NIEDERSÄCHSISCHE STAATS- UND
UNIVERSITÄTSBIBLIOTHEK GÖTTINGEN

Werk

Titel: Mathematische Zeitschrift
Ort: Berlin
Jahr: 1942
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN266833020_0048
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN266833020_0048

LOG Id: LOG_0042
LOG Titel: Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche VIII. Multiplikative abgeschlossene Systeme von endlichen Idealen
LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN266833020
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN266833020

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.
Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.
Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche.

VIII. Multiplikativ abgeschlossene Systeme von endlichen Idealen[1].

Von

Wolfgang Krull in Bonn.

Im ersten Teil (§ 1 bis § 3) der Note wird das Verhalten der Ideale eines beliebigen Integritätsbereichs $\mathfrak{R}$ beim Übergang zu gewissen „transzendenten“ Oberringen näher untersucht[2]. Für den einfachsten Spezialfall der transzendenten Erweiterung des Grundkörpers eines Polynomrings wurde ein Teil der einschlägigen Sätze bereits von K. Hentzelt bzw. E. Noether bewiesen, und zwar mit der gleichen Methode, wie sie auch in § 1 des Textes benutzt wird[3]. Eine Wiederaufnahme der Untersuchung unter möglichst allgemeinen Voraussetzungen schien mir vor allem deshalb wünschenswert, weil sie zwanglos auf eine bemerkenswerte, bisher anscheinend noch nicht systematisch studierte Idealoperation führt: Ist in $\mathfrak{R}$ ein festes „*multiplikativ abgeschlossenes*“ (in Zukunft kurz „*m. a.*“) System Λ von *endlichen* Idealen[4]) gegeben, das gleichzeitig mit $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ stets auch $\mathfrak{e}_1 \cdot \mathfrak{e}_2$ enthält, so verstehen wir bei beliebigem $\mathfrak{a}$ unter $\mathfrak{a}_\Lambda$ die Summe aller der Ideale $\mathfrak{c}$, für die bei geeigneter Wahl von $\mathfrak{e}$ aus Λ das Produkt $\mathfrak{e} \cdot \mathfrak{c}$ in $\mathfrak{a}$ liegt, und bezeichnen den Übergang von $\mathfrak{a}$ zu $\mathfrak{a}_\Lambda$ als *Λ-Operation*. Erst mit Hilfe der Λ-Operation, die eine Verallgemeinerung der üblichen „Bildung von isolierten Komponentenidealen“ darstellt, können die Untersuchungen von § 1 bis § 3 zu einem wirklich be-

---

[1]) Vgl. die früheren Beiträge, Math. Zeitschr. **41**, **42**, **44**, **45**. — Der vorliegende Beitrag knüpft vor allem an Beitrag I [Math. Zeitschr. **41** (1936), S. 545—577] an.

[2]) Anders als in den früheren Beiträgen, deren Bezeichnungsweise wir im übrigen übernehmen, braucht $\mathfrak{R}$ nicht ganz abgeschlossen zu sein. Unter „Ideal“ schlechtweg verstehen wir stets ein *ganzes* Ideal.

[3]) K. Hentzelt, Zur Theorie der Polynomideale und Resultanten. Herausgegeben von E. Noether, Math. Annalen **88** (1922), S. 53—73. Es handelt sich in der Hentzelt-Noetherschen Terminologie um den Satz, daß „die Grundideale eines transformierten Ideals stets selbst transformiert sind“, nebst seinen Folgerungen. — § 1 nimmt in unserer Note eine gewisse Sonderstellung ein; er enthält alle die elementaren Sätze, die ohne Heranziehung des Begriffs des multiplikativ abgeschlossenen Idealsystems formuliert und bewiesen werden können, und die z. B. in der Theorie der Polynomringe dauernd benutzt werden.

[4]) Wir nennen ein Ideal endlich, wenn es eine endliche Basis besitzt.

friedigenden Abschluß gebracht werden. Das Endergebnis läßt sich kurz etwa so formulieren:

Es sei $\mathfrak{P}$ der Polynomring in einer Variablenmenge $u_1, u_2, \ldots, u_\tau, \ldots$ von beliebiger Mächtigkeit über $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}_u$ sei ein m. a. Polynomsystem aus $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ der durch $\mathfrak{S}_u$ erzeugte Quotientenring von $\mathfrak{P}$. Schließlich bedeute Λ das m. a. System aller der endlichen Ideale $\mathfrak{e}$ aus $\mathfrak{R}$, bei denen $\mathfrak{e} \cdot \mathfrak{P}$ mindestens ein Polynom aus $\mathfrak{S}_u$ enthält. Dann gilt für jedes $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{R}$ die Gleichung $(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{Q}) \frown \mathfrak{R} = \mathfrak{a}_\Lambda$, und es hat $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{Q}$ in $\mathfrak{Q}$ im wesentlichen die gleiche Struktur wie $\mathfrak{a}_\Lambda$ in $\mathfrak{R}$.

In § 4, der innerhalb der Note für sich allein steht, wird die für die Λ-Operation nicht unwichtige Frage untersucht, ob bei beliebigem $\mathfrak{a}$ und endlichem $\mathfrak{e}$ aus der Gleichung $\mathfrak{a} : \mathfrak{e} = \mathfrak{a}$ stets auf die Existenz eines $c \subset \mathfrak{e}$ mit $\mathfrak{a} : (c) = \mathfrak{a}$ geschlossen werden kann. Bemerkenswert ist vor allem ein bei dieser Gelegenheit benutztes „Lemma", das für m. a. Elementsysteme schon lange bekannt war [5]), aber ohne wesentliche Änderung des Wortlautes auf beliebige m. a. Systeme von *endlichen* Idealen ausgedehnt werden kann.

In § 5 und § 6, die zusammengenommen den eigentlichen Hauptteil der Note bilden, wird die Λ-Operation mit der in Beitrag I entwickelten Theorie der arithmetisch brauchbaren $'$-Operationen und der Kroneckerschen Funktionalringe in Zusammenhang gebracht. Die Hauptergebnisse lauten: Eine Λ-Operation ist dann und nur dann gleichzeitig eine $'$-Operation, wenn für jedes Hauptideal $(a)_\Lambda = (a)$ wird. Verknüpft man eine der Bedingung $(a)_\Lambda = (a)$ genügende Λ-Operation mit einer arithmetisch brauchbaren, im Sinne von P. Lorenzen [6]) endlichartigen, etwa durch den Index w gekennzeichneten $'$-Operation, indem man allgemein $\mathfrak{a}_{w_\Lambda} = (\mathfrak{a}_w)_\Lambda$ setzt, so entsteht wieder eine arithmetisch brauchbare, endlichartige $'$-Operation („w_Λ-Operation").

Der zur w-Operation gehörige Kroneckersche Funktionalring $\widetilde{\mathfrak{M}}_{w_\Lambda}$ ist ein leicht angebbarer Quotientenring des zur ursprünglichen w-Operation gehörigen Kroneckerschen Funktionalrings $\widetilde{\mathfrak{M}}_w$. Darüber hinaus können *alle* Quotientenringe von $\widetilde{\mathfrak{M}}_w$, die einer aus der (festgehaltenen) w-Operation abgeleiteten w_Λ-Operation als Funktionalring zugeordnet sind, in einfacher Weise charakterisiert werden.

Erst durch diese Sätze werden die in den letzten drei Paragraphen von Beitrag I begonnenen Untersuchungen zu einem wirklich befriedigenden Abschluß gebracht. Damals war die Λ-Operation in — (wie sich nachträglich

[5]) Vgl. W. Krull, Idealtheorie in Ringen ohne Endlichkeitsbedingung. Math. Annalen **101** (1929), S. 729—744.

[6]) Abstrakte Begründung der multiplikativen Idealtheorie. Math. Zeitschr. **45** (1939), S. 533—553; § 2.

zeigt) — wenig zweckmäßiger Weise mit Hilfe gewisser Primidealmengen definiert worden, und es konnten infolgedessen nur bei den ganz abgeschlossenen Ringen mit Maximalbedingung endgültige Sätze aufgestellt werden, während bei den Integritätsbereichen ohne Endlichkeitsbedingung nur Teilresultate gewonnen wurden. Jetzt dagegen führt die „richtige" Definition der Λ-Operationen mit Hilfe der m. a. Idealsysteme nicht nur zu einer vollständigen Erledigung des allgemeinen Falls, sondern auch gleichzeitig zu einer der Sachlage angemessenen Vereinfachung der Beweise, die u. a. zur Folge hat, daß der Hauptteil der Sätze von § 5 und § 6 unmittelbar auf beliebige kommutative Halbgruppen im Sinne von P. Lorenzen [6]) übertragen werden kann.

§ 1.

Es sei $\mathfrak{R}$ ein beliebiger Integritätsbereich, $\mathfrak{P} = \mathfrak{R}[u_1, u_2, \ldots]$ sei der Ring aller Polynome in einer Variablenmenge $u_1, u_2, \ldots$ von beliebiger Mächtigkeit mit Koeffizienten aus $\mathfrak{R}$. Unter dem *Inhalt* des $\mathfrak{P}$-Polynoms $p(u)$ verstehen wir das aus den Koeffizienten von $p(u)$ abgeleitete $\mathfrak{R}$-Ideal. Dann gilt nach Dedekind und Mertens der folgende

Hilfssatz 1. *Ist* $\mathfrak{a}$ *bzw.* $\mathfrak{b}$ *bzw.* $\mathfrak{c}$ *der Inhalt von* $p(u)$ *bzw.* $q(u)$ *bzw.* $r(u) = p(u) \cdot q(u)$, *so wird für hinreichend großes* m *stets* $\mathfrak{a}^{m+1} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{a}^m \cdot \mathfrak{c}$, $\mathfrak{b}^{m+1} \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{b}^m \cdot \mathfrak{c}$ [7]).

Aus dem Hilfssatz folgt insbesondere: Die Menge aller Polynome vom Inhalt $\mathfrak{R}$ bildet in $\mathfrak{P}$ ein *multiplikativ abgeschlossenes* (in Zukunft kurz „*m. a.*") System M^*, sie enthält also gleichzeitig mit zwei Polynomen stets auch deren Produkt. — Es sei nun M irgendein multiplikativ abgeschlossenes Untersystem von M^*, und es bedeute $\mathfrak{S}$ den durch M erzeugten Quotientenring von $\mathfrak{P}$, also den Ring aller Quotienten $\frac{p(u)}{q(u)}$ ($p(u) \subset \mathfrak{P}$, $q(u) \subset \mathsf{M}$). Wir stellen uns die Aufgabe, das Verhalten der Ideale von $\mathfrak{R}$ beim Übergang zu $\mathfrak{S}$ näher zu untersuchen.

Alle Polynome aus M sind in $\mathfrak{S}$ Einheiten, und jedes $\mathfrak{S}$-Element kann durch Multiplikation mit einem Polynom aus M in ein $\mathfrak{P}$-Element verwandelt werden. Wir brauchen also bei den Idealen aus $\mathfrak{S}$ im wesentlichen nur auf die in ihnen auftretenden Polynome, d. h. auf ihren Durchschnitt mit $\mathfrak{P}$ zu achten. Ist $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal aus $\mathfrak{R}$, $q(u)$ irgendein Polynom aus $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}$, so gilt eine Gleichung $\mu(u) \cdot q(u) = \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot p_i(u)$ ($\mu(u) \subset \mathsf{M}$; $a_i \subset \mathfrak{a}$, $p_i(u) \subset \mathfrak{P}$ $(i = 1, \ldots, m)$). Der Inhalt von $\mu(u) \cdot q(u)$ ist ein Unterideal

[7]) Ein knapper Beweis von Hilfssatz 1 findet sich bei H. Prüfer, Untersuchungen über Teilbarkeitseigenschaften in Körpern. J. f. Math. 168 (1932), S. 1—36, § 9. — Zu der Art, wie im folgenden mit dem Hilfssatz gearbeitet wird, vgl. auch: W. Krull, Hauptidealzerlegung in Polynomringen. Math. Zeitschr. 41 (1936), S. 213—217.

von $\mathfrak{a}$, und aus dem Hilfssatz folgt, daß $\mu(u) \cdot q(u)$ und $q(u)$ denselben Inhalt besitzen müssen. Damit ist gezeigt:

Satz 1. *Ist* $\mathfrak{a}$ *ein beliebiges Ideal aus* $\mathfrak{R}$, *so enthält* $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}$ *stets alle und nur die Polynome, deren Inhalt ein Unterideal von* $\mathfrak{a}$ *ist. — Anders ausgedrückt: Es ist stets* $(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}) \frown \mathfrak{P} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{P}$, $(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}) \frown \mathfrak{R} = \mathfrak{a}$.

Die Ideale aus $\mathfrak{R}$ lassen sich also *umkehrbar eindeutig* ihren Erweiterungsidealen auf $\mathfrak{S}$ zuordnen.

Satz 2. *Ist* $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \frown \mathfrak{a}_2 \frown \cdots$ *eine unverkürzbare Durchschnittsdarstellung von* $\mathfrak{a}$ *in* $\mathfrak{R}$, *so ist* $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S} = (\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{S}) \frown (\mathfrak{a}_2 \cdot \mathfrak{S}) \frown \cdots$ *eine solche von* $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}$ *in* $\mathfrak{S}$.

Zum Beweis von Satz 2 braucht man wegen Satz 1 nur zu zeigen, daß $\mathfrak{b} = (\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{S}) \frown (\mathfrak{a}_2 \cdot \mathfrak{S}) \frown \cdots$ kein *echtes* Oberideal von $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}$ sein kann. Ist aber $p(u)$ irgendein Polynom aus $\mathfrak{b}$, so muß der Inhalt von $p(u)$ nach Satz 1 in $\mathfrak{a}_1 \frown \mathfrak{a}_2 \frown \cdots = \mathfrak{a}$ enthalten sein, es ist also sicher $p(u) \subset \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}$. — Unter dem *Inhalt* eines beliebigen Ideals $\mathfrak{a}_s$ aus $\mathfrak{S}$ wollen wir die Summe der Inhalte aller zu $\mathfrak{a}_s$ gehörigen $\mathfrak{P}$-Polynome verstehen. Dann gilt:

Satz 3. *Ist* $\mathfrak{a}$ *bzw.* $\mathfrak{b}_s$ *ein beliebiges Ideal aus* $\mathfrak{R}$ *bzw.* $\mathfrak{S}$ *und bedeutet* $\mathfrak{b}$ *den Inhalt von* $\mathfrak{b}_s$, *so ist stets* $(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}) : \mathfrak{b}_s = (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{S}$.

Ist zunächst $\mathfrak{b}_s = (p(u))$ mit $p(u) \subset \mathfrak{P}$, so ist nach Satz 1 der Inhalt $\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{b}_s$ gleich dem Inhalt von $p(u)$, und aus dem Hilfssatz und Satz 1 folgt sofort, daß $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S} : (p(u))$ alle und nur die Polynome $q(u)$ enthält, deren Inhalt ein Unterideal von $\mathfrak{a} : \mathfrak{b}$ ist, es wird also in diesem Falle tatsächlich $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S} : (p(u)) = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S} : \mathfrak{b}_s = (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{S}$. — Es sei jetzt allgemein $\mathfrak{b}_s = (p_1(u), p_2(u), \ldots)$, $\mathfrak{b}^{(\tau)}$ sei der Inhalt von $p_\tau(u)$. Dann wird, wie leicht aus dem Hilfssatz zu erschließen, $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}^{(1)} + \mathfrak{b}^{(2)} + \cdots$, und man erhält nach bekannten Quotientenformeln: $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S} : \mathfrak{b}_s = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S} : (p_1(u), p_2(u), \ldots) = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S} : (p_1(u)) \frown$ $\frown (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S} : (p_2(u))) \frown \cdots = ((\mathfrak{a} : \mathfrak{b}^{(1)}) \cdot \mathfrak{S}) \frown ((\mathfrak{a} : \mathfrak{b}^{(2)}) \cdot \mathfrak{S}) \frown \cdots = ((\mathfrak{a} : \mathfrak{b}^{(1)}) \frown$ $\frown (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}^{(2)}) \frown \cdots) \cdot \mathfrak{S} = (\mathfrak{a} : (\mathfrak{b}^{(1)} + \mathfrak{b}^{(2)} + \cdots)) \cdot \mathfrak{S} = (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{S}$. — Aus Satz 3 folgt insbesondere:

Das Polynom $p(u)$ ist zu dem Erweiterungsideal $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}$ des Ideals $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{R}$ dann und nur dann prim, $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S} : (p(u)) = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}$, wenn der Inhalt $\mathfrak{b}$ von $p(u)$ zu $\mathfrak{a}$ prim ist, $\mathfrak{a} : \mathfrak{b} = \mathfrak{a}$. Aus dieser Bemerkung schließt man mühelos weiter:

Satz 4. *Ist* $\mathfrak{q}$ in $\mathfrak{R}$ *ein zum Primideal* $\mathfrak{p}$ *gehöriges Primärideal, so ist* $\mathfrak{q} \cdot \mathfrak{S}$ *in* $\mathfrak{S}$ *ein zum Primideal* $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{S}$ *gehöriges Primärideal* [8]).

[8]) Im Spezialfall der Grundkörpererweiterung eines Polynomringes vgl. zu Satz 4 auch: B. L. van der Waerden, Zur algebraischen Geometrie. Berichtigungen und Ergänzungen. Math. Annalen **113** (1936), S. 213—217.

Die Sätze 1 bis 3 gestatten es, die Ideale $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{R}$ geradezu mit ihren Erweiterungsidealen $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{S}$ zu identifizieren. Satz 4 besagt dann einfach, daß beim Übergang von $\mathfrak{R}$ zu $\mathfrak{S}$ Primideale Primideale und Primärideale Primärideale bleiben. Eine besonders wichtige Anwendung unserer Sätze betrifft den Fall, daß $\mathfrak{R} = \mathsf{K}[x_1, x_2, \ldots]$ ein *Polynomring* in einer Variablenmenge $x_1, x_2, \ldots$ von beliebiger Mächtigkeit über einem beliebigen Grundkörper K ist, während $\mathfrak{S} = \Lambda\cdot\mathfrak{R}$ den Polynomring in $x_1, x_2, \ldots$ über einem rein transzendenten Oberkörper $\Lambda = \mathsf{K}(u_1, u_2, \ldots)$ von K darstellt. (Man wähle in $\mathfrak{P} = \mathsf{K}[x_1, x_2, \ldots; u_1, u_2, \ldots]$ für M den Polynomring $\mathsf{K}[u_1, u_2, \ldots]$!). — Ist in $\mathfrak{R}$ jedes Ideal als Durchschnitt von endlich vielen Primäridealen darstellbar, eine Voraussetzung, die bekanntlich z. B. bei einem Integritätsbereich mit Maximalbedingung immer erfüllt ist, so können die Sätze 1 bis 4 leicht ergänzt werden durch

Satz 5. *Die zugehörigen Primideale bzw. die isolierten Komponentenideale von $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{S}$ sind stets gleich den Erweiterungsidealen der zugehörigen Primideale bzw. isolierten Komponentenideale von $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{R}$* [9]).

Zum Beweise hat man nur zu beachten: Ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \frown \cdots \frown \mathfrak{q}_n$ eine unverkürzbare Primärkomponentenzerlegung von $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{R}$, so ist $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{S} = (\mathfrak{q}_1\cdot\mathfrak{S}) \frown \cdots \frown (\mathfrak{q}_n\cdot\mathfrak{S})$ eine solche von $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{S}$, und es sind die zu den Primäridealen $\mathfrak{q}_i$ bzw. $\mathfrak{q}_i\cdot\mathfrak{S}$ gehörigen Primideale nach Definition gerade die sämtlichen „zu $\mathfrak{a}$“ bzw. „zu $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{S}$“ gehörigen Primideale. — Sämtliche isolierten Komponentenideale von $\mathfrak{a}$ entstehen dadurch, daß man im Durchschnitt $\mathfrak{q}_1 \frown \cdots \frown \mathfrak{q}_n$ geeignete Komponenten $\mathfrak{q}_i$ wegläßt; läßt man im Durchschnitt $(\mathfrak{q}_1\cdot\mathfrak{S}) \frown \cdots \frown (\mathfrak{q}_n\cdot\mathfrak{S})$ jeweils die entsprechenden Komponenten $\mathfrak{q}_i\cdot\mathfrak{S}$ weg, so erhält man gerade die sämtlichen isolierten Komponentenideale von $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{S}$. — Etwas mühsamer gestaltet sich die Verschärfung der Sätze 1 bis 4 bei allgemeinen Integritätsbereichen ohne jede Endlichkeitsbedingung. Zunächst erhält man:

Satz 6. *Die minimalen Primoberideale bzw. die isolierten Primärkomponenten von $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{S}$ sind gleich den Erweiterungsidealen der minimalen Primoberideale bzw. isolierten Primärkomponenten von $\mathfrak{a}$* [9]).

Daß $\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{S}$ bzw. $\mathfrak{q}\cdot\mathfrak{S}$ ein minimales Primoberideal bzw. eine isolierte Primärkomponente von $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{S}$ darstellt, falls $\mathfrak{p}$ bzw. $\mathfrak{q}$ ein minimales Primoberideal bzw. eine isolierte Primärkomponente von $\mathfrak{a}$ ist, ergibt sich fast unmittelbar aus Satz 1 und Satz 4. Es sei nun $\mathfrak{p}_s$ ein beliebiges minimales

[9]) Zur Definition der zugehörigen Primideale und isolierten Komponentenideale in Ringen mit Maximalbedingung bzw. zur Definition der minimalen Primoberideale und isolierten Primärkomponenten in beliebigen Ringen vgl. z. B.: W. Krull, Idealtheorie. Ergebnisse d. Mathematik u. ihrer Grenzgebiete, Bd. 4, Heft 3 (1935); Nr. 6 bzw. Nr. 3.

Primoberideal von $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}$, $\mathfrak{q}_s$ sei die zugehörige isolierte Primärkomponente; dann ist jedenfalls $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_s \frown \mathfrak{R}$ ein zum Primideal $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_s \frown \mathfrak{R}$ gehöriges Primärideal. Ist ferner $\mathfrak{q}(u)$ irgendein Polynom aus $\mathfrak{q}_s$ mit dem Inhalt $\mathfrak{b}$, so gibt es nach Definition der isolierten Primärkomponenten ein nicht zu $\mathfrak{p}_s$ gehöriges Polynom $r(u)$, derart, daß $\mathfrak{q}(u) \cdot r(u) \subset \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}$ wird. Der Inhalt $\mathfrak{c}$ von $r(u)$ ist nicht in $\mathfrak{p}_s$ und damit auch nicht in $\mathfrak{p}$ enthalten; andererseits wird nach Satz 1 und dem Hilfssatz $\mathfrak{c}^m \cdot \mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}^m \cdot (q(u)) \subseteqq \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}$ für hinreichend großes m. Daraus folgt: $\mathfrak{q}_s$ bzw. $\mathfrak{q}$ besteht aus allen und nur den Elementen von $\mathfrak{S}$ bzw. $\mathfrak{R}$, die durch Multiplikation mit geeigneten, nicht zu $\mathfrak{p}$ gehörigen Faktoren *aus* $\mathfrak{R}$ in Elemente von $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}$ verwandelt werden können. Es wird also jedenfalls $\mathfrak{q}_s = \mathfrak{q} \cdot \mathfrak{S}$. Da ferner $\mathfrak{q}$ bzw. $\mathfrak{q}_s$ ein zum Primideal $\mathfrak{p}$ bzw. $\mathfrak{p}_s$ gehöriges Primärideal ist, wird $\mathfrak{p}_s = \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{S}$ nach Satz 4. Schließlich muß $\mathfrak{p}$ ein minimales Primoberideal und $\mathfrak{q}$ die zugehörige isolierte Primärkomponente von $\mathfrak{a}$ sein, weil andernfalls nicht alle $\mathfrak{q}$-Elemente durch Multiplikation mit zu $\mathfrak{p}$ primen Faktoren in Elemente von $\mathfrak{a}$ übergeführt werden könnten.

§ 2.

Multiplikativ abgeschlossene Systeme von endlichen Idealen.

Beim weiteren Ausbau der in § 1 begonnenen Untersuchungen benutzen wir die folgenden Definitionen:

Ein System A von endlichen Idealen (Elementsystem S) aus dem beliebigen Integritätsbereich $\mathfrak{R}$ soll *m. a.* (multiplikativ abgeschlossen) bzw. *f. m. a.* (fast multiplikativ abgeschlossen) heißen, wenn es gleichzeitig mit zwei Idealen $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2$ (Elementen a_1, a_2) stets auch $\mathfrak{e}_1 \cdot \mathfrak{e}_2$ $(a_1 \cdot a_2)$ bzw. ein Unterideal von $\mathfrak{e}_1 \cdot \mathfrak{e}_2$ (Vielfaches von $a_1 \cdot a_2$) enthält. Andrerseits soll A (S) *vollständig* genannt werden, wenn in A (S) gleichzeitig mit $\mathfrak{e}$ (a) stets auch jedes endliche Oberideal von $\mathfrak{e}$ (jeder Teiler von a) auftritt.

Ist $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal aus $\mathfrak{R}$ und bedeutet S bzw. A irgendein m. a. oder f. m. a. System von Elementen bzw. endlichen Idealen, so verstehen wir unter dem *i. K. I.* (isolierten Komponentenideal) *im engeren Sinne* $\mathfrak{a}_S$ bzw. unter dem *i. K. I. im weiteren Sinne* $\mathfrak{a}_A$ das Ideal aller der Ringelemente a, zu denen ein Element c aus S bzw. ein Ideal $\mathfrak{e}$ aus A so bestimmt werden kann, daß $a \cdot c \subset \mathfrak{a}$ bzw. $(a) \cdot \mathfrak{e} \subseteqq \mathfrak{a}$ wird [10]). Den Übergang von $\mathfrak{a}$ zu $\mathfrak{a}_S$ bzw. $\mathfrak{a}_A$ (für beliebiges $\mathfrak{a}$ bei festem S bzw. A) bezeichnen wir als die durch das System S bzw. A definierte *S- bzw. A-Operation.*

Zwei Systeme S_1, S_2 bzw. A_1, A_2 sollen *gleichwertig* genannt werden, wenn sie dieselbe S- bzw. A-Operation definieren, wenn also $\mathfrak{a}_{S_1} = \mathfrak{a}_{S_2}$ bzw. $\mathfrak{a}_{A_1} = \mathfrak{a}_{A_2}$ wird für jedes $\mathfrak{a}$.

---

[10]) Die „i. K. I. im engeren Sinne" des Textes sind nichts anderes als die „i. K. I." schlechtweg im üblichen Sinne. Vgl. z. B. Krull[9]), Nr. 6.

Zu jedem m. a. oder f. m. a. System S bzw. Λ gibt es ein *zugehöriges* (kleinstes umfassendes) *vollständiges System* S^* *bzw.* Λ^*, nämlich das System aller der Elemente bzw. endlichen Ideale, die irgendein Element aus S teilen bzw. irgendein Ideal aus Λ enthalten. S^* bzw. Λ^* ist stets m. a., auch wenn S bzw. Λ nur f. m. a. war. — Offenbar sind S und S^* bzw. Λ und Λ^* stets gleichwertig. Darüber hinaus gilt:

Hilfssatz 2. *Zwei Systeme S_1 und S_2 bzw. Λ_1 und Λ_2 sind dann und nur dann gleichwertig, wenn die zugehörigen vollständigen Systeme identisch sind* ($S_1^* = S_2^*$ *bzw.* $\Lambda_1^* = \Lambda_2^*$), d. h. wenn es zu jedem Element a_1 aus S_1 bzw. zu jedem Ideal $\mathfrak{e}_1$ aus Λ_1 in S_2 ein Vielfaches a_2 bzw. in Λ_2 ein Unterideal $\mathfrak{e}_2$ gibt, und umgekehrt.

Das „dann" ist bei Hilfssatz 2 so gut wie selbstverständlich. Aber auch der Beweis des „nur dann" macht keine Schwierigkeit. Angenommen etwa, es gäbe zu dem Ideal $\mathfrak{e}_1$ aus Λ_1 in Λ_2 kein (echtes oder unechtes) Unterideal $\mathfrak{e}_2$. Dann ist offenbar $(\mathfrak{e}_1)_{\Lambda_1} = \mathfrak{R}$, $(\mathfrak{e}_1)_{\Lambda_2} \neq \mathfrak{R}$, die Systeme Λ_1 und Λ_2 sind also sicher nicht gleichwertig.

Da, wie soeben gezeigt, jedes f. m. a. System S bzw. Λ mit einem m. a. System gleichwertig ist, hätten wir uns bei der Definition der i. K. I. im engeren und weiteren Sinne ausschließlich auf die Betrachtung von m. a. Systemen beschränken können. Die Zulassung von f. m. a. Systemen dient nur zur Vereinfachung einiger späterer Beweise. — Dagegen kann die Einführung der m. a. Idealsysteme Λ [11]) neben den m. a. Elementsystemen S keinesfalls umgangen werden. Denn es gibt, wie mühelos durch Beispiele zu belegen, schon in ganz einfachen Integritätsbereichen *m. a. Idealsysteme, zu denen kein gleichwertiges m. a. Elementsystem* (d. h. kein gleichwertiges m. a. Hauptidealsystem) *existiert* [12]).

Außerdem ist zwar unmittelbar klar, daß jedes i. K. I. im engeren Sinne stets auch ein i. K. I. im weiteren Sinne darstellt; denn man kann ja statt mit m. a. Elementsystemen ebensogut mit m. a. Hauptidealsystemen arbeiten. Aber die Richtigkeit der Umkehrung konnte ich bis jetzt nur unter speziellen Voraussetzungen über den zugrunde liegenden Integritätsbereich $\mathfrak{R}$ beweisen. (Vgl. die Untersuchungen von § 4, insbesondere die Schlußbemerkung) [13]).

[11]) Wenn im folgenden von einem m. a. (Ideal-) System Λ geredet wird, ist stets ein m. a. System von *endlichen* Idealen gemeint.

[12]) Es sei z. B. $\mathfrak{R}$ ein ganz abgeschlossener Ring mit Maximalbedingung, in dem mindestens ein nichtminimales Primideal $\mathfrak{p}$ existiert; Λ sei das m. a. System aller der Ideale aus $\mathfrak{R}$, die in keinem einzigen minimalen Ringprimideal enthalten sind. Dann ist kein einziges Ideal aus Λ Unterideal eines Hauptideals, und es gibt daher nach Hilfssatz 2 zu Λ kein äquivalentes Element- (d. h. Hauptideal-) System S.

[13]) Das Beispiel von Anm. [12]) hat mit unserem Problem nichts zu tun, denn es handelt sich ja um die Frage: Gibt es zu gegebenem Λ für jedes $\mathfrak{a}$ ein *i. a. von* $\mathfrak{a}$ *abhängiges* m. a. System $S(\mathfrak{a})$ derart, daß $\mathfrak{a}_\Lambda = \mathfrak{a}_{S(\mathfrak{a})}$ wird?

Haben nun wieder $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ dieselbe Bedeutung wie in § 1, so erhalten wir leicht:

Satz 7. *Für beliebiges* $\mathfrak{a}$ *aus* $\mathfrak{R}$ *sind die i. K. I. im weiteren Sinne von* $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}$ *stets gleich den Erweiterunsgidealen der i. K. I. im weiteren Sinne von* $\mathfrak{a}$. — *Bei* $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}$ *sind alle i. K. I. im weiteren Sinne gleichzeitig auch i. K. I. im engeren Sinne.*

Zum Beweis beachte man: Ist $\mathfrak{b}_s$ ein beliebiges i. K. I. im weiteren Sinne von $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}$ mit dem erzeugenden m. a. System Λ_s — ($\mathfrak{b}_s = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S})_{\Lambda_s}$) —, so bilden die Inhalte der zu Λ_s gehörigen endlichen Ideale in $\mathfrak{R}$ jedenfalls ein f. m. a. System Λ von endlichen Idealen, und aus Satz 1 und Satz 3 folgt leicht $\mathfrak{b}_s = (\mathfrak{a}_\Lambda) \cdot \mathfrak{S}$. — Ist andrerseits $\mathfrak{b}$ ein beliebiges i. K. I. im weiteren Sinne von $\mathfrak{a}$, und ist Λ^* ein erzeugendes, vollständiges m. a. System von endlichen Idealen, so bildet, wie mühelos aus Hilfssatz 1 zu entnehmen, die Menge aller Polynome $p(u)$ mit zu Λ^* gehörigem Inhalt in $\mathfrak{S}$ ein m. a. Elementsystem S_s, und man überzeugt sich ohne Schwierigkeit von der Gültigkeit der Gleichung $\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{S} = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S})_{S_s}$. — Satz 7 bedeutet den vorläufigen Abschluß der in § 1 begonnenen Untersuchungen.

§ 3.

Verallgemeinerung der Ergebnisse von § 1.

Mit Hilfe des in § 2 eingeführten Begriffs des m. a. Idealsystems Λ kann der Geltungsbereich der Sätze 1 bis 7 wesentlich erweitert werden. $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{P}$ sollen die gleiche Bedeutung haben wie bisher, mit $\mathfrak{Q}$ bezeichnen wir einen beliebigen Quotientenring von $\mathfrak{P}$, mit S_q ein erzeugendes m. a. Elementsystem von $\mathfrak{Q}$ über $\mathfrak{P}$ (also ein Elementsystem aus $\mathfrak{P}$ derart, daß $\mathfrak{Q}$ aus der Menge aller Quotienten $\frac{p}{q}$ ($p \subset \mathfrak{P}$, $q \subset S_q$) besteht). Dann bilden die Inhalte aller zu S_q gehörigen Polynome in $\mathfrak{R}$ ein f. m. a. System Λ'; bedeutet Λ^* das zu Λ' gehörige vollständige m. a. System, so gilt zunächst:

Satz 8. *Ist* $\mathfrak{a}$ *ein beliebiges Ideal aus* $\mathfrak{R}$, *so enthält* $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{Q}$ *alle und nur die Polynome* $q(u)$, *deren Inhalt ein Unterideal von* $\mathfrak{a}_{\Lambda^*}$ *ist.* — *Insbesondere wird stets* $(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{Q}) \frown \mathfrak{R} = \mathfrak{a}_{\Lambda^*}$.

In der Tat, ein beliebiges Polynom $q(u)$ aus $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{Q}$ besitzt eine Darstellung:

$$q(u) = \nu(u)^{-1} \cdot \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot p_i(u) \quad (\nu(u) \subset S_q,\ a_i \subset \mathfrak{a},\ p_i(u) \subset \mathfrak{P}).$$

Ist $\mathfrak{b}$ bzw. $\mathfrak{c}$ bzw. $\mathfrak{d}$ der Inhalt von $\nu(u)$ bzw. $q(u)$ bzw. $\nu(u) \cdot q(u)$, so ergibt sich: $\mathfrak{d} \subseteqq \mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}^{m+1} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{b}^m \cdot \mathfrak{d} \subseteqq \mathfrak{d} \subseteqq \mathfrak{a}$; $\mathfrak{c} \subseteqq \mathfrak{a}_{\Lambda^*}$ wegen $\mathfrak{b} \subset \Lambda^*$. — Ist andrerseits $c \subset \mathfrak{a}_{\Lambda^*}$, so gibt es ein $\mathfrak{b} \subset \Lambda^*$, für das $(c) \cdot \mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{a}$ wird, und nach Definition von Λ^* muß in S_q ein Polynom $\nu(u)$ vorkommen, dessen Inhalt $\mathfrak{c}$ ein Unterideal von $\mathfrak{b}$ ist. Man hat dann:

$$c \cdot \nu(u) = p(u) \subset \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{P}, \quad c = \nu(u)^{-1} \cdot p(u) \subset \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{Q}.$$

Aus Satz 8 folgt wegen der für jedes $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{R}$ gültigen Gleichung $(\mathfrak{a}_{\Lambda^*})_{\Lambda^*} = \mathfrak{a}_{\Lambda^*}$ [14]): Das System R_{Λ^*} aller Ideale $\mathfrak{a}_{\Lambda^*}$ aus $\mathfrak{R}$ wird durch die Zuordnung von Erweiterungs- und Verengungsideal umkehrbar eindeutig auf das System Q_{Λ^*} aller Erweiterungsideale $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{Q}$ ($\mathfrak{a}$ beliebig aus $\mathfrak{R}$) abgebildet. Darüber hinaus erhält man leicht:

Satz 9. *Für das System R_{Λ^*} aller Ideale* $\mathfrak{a}_{\Lambda^*}$ aus $\mathfrak{R}$ *und das System Q_{Λ^*} aller Erweiterungsideale $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{Q}$ gelten genau dieselben Sätze* 2 bis 7, *wie sie oben für das System aller $\mathfrak{R}$-Ideale und das System aller Erweiterungsideale $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}$ abgeleitet wurden.*

Der Beweis von Satz 3 erfordert so geringe Abänderungen der früheren Beweise, daß wir uns mit einigen Andeutungen begnügen dürfen. Man beachte: a) Es ist stets $\mathfrak{a}_{\Lambda^*} \frown \mathfrak{b}_{\Lambda^*} = (\mathfrak{a} \frown \mathfrak{b})_{\Lambda^*}$. (Wichtig für die Übertragung von Satz 2). — b) Ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{\Lambda^*}$, und bedeutet $\mathfrak{b}$ ein beliebiges Ideal, N ein beliebiges m. a. System von endlichen Idealen aus $\mathfrak{R}$, so ist stets $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b})_{\Lambda^*} = \mathfrak{a} : \mathfrak{b}$, $(\mathfrak{a}_{\mathsf{N}})_{\Lambda^*} = (\mathfrak{a}_{\Lambda^*})_{\mathsf{N}} = \mathfrak{a}_{\mathsf{N}}$. (Wichtig für die Übertragung der Sätze 3 und 7.) [15]) — c) Für das Primärideal $\mathfrak{q}$ aus $\mathfrak{R}$ wird dann und nur dann $\mathfrak{q}_{\Lambda^*} = \mathfrak{q}$, wenn das zu $\mathfrak{q}$ gehörige Primideal $\mathfrak{p}$ kein Ideal aus Λ^* enthält. Ist $\mathfrak{a}_{\Lambda^*} = \mathfrak{a}$, so wird auch $\mathfrak{q}_{\Lambda^*} = \mathfrak{q}$ für jede isolierte Primärkomponente $\mathfrak{q}$ von $\mathfrak{a}$. (Für die Übertragung von Satz 4 und Satz 5.)

Bis jetzt waren wir vom Ringe $\mathfrak{Q}$ ausgegangen und hatten mit seiner Hilfe das Idealsystem Λ^* definiert. Man kann aber auch umgekehrt ein ganz beliebiges vollständiges m. a. System Λ^* von endlichen Idealen in $\mathfrak{R}$ auszeichnen und zu Λ^* das vollständige m. a. Elementsystem S_q^* aller Polynome $\nu(u)$ mit zu Λ^* gehörigem Inhalt, sowie den durch S_q^* erzeugten Quotientenring $\mathfrak{Q}^*$ von $\mathfrak{P}$ bilden. *Dann gelten jedenfalls für Λ^* und $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}^*$ die Sätze* 8 *und* 9. — Diese Bemerkung scheint aus dem folgenden Grunde nicht unwichtig:

Ist S^* ein vollständiges m. a. Elementsystem aus $\mathfrak{R}$, und verstehen wir unter $\mathfrak{R}_{S^*}$ den Ring aller Quotienten $\frac{a}{s}$ ($a \subset \mathfrak{R}$, $s \subset S^*$), so entsprechen die sämtlichen Ideale aus $\mathfrak{R}_{S^*}$ umkehrbar eindeutig den Idealen $\mathfrak{a}_{S^*}$ aus $\mathfrak{R}$, und man kann, statt zu jedem Ideal $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{R}$ das i. K. I. $\mathfrak{a}_{S^*}$ zu bilden, ebensogut von $\mathfrak{R}$ zum Quotientenring $\mathfrak{R}_{S^*}$ übergehen.

Einem beliebigen vollständigen m. a. Idealsystem Λ^* dagegen läßt sich i. a. nicht in gleicher Weise ein aus Quotienten von $\mathfrak{R}$-Elementen gebildeter

---

[14]) Unter Berücksichtigung der Tatsache, daß Λ nur endliche Ideale enthält, leicht zu verifizieren. Vgl. § 5, Beweis von Satz 14, Abschnitt b).

[15]) Einfache Verifikationen. Vgl. § 6, Beweis von Satz 16, Abschnitt b).

Ring $\mathfrak{R}_{A^*}$ zuordnen. Hier liefert nun auf Grund von Satz 8 und Satz 9 der Polynomquotientenring $\mathfrak{Q}^*$ einen gewissen Ersatz für den fehlenden Ring $\mathfrak{R}_{A^*}$. — Man könnte mit einigem Recht sagen, es handle sich bei der Konstruktion von $\mathfrak{Q}^*$ um die Bildung eines zum A^*-Idealsystem gehörigen „*Funktionalrings*" im Sinne von KRONECKER. Doch werden wir diese Ausdrucksweise lieber vermeiden, da sie sich nicht genau mit der Terminologie der früheren Beiträge deckt. Die Bedeutung der m. a. Idealsysteme für die Theorie der KRONECKERschen Funktionalringe im Sinne von Beitrag I wird in § 6 genauer untersucht werden.

§ 4.

Eine Zwischenuntersuchung.

Das Ideal $\mathfrak{c}$ möge *zu* $\mathfrak{a}$ *idealprim* genannt werden, wenn $\mathfrak{a} : \mathfrak{c} = \mathfrak{a}$ ist. Dagegen soll, wie üblich, $\mathfrak{c}$ nur dann *zu* $\mathfrak{a}$ *prim* heißen, wenn $\mathfrak{c}$ ein zu $\mathfrak{a}$ primes Element enthält, wenn also $\mathfrak{a} : (c) = \mathfrak{a}$ wird für geeignetes $c \subset \mathfrak{c}$. Bei der Entwicklung der Idealtheorie beliebiger Integritätsbereiche ist es häufig lästig, daß die Begriffe „idealprim" und „prim" schlechtweg verschiedenen Umfang besitzen; bei den Ringen mit Maximalbedingung dagegen, in denen alle Ideale endlich sind, tritt eine solche Schwierigkeit nicht auf, und diese Beobachtung führt auf den Gedanken, ob nicht möglicherweise in jedem Integritätsbereich $\mathfrak{R}$ für jedes *endliche* Ideal $\mathfrak{e}$ aus $\mathfrak{a} : \mathfrak{e} = \mathfrak{a}$ die Existenz eines $c \subset \mathfrak{e}$ mit $\mathfrak{a} : (c) = \mathfrak{a}$ folgt. Daß diese Vermutung mit gewissen Überlegungen aus § 2 eng zusammenhängt, zeigt

Satz 10. *Ist in* $\mathfrak{R}$ *für beliebiges* $\mathfrak{a}$ *jedes zu* $\mathfrak{a}$ *idealprime endliche Ideal stets auch zu* $\mathfrak{a}$ *prim, so sind in* $\mathfrak{R}$ *alle i. K. I. im weiteren Sinne auch i. K. I. im engeren Sinne.*

In der Tat, es sei in $\mathfrak{R}$ irgendein Ideal $\mathfrak{a}$ und irgendein m. a. System A gegeben, und es bedeute S das m. a. System aller zu $\mathfrak{a}_A$ primen Elemente. Dann ist jedenfalls $\mathfrak{a}_S \subseteq \mathfrak{a}_A$, denn wir haben $(\mathfrak{a}_A)_S = \mathfrak{a}_A$ und aus $a \cdot s \subset \mathfrak{a}$ folgt $a \cdot s \subset \mathfrak{a}_A$, $a \subset \mathfrak{a}_A$. Andrerseits ist aber auch $\mathfrak{a}_S \supseteq \mathfrak{a}_A$. Ist nämlich $a \subset \mathfrak{a}_A$, gilt also eine Beziehung $(a) \cdot \mathfrak{e} \subseteq \mathfrak{a}$ $(\mathfrak{e} \subset A)$, so ist $\mathfrak{a}_A : \mathfrak{e} = \mathfrak{a}_A$ wegen $(\mathfrak{a}_A)_A = \mathfrak{a}_A$; es enthält also $\mathfrak{e}$ nach Voraussetzung ein zu $\mathfrak{a}_A$ primes Element $s \subset S$, für das selbstverständlich $a \cdot s \subset \mathfrak{a}$ sein muß, d. h. es ist $a \subset \mathfrak{a}_S$. — Mit Rücksicht auf Satz 10 sollen jetzt über die Ringe mit Maximalbedingung hinaus weitere Ringklassen aufgesucht werden, in denen bei endlichen Idealen die Begriffe „idealprim" und „prim" inhaltlich gleichwertig sind. Als Ausgangspunkt für unsere Betrachtungen wählen wir das folgende

Lemma. *Es sei* $\mathfrak{a}$ *ein beliebiges Ideal, das kein Ideal* $\mathfrak{e}$ *(kein Element* a*) aus dem m. a. System* A (S) *enthält. Dann gibt es stets mindestens ein „maxi-*

males Primoberideal" $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{a}$ „hinsichtlich Λ (S)", das seinerseits gleichfalls kein $\mathfrak{e}$ aus Λ (a aus S) enthält, während in jedem echten Oberideal von $\mathfrak{p}$ mindestens ein zu Λ gehöriges Unterideal (zu S gehöriges Element) auftritt.

Der Beweis des Lemmas kann im Falle eines Idealsystems Λ genau so geführt werden wie im wohlbekannten Falle eines Elementsystems S [5]). Wesentlich für die entscheidende transfinite Konstruktion ist die folgende Bemerkung: Ist $\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{a}_\sigma \subset \cdots$ eine wohlgeordnete Oberidealkette, bei der kein einziges Glied das *endliche* Ideal $\mathfrak{e}$ enthält, so enthält auch die Summe aller $\mathfrak{a}_\sigma$ das Ideal $\mathfrak{e}$ nicht [16]). — Wir definieren jetzt:

Unter einem *element-maximalen* bzw. *ideal-maximalen Primoberideal von* $\mathfrak{a}$ soll ein maximales Primoberideal von $\mathfrak{a}$ hinsichtlich des Systems $\overline{S}(\mathfrak{a})$ bzw. $\overline{\Lambda}(\mathfrak{a})$ aller zu $\mathfrak{a}$ primen Elemente bzw. aller zu $\mathfrak{a}$ idealprimen endlichen Ideale verstanden werden [17]). — Aus dem Lemma folgt sofort:

Jedes Ideal $\mathfrak{c}$, das kein zu $\mathfrak{a}$ primes Element bzw. kein zu $\mathfrak{a}$ idealprimes endliches Ideal enthält, ist seinerseits in mindestens einem element-maximalen bzw. ideal-maximalen Primoberideal von $\mathfrak{a}$ enthalten. — Weiter ergibt sich leicht:

Hilfssatz 3. a) *Zwei verschiedene element-maximale (ideal-maximale) Primoberideale von $\mathfrak{a}$ sind stets gegenseitig prim.* b) *Jedes ideal-maximale Primoberideal von $\mathfrak{a}$ ist (echtes oder unechtes) Unterideal mindestens eines element-maximalen Primoberideals.* c) *Jedes Element eines element-maximalen Primoberideals von $\mathfrak{a}$ liegt in mindestens einem ideal-maximalen Primoberideal.* d) *Ist jedes element-maximale Primoberideal von $\mathfrak{a}$ gleichzeitig ideal-maximal, so ist auch umgekehrt jedes ideal-maximale Primoberideal gleichzeitig element-maximal* [18]).

In der Tat, a) ist trivial. Bei b) bzw. c) beachte man, daß ein ideal-maximales Primoberideal von $\mathfrak{a}$ kein zu $\mathfrak{a}$ primes Hauptideal, d. h. kein zu $\mathfrak{a}$ primes Element enthält, bzw. daß jedes Element aus einem element-maximalen Primoberideal von $\mathfrak{a}$ die Basis eines zu $\mathfrak{a}$ nichtprimen Hauptideals darstellt. Behauptung d) ist eine einfache Folgerung aus den Behauptungen a) und b). —

16) Daß das Lemma nicht dadurch verallgemeinert werden kann, daß man an Stelle eines m. a. Systems Λ von *endlichen* Idealen ein beliebiges m. a. Idealsystem M setzt, zeigt folgendes Beispiel: Es sei $\mathfrak{p}$ ein (sicher nicht endliches) Primideal, das der Gleichung $\mathfrak{p}^2 = \mathfrak{p}$ genügt, $\mathfrak{q}$ sei ein echtes zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal. Dann bildet $\mathfrak{p}$ für sich allein ein m. a.-System M, und es gibt kein maximales Primoberideal von $\mathfrak{q}$ hinsichtlich M.

17) Die element-maximalen Primoberideale von $\mathfrak{a}$ sind identisch mit den maximalen nichtprimen Oberidealen von $\mathfrak{a}$ im Sinne von Krull [9]) Nr. 7, S. 16. Die ideal-maximalen Primoberideale wurden m. W. bisher noch nirgends eingeführt.

18) Der umgekehrte Satz, daß jedes element-maximale Primoberideal von $\mathfrak{a}$ gleichzeitig ideal-maximal sein muß, falls jedes ideal-maximale Primoberideal gleichzeitig element-maximal ist, scheint mir zum mindesten nicht selbstverständlich.

Die Bedeutung der maximalen Primoberideale von $\mathfrak{a}$ für die Ausgangsfragestellung von § 4 zeigt

Satz 11. *Dann und nur dann, wenn in $\mathfrak{R}$ für jedes $\mathfrak{a}$ alle element-maximalen* Primoberideale *gleichzeitig ideal-maximal sind, enthält jedes zu einem beliebigen Ideal $\mathfrak{a}$ idealprime endliche Ideal $\mathfrak{e}$ stets ein zu $\mathfrak{a}$ primes Element.*

Ist nämlich einerseits $\mathfrak{a} : \mathfrak{e} = \mathfrak{a}$, ohne daß $\mathfrak{e}$ ein zu $\mathfrak{a}$ primes Element enthält, so liegt $\mathfrak{e}$ in mindestens einem element-maximalen Primoberideal von $\mathfrak{a}$, das eben wegen $\mathfrak{e} \subseteqq \mathfrak{p}$ nicht auch gleichzeitig ideal-maximal sein kann. Ist andrerseits das Primoberideal $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{a}$ element-, aber nicht ideal-maximal, so enthält $\mathfrak{p}$ ein zu $\mathfrak{a}$ idealprimes endliches Ideal $\mathfrak{e}$, das als Unterideal von $\mathfrak{p}$ ausschließlich aus zu $\mathfrak{a}$ nichtprimen Elementen besteht. — Mit Hilfe des Lemmas und des Satzes 11 beweisen wir jetzt:

Satz 12. *Im Ringe $\mathfrak{R}$ ist jedes zu einem beliebigen Ideal $\mathfrak{a}$ idealprime endliche Ideal $\mathfrak{e}$ gleichzeitig zu $\mathfrak{a}$ prim,* a) *wenn es in $\mathfrak{R}$ keine unendliche Folge $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots$ von gegenseitig primen Primidealen gibt, und* b) *wenn $\mathfrak{R}$ einartig ist, wenn also in $\mathfrak{R}$ kein Primideal ein (von $\mathfrak{R}$ selbst verschiedenes) echtes Oberideal besitzt.*

In der Tat, unter der Voraussetzung a) besitzt ein beliebiges Ideal $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{R}$ nach Hilfssatz 3a) sicher nur endlich viele ideal-maximale Primoberideale $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$. Ist nun $\mathfrak{p}$ irgendein element-maximales Primoberideal von $\mathfrak{a}$, so muß $\mathfrak{p}$ in einem der Ideale $\mathfrak{p}_i$, etwa in $\mathfrak{p}_1$, enthalten sein, weil es andernfalls nach einem bekannten Schlusse im Widerspruch zu Hilfssatz 3 c) in $\mathfrak{p}$ mindestens ein Element p geben müßte, das in keinem der endlich vielen Primideale $\mathfrak{p}_i$ vorkäme. Aus $\mathfrak{p} \subseteqq \mathfrak{p}_1$ folgt aber nach Hilfssatz 3 a), b) sofort $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1$. D. h. es ist in $\mathfrak{R}$ bei jedem Ideal $\mathfrak{a}$ jedes element-maximale Primoberideal gleichzeitig ideal-maximal, man kann also Satz 11 anwenden.

Es sei andrerseits $\mathfrak{R}$ einartig, $\mathfrak{a}$ sei ein beliebiges Ideal aus $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{e}$ ein endliches Ideal, das ausschließlich aus zu $\mathfrak{a}$ nichtprimen Elementen besteht; dann ist $\mathfrak{e}$ nach dem Lemma in mindestens einem element-maximalen Primoberideal $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{a}$ enthalten. Wegen der Einartigkeit von $\mathfrak{R}$ ist $\mathfrak{p}$ ein minimales Primoberideal von $\mathfrak{a}$, und wegen der Endlichkeit von $\mathfrak{e}$ muß für hinreichend großes ϱ das endliche Ideal $\mathfrak{e}^{\varrho} = (c_1, \ldots, c_m)$ in der zu $\mathfrak{p}$ gehörigen isolierten Primärkomponente $\mathfrak{q}$ von $\mathfrak{a}$ enthalten sein. Nach einer Grundeigenschaft der isolierten Primärkomponenten [9]) gibt es dann zu jedem c_i ein nicht in $\mathfrak{p}$ liegendes r_i, derart, daß $c_i \cdot r_i \subset \mathfrak{a}$ wird, und für $r = r_1 \cdot \ldots \cdot r_m$ haben wir $r \not\subset \mathfrak{p}$, $r \not\subset \mathfrak{a}$, $(r) \cdot \mathfrak{e}^{\varrho} \subseteqq \mathfrak{a}$. Es ist also $\mathfrak{a} : \mathfrak{e}^{\varrho} \neq \mathfrak{a}$ und damit auch $\mathfrak{a} : \mathfrak{e} \neq \mathfrak{a}$, d. h.: Das endliche Ideal $\mathfrak{e}$ ist sicher *nicht* zu $\mathfrak{a}$ idealprim, wenn es kein zu $\mathfrak{a}$ primes Element enthält.

Satz 12a) scheint mir vor allem deshalb bemerkenswert, weil in keinem Ringe, der sich als Durchschnitt von endlich vielen Bewertungsringen beliebigen Typs darstellen läßt, eine unendliche Folge $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots$ von gegenseitig primen Primidealen existiert[19]). Im übrigen sieht man sofort, daß das Ergebnis von Satz 12 a) folgendermaßen verallgemeinert werden kann:

Besitzt in einem beliebigen Ringe $\mathfrak{R}$ ein beliebiges Ideal $\mathfrak{a}$ nur endlich viele ideal-maximale Primoberideale $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$, so stellen die $\mathfrak{p}_i$ gleichzeitig die sämtlichen element-maximalen Primoberideale von $\mathfrak{a}$ dar, und es enthält jedes zu $\mathfrak{a}$ idealprime endliche Ideal $\mathfrak{e}$ ein zu $\mathfrak{a}$ primes Element.

Unsere Resultate zeigen, daß es ziemlich schwierig sein dürfte, ein Ideal $\mathfrak{a}$ zu finden, zu dem ein endliches Ideal $\mathfrak{e}$ existiert, das der Gleichung $\mathfrak{a} : \mathfrak{e} = \mathfrak{a}$ genügt, ohne zu $\mathfrak{a}$ prim zu sein; andrerseits aber reichen sie m. E. doch nicht aus, um die Wahrscheinlichkeit der Vermutung, daß die Begriffe „idealprim" und „prim" bei endlichen Idealen in *allen* Ringen inhaltlich identisch sind, wesentlich zu erhöhen. Auch die Frage, ob etwa *immer* jedes i. K. I. im weiteren Sinne stets auch ein i. K. I. im engeren Sinne darstellt, muß daher trotz Satz 10 völlig offen bleiben.

§ 5.

Λ-Operationen als $'$-Operationen.

In § 5 soll gezeigt werden, daß mit Hilfe des Begriffes des m. a. Systems Λ die in Beitrag I, § 10 gewonnenen Ergebnisse unter starker Vereinfachung der Beweise beträchtlich verallgemeinert werden können[20]). Wie in Beitrag I definieren wir:

Ist jedem ganzen oder nichtganzen Ideal $\mathfrak{a}$ des Integritätsbereichs $\mathfrak{R}$ eindeutig ein Oberideal $\mathfrak{a}'$ zugeordnet, so soll von einer $'$-Operation gesprochen werden, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$(1)\quad \mathfrak{R}' = \mathfrak{R}. \qquad (2)\quad \mathfrak{a}' \supseteqq \mathfrak{a};\ \text{ aus } \mathfrak{a} \supseteqq \mathfrak{b} \text{ folgt } \mathfrak{a}' \supseteqq \mathfrak{b}'. \qquad (3)\quad (\mathfrak{a}')' = \mathfrak{a}.$$

$$(4)\quad (\mathfrak{a}' + \mathfrak{b}')' = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})'. \qquad (5)\quad (\mathfrak{a}' \cdot \mathfrak{b}')' = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})'. \qquad (6)\quad (\mathfrak{a}' \frown \mathfrak{b}')' = \mathfrak{a}' \frown \mathfrak{b}'.$$

$$(7)\quad (a)' = (a);\quad ((a) \cdot \mathfrak{a})' = (a) \cdot \mathfrak{a}'.$$

Die Formeln (1) bis (7), die einschließlich der Anordnung unverändert aus Beitrag I übernommen wurden, stellen keine untereinander unabhängigen Bedingungen dar. Vielmehr gilt:

Formel (2) *ergibt sich als Spezialfall aus Formel* (4), *wenn man* $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ *setzt. Formel* (6) *ist eine einfache Folgerung aus den Formeln* (2) *und* (3).

---

[19]) Der Beweis dieser Behauptung kann z. B. leicht mit Hilfe des „Hauptsatzes" von KRULL[9]) Nr. 41, S. 115 erbracht werden.

[20]) Auf die Einzelheiten der Untersuchungen von Beitrag I wird nicht zurückgegriffen, auch werden die wichtigsten Definitionen kurz wiederholt. Vorausgesetzt wird nur eine gewisse grundsätzliche Vertrautheit mit den Gedankengängen von Beitrag I.

In der Tat, die erste Behauptung ist wegen $\mathfrak{a} + \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}' + \mathfrak{a}' = \mathfrak{a}'$ trivial. Ist andrerseits $a \subset (\mathfrak{a}' \frown \mathfrak{b}')'$, so ist nach (3) erst recht $a \subset (\mathfrak{a}')' \frown (\mathfrak{b}')'$ und nach (2) wird $(\mathfrak{a}')' \frown (\mathfrak{b}')' = \mathfrak{a}' \frown \mathfrak{b}'$. — *Man hat also für eine '-Operation nur die Gültigkeit der Formeln* (1), (3), (4), (5), (7) *zu beweisen.* Dabei sind in den von uns betrachteten Fällen (1) und (3) so gut wie selbstverständlich, (7) macht keine nennenswerten Schwierigkeiten, und die Beweise von (4) und (5) laufen streng parallel. So konzentriert sich im folgenden das Hauptinteresse auf Formel (4), wobei wegen (3) natürlich nur gezeigt werden muß, daß $(\mathfrak{a}' + \mathfrak{b}')' \subseteqq (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})'$ ist[21]). — Wichtiger noch als diese Bemerkungen ist für uns

Satz 13. *Ist im Bereich aller ganzen Ideale von $\mathfrak{R}$ eine den Bedingungen* (1) *bis* (7) *genügende '-Operation erklärt, so kann diese Operation stets in einer und nur einer Weise unter Erhaltung der Allgemeingültigkeit der Formeln* (1) *bis* (7) *auf die nichtganzen Ideale von $\mathfrak{R}$ ausgedehnt werden, und zwar hat man durchweg*

$$\mathfrak{a}' = \mathfrak{g}' \cdot (a^{-1})$$

zu setzen, falls das Ideal $\mathfrak{a}$ in der Form $\mathfrak{a} = \mathfrak{g} \cdot (a^{-1})$ mit ganzem $\mathfrak{g}$ und ganzem a dargestellt werden kann.

Zum Beweis hat man nur zu zeigen, daß die in Satz 13 angegebene Definition der '-Operation für nichtganze Ideale eindeutig ist; die Verifikation der Allgemeingültigkeit der Formeln (1) bis (7) ist dann trivial. Es sei nun $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}_1 \cdot (a_1^{-1}) = \mathfrak{g}_2 \cdot (a_2^{-1})$. Dann ist $(a_2) \cdot \mathfrak{g}_1 = (a_1) \cdot \mathfrak{g}_2 = \mathfrak{h}$ ganz und damit nach der voraussetzungsgemäß für ganze Ideale geltenden Formel (7): $(a_2) \cdot \mathfrak{g}_1' = (a_1) \cdot \mathfrak{g}_2'$, $(a_1^{-1}) \cdot \mathfrak{g}_1' = (a_2^{-1}) \cdot \mathfrak{g}_2'$. — Angesichts von Satz 13 dürfen und wollen wir uns im folgenden, ebenso wie in § 1 bis 4, ausschließlich auf ganze Ideale beschränken.

Satz 14. *Ist in $\mathfrak{R}$ ein festes m. a. Idealsystem Λ gegeben, und ordnen wir jedem Ideal $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{R}$ das Oberideal $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}_\Lambda$ zu, so entsteht auf diese Weise dann (und selbstverständlich auch nur dann) eine '-Operation, wenn für ein beliebiges Hauptideal (a) aus $\mathfrak{R}$ stets $(a) \;\; = (a)$ wird.*

Zum Beweis beachte man: a) Die Gültigkeit der Formeln (1) und (3) ist selbstverständlich. — b) Es sei $a \subset (\mathfrak{a}_\Lambda + \mathfrak{b}_\Lambda)_\Lambda$. Dann gibt es in Λ ein $\mathfrak{e}'$, für das $(a) \cdot \mathfrak{e}' \subseteqq \mathfrak{a}_\Lambda + \mathfrak{b}_\Lambda$ wird, und wegen der Endlichkeit von $\mathfrak{e}'$ gilt sogar eine Beziehung $(a) \cdot \mathfrak{e}' \subseteqq \bar{\mathfrak{e}}_1 + \bar{\mathfrak{e}}_2$, wobei $\bar{\mathfrak{e}}_1$ bzw. $\bar{\mathfrak{e}}_2$ ein geeignetes endliches Unterideal von $\mathfrak{a}_\Lambda$ bzw. $\mathfrak{b}_\Lambda$ bedeutet. Weiter existieren in Λ zwei Ideale $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ derart, daß $\bar{\mathfrak{e}}_1 \cdot \mathfrak{e}_1 \subseteqq \mathfrak{a}$, $\bar{\mathfrak{e}}_2 \cdot \mathfrak{e}_2 \subseteqq \mathfrak{b}$ wird. Setzt man nun $\mathfrak{e} = \mathfrak{e}' \cdot \mathfrak{e}_1 \cdot \mathfrak{e}_2$,

---

21) Hier zeigt sich ein wichtiger Unterschied gegenüber LORENZEN[6]). Denn dort wird von einer '-Operation weder die Gültigkeit der Formel (3) noch der Formel (4) noch auch nur der Formel (2) gefordert. (Daß bei LORENZEN von Idealsystemen statt von '-Operationen die Rede ist, bedeutet nur einen unwesentlichen formalen Unterschied.)

so gehört $\mathfrak{e}$ zu A und es ist $(a) \cdot \mathfrak{e} \subseteq \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$. D. h. aber, es ist $(\mathfrak{a}_A + \mathfrak{b}_A)_A \subseteq (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})_A$ — Formel (4)! Der Beweis von Formel (5) wird nach genau dem gleichen Schema erbracht. — c) Die Gültigkeit der ersten Formel (7) wurde ausdrücklich vorausgesetzt, man hat also nur noch die zweite Formel (7) zu beweisen. Zunächst ist jedenfalls $(a) \cdot \mathfrak{a}_A \subseteq ((a) \cdot \mathfrak{a})_A$. Ist andrerseits $b \subset ((a) \cdot \mathfrak{a})_A$, so gibt es in A ein $\mathfrak{e}$ derart, daß $(b) \cdot \mathfrak{e} \subseteq (a) \cdot \mathfrak{a}$ wird, und daraus folgt wegen $(a)_A = (a)$ sofort $b = a \cdot c$, $c \subset \mathfrak{a}_A$, $b \subset (a) \cdot \mathfrak{a}_A$.

Aus Satz 14 ergibt sich insbesondere:

Satz 15. *Ist $\mathfrak{R}$ eine endliche diskrete Hauptordnung, so stellt die A-Idealbildung dann und nur dann eine $'$-Operation dar, wenn A kein Unterideal eines minimalen Ringprimideals enthält.*

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus den Grundeigenschaften der endlichen diskreten Hauptordnungen [22]). — Das Hauptresultat von Beitrag I, § 10, wo „A-Operationen" in ganz abgeschlossenen Ringen mit Maximalbedingung betrachtet wurden, läßt sich leicht als Spezialfall von Satz 15 auffassen. Man hat dabei nur zu beachten, daß jeder ganz abgeschlossene Integritätsbereich mit Maximalbedingung eine spezielle endliche diskrete Hauptordnung ist, und sich zu überzeugen, daß jede „A-Operation" im Sinne von Beitrag I, § 10 auch eine A-Operation im Sinne des Textes ist. — Die Richtigkeit dieser letzteren Tatsache aber ergibt sich unmittelbar aus der folgenden Bemerkung:

Es sei $\mathfrak{R}$ ein beliebiger Ring mit Maximalbedingung, $\bar{A}$ sei eine Menge von Primidealen aus $\mathfrak{R}$, zu der gleichzeitig mit $\mathfrak{p}$ stets auch jedes echte Primoberideal von $\mathfrak{p}$ gehört. Dann bildet die Menge aller der Ideale, die in keinem nicht in $\bar{A}$ vorkommenden Primideal enthalten sind, ein (vollständiges) m. a. System A, und man erhält bei beliebig vorgegebenem $\mathfrak{a}$ das Ideal $\mathfrak{a}_A$ einfach dadurch, daß man in einer Primärkomponentenzerlegung $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n$ alle die Primärideale $\mathfrak{q}_i$ wegläßt, deren zugehörige Primideale in $\bar{A}$ vorkommen.

Die zu Beginn des Paragraphen angekündigte Einordnung der Ergebnisse von Beitrag I, § 10 in unsere allgemeinen Untersuchungen ist also tatsächlich ohne nennenswerte Schwierigkeit durchführbar.

§ 6.

w_A-Operationen.

Auch bei den folgenden Untersuchungen knüpfen wir an Beitrag I an. Es sollen die Ergebnisse des damaligen § 11 in geeigneter Fassung auf beliebige Integritätsbereiche ausgedehnt werden. Im Anschluß an P. LORENZEN [6]) be-

[22]) Zur Theorie der endlichen diskreten Hauptordnungen vgl. z. B. KRULL [9]) Nr. 37.

zeichnen wir eine $'$-Operation als *endlichartig*, wenn bei jedem Ideal $\mathfrak{a}$ ausnahmslos $\mathfrak{a}'$ gleich der Summe aller $\mathfrak{e}'$ ($\mathfrak{e} \subseteq \mathfrak{a}$) ist. Eine durch ein m. a. System A definierte $'$-Operation ist offenbar stets endlichartig. Unser nächstes Ziel ist der Beweis von

Satz 16. *Es sei im Ringe $\mathfrak{R}$ eine feste endlichartige $'$-Operation gegeben, die etwa durch den Buchstaben w charakterisiert werden möge*[23]), $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}_w$. *Ist dann A irgendein m. a. Idealsystem aus $\mathfrak{R}$, das der Gleichung $(a)_A = (a)$ für jedes a genügt, so stellt auch die Bildung von $\mathfrak{a}_{w_A} = (\mathfrak{a}_w)_A$ in $\mathfrak{R}$ eine endlichartige $'$-Operation dar.*

Beim Beweis von Satz 16 stützen wir uns vor allem auf den folgenden, bereits in Beitrag I gelegentlich benutzten

Hilfssatz 4. *Bei jeder $'$-Operation ist für beliebiges $\mathfrak{a}$ und endliches $\mathfrak{e}$ stets* $(\mathfrak{a}' : \mathfrak{e})' = \mathfrak{a}' : \mathfrak{e}$.

In der Tat, ist etwa $\mathfrak{e} = (e_1, \ldots, e_n)$, und lassen wir für den Augenblick auch nichtganze Ideale zur Betrachtung zu, so haben wir:

$$\mathfrak{a}' : \mathfrak{e} = (\mathfrak{a}' \cdot e_1^{-1}) \frown (\mathfrak{a}' \cdot e_2^{-1}) \frown \cdots \frown (\mathfrak{a}' \cdot e_n^{-1}) \frown \mathfrak{R},$$

und aus den Grundformeln der $'$-Operationen ergibt sich sofort:

$$(\mathfrak{a}' \cdot e_i^{-1})' = \mathfrak{a}' \cdot e_i^{-1}; \qquad \mathfrak{R}' = \mathfrak{R};$$

$$\begin{aligned}(\mathfrak{a}' : \mathfrak{e})' &= ((\mathfrak{a}' \cdot e_1^{-1}) \frown (\mathfrak{a}' \cdot e_2^{-1}) \frown \cdots \frown (\mathfrak{a}' \cdot e_n^{-1}) \frown \mathfrak{R})' \\ &= (\mathfrak{a}' \cdot e_1^{-1}) \frown (\mathfrak{a}' \cdot e_2^{-1}) \frown \cdots \frown (\mathfrak{a}' \cdot e_n^{-1}) \frown \mathfrak{R} = \mathfrak{a} : \mathfrak{e}.\end{aligned}$$

Wir wenden uns jetzt zum Beweise von Satz 16 selbst.

a) Daß $\mathfrak{R}_{w_A} = \mathfrak{R}$ wird, und daß aus $\mathfrak{a} \supseteqq \mathfrak{b}$ stets $\mathfrak{a}_{w_A} \supseteqq \mathfrak{b}_{w_A}$ folgt, (Formel (1) bzw. (3)), ist trivial. Ferner ergibt sich sofort:

$(\mathfrak{a} \cdot (a))_{w_A} = ((\mathfrak{a} \cdot (a)_w)_A = (\mathfrak{a}_w \cdot (a))_A = (\mathfrak{a}_w)_A \cdot (a) = \mathfrak{a}_{w_A} \cdot (a)$, — Formel (7)!

b) Von den Formeln (4) und (5) braucht wegen der Gleichartigkeit der nötigen Überlegungen nur die eine, etwa die Beziehung $(\mathfrak{a}_{w_A} + \mathfrak{b}_{w_A})_{w_A} \subseteq (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})_{w_A}$, bewiesen zu werden. — Zunächst hat man jedenfalls: $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})_{w_A} = ((\mathfrak{a} + \mathfrak{b})_w)_A = ((\mathfrak{a}_w + \mathfrak{b}_w)_w)_A = (\mathfrak{a}_w + \mathfrak{b}_w)_{w_A}$. Ist ferner $(\mathfrak{a}_{w_A} + \mathfrak{b}_{w_A})_w \subseteqq (\mathfrak{a}_w + \mathfrak{b}_w)_{w_A}$, so ist auch

$$(\mathfrak{a}_{w_A} + \mathfrak{b}_{w_A})_{w_A} = ((\mathfrak{a}_{w_A} + \mathfrak{b}_{w_A})_w)_A \subseteqq ((\mathfrak{a}_w + \mathfrak{b}_w)_{w_A})_A = (\mathfrak{a}_w + \mathfrak{b}_w)_{w_A}.$$

Man braucht also nur $(\mathfrak{a}_{w_A} + \mathfrak{b}_{w_A})_w \subseteqq (\mathfrak{a}_w + \mathfrak{b}_w)_{w_A}$ zu beweisen. Sei etwa $c \subset (\mathfrak{a}_{w_A} + \mathfrak{b}_{w_A})_w$. Dann ist wegen der Endlichartigkeit der w-Operation

---

[23]) Der Buchstabe w wird zunächst nur benutzt, um mit der Bezeichnungsweise von Beitrag I in Übereinstimmung zu bleiben. Daß die zugrunde gelegte $'$-Operation eine *Wertidealoperation* ist, wird [implizite, vgl. Anm. [25])] erst von Satz 17 ab vorausgesetzt.

jedenfalls $c \subset \bar{\mathfrak{e}}_w$ für ein geeignetes endliches Unterideal $\bar{\mathfrak{e}}$ von $\mathfrak{a}_{w_A} + \mathfrak{b}_{w_A}$. Zu $\bar{\mathfrak{e}}$ aber gibt es in dem m. a. System A ein $\mathfrak{e}$, derart, daß $\bar{\mathfrak{e}} \cdot \mathfrak{e} \subseteqq \mathfrak{a}_w + \mathfrak{b}_w$ wird. Wir haben somit: $c \subset ((\mathfrak{a}_w + \mathfrak{b}_w) : \mathfrak{e})_w \subseteqq ((\mathfrak{a}_w + \mathfrak{b}_w)_w : \mathfrak{e})_w = (\mathfrak{a}_w + \mathfrak{b}_w)_w : \mathfrak{e} \subseteqq ((\mathfrak{a}_w + \mathfrak{b}_w)_w)_A = (\mathfrak{a}_w + \mathfrak{b}_w)_{w_A}$. Fertig!

c) Nach a) und b) ist die w_A-Operation eine $'$-Operation, weil für sie die Formeln (1) bis (7) von § 5 gelten. Die w_A-Operation ist aber auch endlichartig. Ist nämlich $c \subset \mathfrak{a}_{w_A} = (\mathfrak{a}_w)_A$, so gibt es wegen der Endlichartigkeit der A-Operation jedenfalls ein $\bar{\mathfrak{e}} = (e_1, \ldots, e_n) \subseteqq \mathfrak{a}_w$, derart, daß bereits $c \subset \bar{\mathfrak{e}}_A$, und zu jedem e_i existiert wegen der Endlichartigkeit der w-Operation ein $\bar{\mathfrak{e}}_i \subseteqq \mathfrak{a}$ für das $e_i \subset (\bar{\mathfrak{e}}_i)_w$. Setzen wir nun $\bar{\mathfrak{e}}^* = \bar{\mathfrak{e}}_1 + \cdots + \bar{\mathfrak{e}}_n$, so wird offenbar $\bar{\mathfrak{e}}^* \subseteqq \mathfrak{a}$, $c \subset (\bar{\mathfrak{e}}^*)_{w_A}$.

Im Falle eines ganz abgeschlossenen Integritätsbereiches $\mathfrak{R}$ bezeichneten wir in Beitrag I eine $'$-Operation als „*arithmetisch brauchbar*", wenn für beliebiges endliches $\bar{\mathfrak{e}}$ aus $\bar{\mathfrak{e}} \cdot \mathfrak{a} \subseteqq (\bar{\mathfrak{e}} \cdot \mathfrak{b})'$ stets $\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{b}'$ folgt [24]). Wir beweisen nun unter Benutzung der in Satz 16 eingeführten Bezeichnungen:

Satz 17. *Ist bei ganz abgeschlossenem $\mathfrak{R}$ die w-Operation arithmetisch brauchbar, so ist es auch die w_A-Operation.*

In der Tat, ist $\bar{\mathfrak{e}} \cdot \mathfrak{a} \subseteqq (\mathfrak{e} \cdot \mathfrak{b})_{w_A}$, so ist erst recht $\bar{\mathfrak{e}} \cdot (a) \subseteqq (\bar{\mathfrak{e}} \cdot \mathfrak{b})_{w_A}$ für jedes $a \subset \mathfrak{a}$, und damit $\bar{\mathfrak{e}} \cdot (a) \cdot \mathfrak{e} \subseteqq (\bar{\mathfrak{e}} \cdot \mathfrak{b})_w$ für geeignetes $\mathfrak{e}$ aus A. Wegen der arithmetischen Brauchbarkeit der w-Operation folgt daraus weiter: $(a) \cdot \mathfrak{e} \subseteqq \mathfrak{b}_w$, $a \subset \mathfrak{b}_{w_A}$. —

Von jetzt ab setzen wir durchweg voraus, daß $\mathfrak{R}$ ganz abgeschlossen und die w-Operation arithmetisch brauchbar ist. Bedeutet $\mathfrak{K}$ den Quotientenkörper von $\mathfrak{R}$, $\tilde{\mathfrak{K}} = \mathfrak{K}(u)$ einen einfach transzendenten Oberkörper von $\mathfrak{K}$, so entspricht sowohl der w- als auch der w_A-Operation in $\tilde{\mathfrak{K}}$ ein bestimmter „KRONECKER*scher Funktionalring*" $\tilde{\mathfrak{M}}_w$ bzw. $\tilde{\mathfrak{M}}_{w_A}$; dabei besteht $\tilde{\mathfrak{M}}_w$ bzw. $\tilde{\mathfrak{M}}_{w_A}$ aus allen und nur den Polynomquotienten $\dfrac{a_0 + a_1 u + \cdots + a_n u^n}{b_0 + b_1 u + \cdots + b_m u^m}$, bei denen $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \subseteqq (b_0, b_1, \ldots, b_m)_w$ bzw. $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \subseteqq (b_0, b_1, \ldots, b_m)_{w_A}$ ist, und es wird $\mathfrak{a} \cdot \tilde{\mathfrak{M}}_w \frown \mathfrak{K} = \mathfrak{a}_w$, $\mathfrak{a} \cdot \tilde{\mathfrak{M}}_{w_A} \frown \mathfrak{K} = \mathfrak{a}_{w_A}$ für jedes $\mathfrak{R}$-Ideal $\mathfrak{a}$ [25]).

---

[24]) In der Ausdrucksweise von LORENZEN [6]) wäre $\mathfrak{R}$ als *$'$-abgeschlossen* zu bezeichnen.

[25]) Daß auch für die nichtendlichen Ideale von $\mathfrak{R}$ stets $\mathfrak{a}_w = \mathfrak{a} \cdot \tilde{\mathfrak{M}}_w \frown \mathfrak{K}$ ($\mathfrak{a}_{w_A} = \mathfrak{a} \cdot \tilde{\mathfrak{M}}_{w_A} \frown \mathfrak{K}$) sein muß, folgt aus der Endlichartigkeit der w- (w_A-) Operation. — Aus der Allgemeingültigkeit der Formel $\mathfrak{a}_w = \mathfrak{a} \cdot \tilde{\mathfrak{M}}_w \frown \mathfrak{K}$ ergibt sich leicht, *daß jede arithmetisch brauchbare, endlichartige w-Operation eine Wertidealoperation sein muß.* Sind nämlich $\tilde{\mathfrak{B}}_1, \tilde{\mathfrak{B}}_2, \ldots, \tilde{\mathfrak{B}}_\tau, \ldots$ die sämtlichen Bewertungsoberringe von $\tilde{\mathfrak{M}}_w$ im zugehörigen Quotientenkörper $\tilde{\mathfrak{K}}$ und setzt man durchweg $\mathfrak{B}_\tau = \tilde{\mathfrak{B}}_\tau \frown \mathfrak{K}$, so wird all-

Satz 18. *$\widetilde{\mathfrak{M}}_{w_\Lambda}$ ist gerade derjenige Quotientenring von $\widetilde{\mathfrak{M}}_w$, der durch das f. m. a. System aller Polynome $p(u) = e_0 + e_1 u + \cdots + e_m u^m$ mit zu Λ gehörigem Inhalt erzeugt wird.*

Zum Beweis hat man nur zu beachten: a) Wegen $\mathfrak{a}_{w_\Lambda} \supseteq \mathfrak{a}_w$ ist jedenfalls $\widetilde{\mathfrak{M}}_{w_\Lambda} \supseteq \widetilde{\mathfrak{M}}_w$. — b) Ist $(e_0, e_1, \ldots, e_m)$ ein Ideal aus Λ, so ist $(e_0, e_1, \ldots, e_m)_\Lambda = \mathfrak{R}$ und damit $\dfrac{1}{e_0 + e_1 u + \cdots + e_m u^m} \subset \mathfrak{M}_{w_\Lambda}$ nach Definition von $\widetilde{\mathfrak{M}}_{w_\Lambda}$. — c) Ist $\dfrac{a_0 + a_1 u + \cdots + a_n u^n}{b_0 + b_1 u + \cdots + b_m u^m} \subset \widetilde{\mathfrak{M}}_{w_\Lambda}$ und somit $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \subseteq (b_0, b_1, \ldots, b_m)_{w_\Lambda}$, so gibt es in Λ ein Ideal $(e_0, e_1, \ldots, e_r)$, derart, daß $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \cdot (e_0, e_1, \ldots, e_r) \subseteq (b_0, b_1, \ldots, b_m)_w$ wird. D. h. aber, es ist $\dfrac{a_0 + a_1 u + \cdots + a_n u^n}{b_0 + b_1 u + \cdots + b_m u^m} \cdot (e_0 + e_1 u + + \cdots + e_r u^r) \subset \widetilde{\mathfrak{M}}_w$, und es gehört somit wegen $e_0 + e_1 u + \cdots + e_r u^r \subset S_\Lambda$ sicher $\dfrac{a_0 + a_1 u + \cdots + a_n u^n}{b_0 + b_1 u + \cdots + b_m u^m}$ zu dem durch S_Λ erzeugten Quotientenring von $\widetilde{\mathfrak{M}}_w$.

Satz 18 läßt sich in gewissem Sinne umkehren:

Satz 19. *Es sei S_u ein beliebiges m. a. System von Polynomen $p(u) = e_0 + e_1 u + \cdots + e_r u^r$ aus $\widetilde{\mathfrak{M}}_w$, Λ^* sei das vollständige m. a. System aller der endlichen Ideale aus $\mathfrak{R}$, die den Inhalt mindestens eines zu S_u gehörigen Polynoms enthalten, $\widetilde{\mathfrak{N}}$ bedeute den durch S_u erzeugten Quotientenring von $\widetilde{\mathfrak{M}}_w$. Genügt dann $\widetilde{\mathfrak{N}}$ der Gleichung $\widetilde{\mathfrak{N}} \frown \mathfrak{K} = \mathfrak{R}$, so definiert Λ^** in $\mathfrak{R}$ *eine arithmetisch brauchbare w_{Λ^*}-Operation, deren zugeordneter* Kroneckerscher *Funktionalring $\widetilde{\mathfrak{N}} = \widetilde{\mathfrak{M}}_{w_{\Lambda^*}}$ ist.*

a) Um zu beweisen, daß zu Λ^* in $\mathfrak{R}$ eine arithmetisch brauchbare w_{Λ^*}-Operation gehört, braucht man nach Satz 16 und 17 nur zu zeigen, daß durchweg $(a)_{\Lambda^*} = (a)$ ist. Sei nun $c \subset (a)_{\Lambda^*}$, also $(c) \cdot \mathfrak{e} \subseteq \mathfrak{a}$ für geeignetes $\mathfrak{e}$ aus Λ^*; dann gibt es in S_u ein Polynom $p(u)$, dessen Inhalt in $\mathfrak{e}$ enthalten ist, so daß $\dfrac{c}{a} \cdot p(u) = q(u)$ lauter zu $\mathfrak{R}$ gehörige Koeffizienten besitzt und somit

---

gemein $\mathfrak{a}_w = \mathfrak{a} \cdot \widetilde{\mathfrak{M}}_w \frown \mathfrak{K} = \underset{\tau}{\Delta} (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{B}_\tau)$. Denn aus den Grundeigenschaften der Bewertungsringe folgt sofort $\mathfrak{a} \cdot \widetilde{\mathfrak{B}}_\tau \frown \mathfrak{K} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{B}_\tau$, und nach Beitrag I, S. 555, wird $\tilde{\mathfrak{a}} = \underset{\tau}{\Delta}\, \tilde{\mathfrak{a}} \cdot \widetilde{\mathfrak{B}}_\tau$ für jedes Ideal $\tilde{\mathfrak{a}}$ aus $\widetilde{\mathfrak{M}}$. Man hat also: $\mathfrak{a}_w = \mathfrak{a} \cdot \widetilde{\mathfrak{M}}_w \frown \mathfrak{K} = (\underset{\tau}{\Delta} (\mathfrak{a} \cdot \widetilde{\mathfrak{M}}_w \cdot \widetilde{\mathfrak{B}}_\tau)) \frown \mathfrak{K} = (\underset{\tau}{\Delta} (\mathfrak{a} \cdot \widetilde{\mathfrak{B}}_\tau)) \frown \mathfrak{K} = \underset{\tau}{\Delta} (\mathfrak{a} \cdot \widetilde{\mathfrak{B}}_\tau \frown \mathfrak{K}) = \underset{\tau}{\Delta} (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{B}_\tau)$. — [Beweis zwar für die Textuntersuchungen unwesentlich, aber kurz rekapituliert, da der erst in Lorenzen[6]) (S. 547 f.) bewiesene Satz in Beitrag I noch fehlte.]

sicher in $\widetilde{\mathfrak{M}}_w$ vorkommt. Daraus folgt aber sofort: $\frac{c}{a} = \frac{q(u)}{p(u)} \subset \widetilde{\mathfrak{R}} \frown \mathfrak{K} = \mathfrak{R}$, $c \subset (a)$. Die Bedingung $(a)_{A^*} = (a)$ ist also erfüllt.

b) Nach Satz 18 ist jedenfalls $\widetilde{\mathfrak{M}}_{w_{A^*}} \supseteqq \widetilde{\mathfrak{R}}$; es muß aber auch $\widetilde{\mathfrak{R}} \supseteqq \widetilde{\mathfrak{M}}_{w_{A^*}}$ sein. Ist nämlich $q(u)$ irgendein u-Polynom mit zu A^* gehörigem Inhalt $\mathfrak{e}$, so gibt es in S_u ein Polynom $p(u)$, dessen Inhalt ein Unterideal von $\mathfrak{e}$ darstellt, und aus der Definition von $\widetilde{\mathfrak{M}}_w$ folgt sofort, daß $p(u)$ in $\widetilde{\mathfrak{M}}_w$ durch $q(u)$ teilbar ist. — Satz 18 und Satz 19 lassen sich zusammenfassen zu

Satz 20. *Die sämtlichen w_A-Operationen, die aus einer festen, arithmetisch brauchbaren, endlichartigen w-Operation abgeleitet werden können, entsprechen umkehrbar eindeutig denjenigen Quotientenringen von $\widetilde{\mathfrak{M}}_A$, die durch m. a. Systeme von u-Polynomen erzeugt werden können und mit $\mathfrak{K}$ den genauen Durchschnitt $\mathfrak{R}$ haben.*

Satz 16 bis 20 stellen zusammengenommen eine wichtige und in gewissem Sinne abschließende Verallgemeinerung der Ergebnisse von Beitrag I, § 11 dar, wo mit der damaligen, weniger günstigen Definition der A-Operationen nur der Fall der ganz abgeschlossenen Integritätsbereiche mit Maximalbedingung erledigt werden konnte. Auch die Sätze von Beitrag I, § 12 lassen sich unter Satz 16 bis 20 unterordnen. Man hat nur als w-Operation speziell die — nach LORENZEN stets endlichartige [26]) — b-Operation zu wählen und sich zu überzeugen, daß jede b_A-Operation im Sinne von Beitrag I nicht nur mit Hilfe einer geeigneten Primidealmenge, sondern auch mit Hilfe eines geeigneten m. a. Systems A aus $\mathfrak{R}$ definiert werden kann. Im übrigen erscheinen die Ergebnisse von Beitrag I, § 12 von dem nunmehr erreichten Standpunkt aus insofern als unvollkommen, als damals die b_A-Operationen *nur* auf dem Umweg über den Funktionalring $\widetilde{\mathfrak{M}}_b$ eingeführt werden konnten, während wir jetzt imstande sind, jede beliebige w_A-Operation unmittelbar in $\mathfrak{R}$ zu definieren. Auch die Bestimmung *aller* der Oberringe von $\widetilde{\mathfrak{M}}_w$, die Funktionalringe von w_A-Operationen sind, bedeutet selbst im Spezialfall $\widetilde{\mathfrak{M}}_w = \widetilde{\mathfrak{M}}_b$ einen wesentlichen Fortschritt über Beitrag I hinaus.

Zum Schlusse sei noch darauf hingewiesen, daß die Sätze 13 und 14 von § 5 sowie Hilfssatz 4 und die Sätze 16 und 17 von § 6 einschließlich ihrer Beweise wörtlich auch dann noch gelten, wenn man als Ausgangsidealsystem nicht wie bisher die üblichen „DEDEKINDschen" Ideale, sondern die „*s-Ideale*" im Sinne von P. LORENZEN [6]) wählt. Man hat dann nur bei der Idealdefinition die Forderung, daß ein Ideal gleichzeitig mit α und β stets auch $\alpha + \beta$ enthalten soll, wegzulassen und die Summe $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ bzw. das Produkt $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ gleich

---

[26]) Da nämlich die endlichartige PRÜFERsche a-Operation nach LORENZEN eine w-Operation ist [vgl. Anm. [25])], muß sie notwendig mit der b-Operation identisch sein.

der Vereinigungsmenge von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ bzw. gleich der Menge aller Produkte $\alpha \cdot \beta$ ($\alpha \subset \mathfrak{a}$, $\beta \subset \mathfrak{b}$) zu setzen [27]). Im übrigen braucht auch an den zugrunde gelegten Definitionen gar nichts geändert zu werden. Der Fall der Dedekindschen Ideale ordnet sich in den erweiterten Rahmen von selbst ein, da, wie unmittelbar zu sehen, der Übergang von den s- zu den Dedekindschen Idealen eine $'$-Operation im Sinne von § 5 darstellt.

Das Hauptergebnis des verallgemeinerten Ansatzes ist die Feststellung, *daß die Sätze* 13, 14, 16, 17 *sowie Hilfssatz* 4 *nicht nur für Integritätsbereiche, sondern darüber hinaus auch für beliebige* (kommutative, multiplikativ geschriebene) *Halbgruppen gelten.*

Denn die Einführung der s-Ideale ist in jeder Halbgruppe möglich, und es wird bei den einschlägigen Sätzen einschließlich ihrer Beweise nirgends von der Addition der Ringelemente Gebrauch gemacht. — Was die nicht unmittelbar auf Halbgruppen übertragbaren Sätze 18 bis 20 angeht, so gibt es zwar ein Theorem, das im Sinne der Lorenzenschen Theorie der Idealbrüche ein genaues Gegenstück zu Satz 20 darstellt. Aber seine Formulierung und sein Beweis erfordern verhältnismäßig umfangreiche Vorbereitungen. Wir gehen daher auf diesen Punkt hier nicht weiter mehr ein, behalten uns aber vor, in einem späteren Beitrag in größerem Zusammenhang ausführlich auf ihn zurückzukommen.

---

27) Ein endliches s-Ideal $\mathfrak{e} = (e_1, \ldots e_n) = (e_1) + \cdots + (e_n)$ besteht nach dieser Definition aus der Menge aller Produkte $a \cdot e_i$ (a bel. aus $\mathfrak{R}$, $i = 1, \ldots, n$).

(Eingegangen am 25. April 1942.)