinsten Λ umfassenden Normalkörper über K, und setzen wir $\mathfrak{T} = \mathsf{N} \cdot \mathfrak{R}$, so hat $\mathfrak{T}$ aus den beim Beweise von Satz 2 in Beitrag VII ausführlich dargelegten Gründen sowohl über $\mathfrak{R}$ als auch über $\mathfrak{S}$ eine Modulbasis von endlich vielen linear unabhängigen Elementen; außerdem genügt $\mathfrak{T}$ der Normenbedingung über $\mathfrak{R}$, weil $\mathfrak{T}$ gleichzeitig mit β stets auch sämtliche Konjugierten von β über $\mathfrak{R}$ enthält. Man kann also unmittelbar das unter b) abgeleitete Kriterium anwenden.

Außer an den soeben behandelten Stellen wurde weder in Beitrag VI noch in Beitrag VII irgendwo auf Anmerkung [21]) von Beitrag VI zurückgegriffen. Das in dieser Anmerkung begangene Versehen ist also bedeutungslos.

(Eingegangen am 25. April 1942.)