Zur Theorie der Randwertaufgaben der Differentialgleichung $\Delta\Delta U = 0$.

Von

Kurt Schröder in Berlin.

Von großer Bedeutung für die mathematische Physik ist die Frage nach der Existenz einer Funktion U, die in einem einfach zusammenhängenden Gebiet R oder in dem Äußeren R_a eines solchen Gebietes — nur derartige Gebiete sollen hier betrachtet werden — mit ihren partiellen Ableitungen bis zur vierten Ordnung stetig ist und dort der Differentialgleichung

$$\Delta\Delta U = 0$$

genügt, deren partielle Ableitungen erster Ordnung ferner in dem durch seine Berandung S abgeschlossenen Gebiet R bzw. R_a stetig sind und auf S vorgeschriebene Werte annehmen.

Das innere Problem für den ebenen Fall wurde in der Literatur bereits von verschiedenen Autoren mehr oder weniger vollständig behandelt, und zwar von S. Zaremba[1]) und A. Korn[2]) mit sukzessiven Approximationen, von A. Haar[3]), J. Hadamard[4]) und G. Lauricella[5]) mit Integralgleichungen und von W. Ritz[6]) und K. Friedrichs[7]) mit den direkten Methoden der

---

[1]) S. Zaremba, L'équation biharmonique et une classe remarquable de fonctions fondamentales harmoniques. Bull. de l'ac. des sc. de Cracovie, 1907, S. 147—196.

[2]) A. Korn, Sur l'équilibre des plaques élastiques encastrées. Ann. de l'éc. norm. **25** (1908), S. 529—583.

[3]) A. Haar, Die Randwertaufgabe der Differentialgleichung $\Delta\Delta U = 0$. Göttinger Nachr. 1907, S. 280—287.

[4]) J. Hadamard, Mémoire sur le problème d'analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées. Mém. sav. étrang. (2) **33** (1908), Nr. 4.

[5]) G. Lauricella, Sur l'intégration de l'équation relative à l'équilibre des plaques élastiques encastrées. Acta math. **32** (1909), S. 201—256. (Diese Arbeit wurde 1906 bereits als Preisschrift der Pariser Akademie eingereicht.)

[6]) W. Ritz, Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Randwertaufgaben. Göttinger Nachr. 1908, S. 236—248; Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik. Journ. f. Math. **135** (1908), S. 1—61.

[7]) K. Friedrichs, Die Randwert- und Eigenwertprobleme aus der Theorie der elastischen Platten (Anwendung der direkten Methoden der Variationsrechnung). Math. Annalen **98** (1928), S. 205—247.

Variationsrechnung. Das dazugehörige äußere Problem wurde von G. LAURICELLA[8]) unter Benutzung von Integralgleichungen untersucht. Die von ihm gegebene Lösung ist aber insofern unbefriedigend, worauf zuerst N. MUSCHELISVILI[9]) hingewiesen hat, als es neben ihr andere von dem LAURICELLAschen Verfahren nicht erfaßte Lösungen geben kann, die weniger stark als sie im Unendlichen anwachsen.

Im räumlichen Fall ist bisher lediglich das innere Problem von S. ZAREMBA[10]), A. KORN[11]) und schließlich von G. LAURICELLA[12]) im Anschluß an Untersuchungen von J. FREDHOLM[13]) über das Hauptproblem der Elastizitätstheorie behandelt worden.

In der vorliegenden Arbeit sollen die erwähnten eleganten Untersuchungen von LAURICELLA wieder aufgenommen werden, zunächst mit dem Ziel, eine Reihe von darin vorhandenen Lücken auszufüllen, die Lösung für das noch nicht behandelte äußere räumliche Problem zu gewinnen und Eindeutigkeitssätze aufzustellen. Sodann aber war unser Bestreben darauf gerichtet, mit möglichst geringen Voraussetzungen über die Berandung S und die vorgegebenen Randwerte auszukommen. Die vorgenommene Erweiterung der Voraussetzungen ist jedoch nicht Selbstzweck, sondern sie dient dazu, eine Reihe von neuen Sätzen aufzustellen, die die Grundlage für einen sowohl für die allgemeine Theorie der biharmonischen Randwertaufgaben als auch für die Anwendungen wichtigen, in einer folgenden Arbeit zu beweisenden Satz bilden, welcher hinreichende Bedingungen für die Existenz der partiellen Ableitungen n-ter Ordnung von U am Rande S angibt.

Bei den Beweisen unserer Sätze können wir Methoden verwenden, wie sie in neuerer Zeit in der Potentialtheorie von J. SCHAUDER[14]) und O. D. KELLOG[15]) entwickelt wurden.

---

[8]) G. LAURICELLA, l. c. Anm. [5]).

[9]) N. MUSCHELIŠVILI, Sur l'intégration de l'équation biharmonique. Bull. de l'ac. des sc. de Russie (6) **13** (1919), S. 663—686; vgl. auch N. MUSCHELIŠVILI, Applications des intégrales analogues à celles de Cauchy à quelques problèmes de la physique mathématique, Tiflis 1922, insbes. S. 98—101.

[10]) S. ZAREMBA, l. c. Anm. [1]).

[11]) A. KORN, Allgemeine Lösung des biharmonischen Problems im Raume. Bull. de l'ac. des sc. de Cracovie 1907, S. 837—896.

[12]) G. LAURICELLA, Sulla integrazione dell'equazione $\Delta^4 V = 0$. Rendiconti Roma **16**, II (1907), S. 373—383.

[13]) J. FREDHOLM, Solution d'un problème fondamental de la theorie de l'elasticité. Arkiv för Mat. Astron. och Fys. **2**, Nr. 28 (1906).

[14]) J. SCHAUDER, Potentialtheoretische Untersuchungen. Erste Abhandlung. Math. Zeitschr. **33** (1931), S. 602—640.

[15]) O. D. KELLOG, On the derivations of harmonic functions on the boundary. Transactions of the American math. soc. **33** (1931), S. 486—510.

§ 1.

Die Regularitätsvoraussetzungen über die Berandung.

1. Von der Berandung S des räumlichen Gebietes R setzen wir zunächst voraus, daß sie in jedem Punkt eine Tangentialebene hat und daß es zu jedem ihrer Punkte p eine solche Umgebung $\mathfrak{U}(p)$ gibt, daß die darin enthaltene Teilmenge S_p von S in einem rechtwinklig-kartesischen Bezugssystem x, y, z, bei dem die x, y-Ebene mit der Tangentialebene von S im Punkte p identisch ist, sich eindeutig in der Form

$$z = \varphi(x, y)$$

darstellen läßt. Dabei sollen die partiellen Ableitungen $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ stetig sein und einer in p gleichmäßigen Hölderbedingung (im folgenden kurz H-Bedingung genannt) genügen, so daß für irgendeinen weiteren Punkt q aus S_p

$$|D\varphi(q) - D\varphi(p)| \leqq A t^{\lambda} \qquad (0 < \lambda < 1) \tag{1}$$

mit von p unabhängigen Konstanten A und λ gilt, wenn t die Projektion der Strecke $\overline{pq}$ auf die Tangentialebene im Punkte p ist und unter D ein Symbol für die Bildung einer partiellen Ableitung erster Ordnung verstanden wird.

Es existiert dann gleichmäßig für alle Punkte p von S eine solche positive Zahl ϱ_0, daß die lokale Flächendarstellung $z = \varphi(x, y)$ in p auf der ganzen Kreisscheibe $x^2 + y^2 \leqq \varrho_0^2$ definiert ist. Als Umgebung $\mathfrak{U}(p)$ kann man daher für jeden Punkt p eine Kugel K_{ϱ_0} mit dem festen Radius ϱ_0 und dem Mittelpunkt p wählen.

Weiter sei für S eine Flächenfunktion $f(p)$ gegeben. In der Umgebung von p ist sie als Funktion von x, y darstellbar. Ihr werden in p die Tangentialableitungen

$$\frac{\partial f(p)}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f(p)}{\partial y}$$

zugeschrieben, falls diese existieren. Für die Ableitungen in einer beliebigen Tangentialrichtung t in p setzen wir entsprechend

$$\frac{\partial f(p)}{\partial t} = \frac{\partial f(p)}{\partial x} \cos(t, x) + \frac{\partial f(p)}{\partial y} \cos(t, y).$$

Hat nun die Flächenfunktion $f(p)$ in allen Punkten der Fläche Tangentialableitungen, so sagen wir, daß diese gleichmäßig in p einer H-Bedingung genügen, falls für irgendeinen Punkt q aus S_p

$$\left|\frac{\partial f(q)}{\partial t_x} - \frac{\partial f(p)}{\partial x}\right| \leqq C t^{\nu}, \qquad (0 < \nu < 1)$$
$$\left|\frac{\partial f(q)}{\partial t_y} - \frac{\partial f(p)}{\partial y}\right| \leqq C t^{\nu}$$

gilt, wobei C und ν von p unabhängig sind, und $\frac{\partial f(q)}{\partial t_x}$ bzw. $\frac{\partial f(q)}{\partial t_y}$ die Tangentialableitungen von f an der Stelle q in den Tangentialrichtungen darstellen, die sich durch Schnitt der Fläche S mit der x, z-Ebene bzw. der y, z-Ebene in q ergeben.

Besitzt die Flächenfunktion $f(p)$ in dem Sinne einer gleichmäßigen H-Bedingung mit dem Exponenten ϱ $(0 < \varrho < 1)$ genügende partielle Ableitungen erster Ordnung, daß für alle Flächenpunkte

$$q = (x_q, y_q, \varphi(x_q, y_q))$$

mit

$$x_q^2 + y_q^2 \leqq \varrho_0^2$$

die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f(q)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(q)}{\partial y}$ existieren und einer Bedingung

$$\left|\frac{\partial f(q)}{\partial x} - \frac{\partial f(p)}{\partial x}\right| \leqq D t^{\varrho}, \quad \left|\frac{\partial f(q)}{\partial y} - \frac{\partial f(p)}{\partial y}\right| \leqq D t^{\varrho}$$

mit von p unabhängigen Zahlen D und ϱ genügen, so kann man zeigen, daß f Tangentialableitungen besitzt, die einer gleichmäßigen H-Bedingung mit einem Exponenten σ genügen, der gleich der kleineren der beiden Zahlen ϱ und λ ist, wenn λ wie bisher den „Flächenexponenten", d. h. die in (1) auftretende Konstante bedeutet. Bezeichnet man nämlich das lokale Koordinatensystem im Punkte q mit x', y', z', und wählt man es derart, daß die x', z'-Ebene mit der x, z-Ebene zusammenfällt, so ist

$$x = \cos(x, x')x' + \cos(x, z')z' + x_q,$$

und es wird

$$\frac{\partial f(q)}{\partial t_x} = \left[\frac{\partial f(\cos(x, x')\,x' + \cos(x, z')\,z' + x_q, 0)}{\partial x'}\right]_{x'=0,\ z'=0}$$
$$= \frac{\partial f(x_q, 0)}{\partial x}\cos(x, x') = \frac{\partial f(x_q, 0)}{\partial x}\,\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi(x_q, 0)}{\partial x}\right)^2}}.$$

2. Bedeutet S die Berandung eines ebenen Gebietes R, so soll es auch hier zu jedem ihrer Punkte p eine Umgebung $\mathfrak{U}(p)$ derart geben, daß die darin enthaltene Teilmenge S_p von S in einem rechtwinklig-kartesischen Bezugssystem x, y, bei dem die x-Achse mit der Tangente von S in p identisch ist, sich eindeutig in der Form $y = \varphi(x)$ darstellen läßt. Die Ableitung $\varphi'(x)$ soll stetig sein und einer in p gleichmäßigen H-Bedingung genügen, so daß für einen weiteren Punkt q aus S_p

$$|\varphi'(q) - \varphi'(p)| \leqq A\,t^{\lambda} \qquad (0 < \lambda < 1)$$

ist, wobei die Konstanten A und λ von p unabhängig sind.

Auch die übrigen im vorhergehenden Abschnitt eingeführten Definitionen besitzen im ebenen Fall ihr naheliegendes Gegenstück.

§ 2.

Zusammenstellung von geometrischen Hilfssätzen[16]).

1. *Ist P ein Punkt auf der Flächennormalen n_p in p und h seine z-Koordinate, so gelten, falls q ein beliebiger weiterer Punkt von S_p mit den Koordinaten x, y, z ist und man unter r_{qP} die Entfernung der Punkte q und P versteht, die folgenden Gleichungen und Ungleichungen:*

$$\frac{1}{r_{qP}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+h^2}} + O\left[\frac{1}{(x^2+y^2+h^2)^{\frac{1-\lambda}{2}}}\right], \tag{2}$$

$$\cos(r_{qP}, n_p) = \cos(r_{qP}, z) = \frac{h-z}{r_{qP}} = \frac{h}{\sqrt{x^2+y^2+h^2}} + O\left[(x^2+y^2+h^2)^{\frac{\lambda}{2}}\right]\text{[17]}, \tag{3}$$

$$\cos(r_{qP}, n_q) = \frac{h}{\sqrt{x^2+y^2+h^2}} + O\left[(x^2+y^2+h^2)^{\frac{\lambda}{2}}\right], \tag{4}$$

$$\cos(r_{qP}, x) = -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+h^2}} + O\left[(x^2+y^2+h^2)^{\frac{\lambda}{2}}\right]\text{[17]}, \tag{5}$$

$$\cos(r_{qP}, y) = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+h^2}} + O\left[(x^2+y^2+h^2)^{\frac{\lambda}{2}}\right]\text{[17]}, \tag{6}$$

$$\left.\begin{array}{l} |\cos(n_q, x)| \\ |\cos(n_q, y)| \end{array}\right\} \leqq A r_{qp}^{\lambda}, \tag{7}$$

$$\cos(n_q, z) = \cos(n_q, n_p) = 1 + O\left[(x^2+y^2)^{\frac{\lambda}{2}}\right]. \tag{8}$$

2. *Fällt P mit p zusammen, so erhalten wir statt dessen, unter K eine (von der Fläche abhängende) Konstante verstanden:*

$$|\cos(r_{qp}, n_q)| \leqq K A r_{qp}^{\lambda}, \tag{9}$$

$$|\cos(r_{qp}, n_p)| \leqq K A r_{qp}^{\lambda}, \tag{10}$$

$$\cos(r_{qp}, x) = -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + O\left[(x^2+y^2)^{\frac{\lambda}{2}}\right]\text{[17]}, \tag{11}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \geqq \frac{1}{r_{qp}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + O\left[\frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{1-\lambda}{2}}}\right]. \tag{12}$$

3. *Bezeichnet ν eine beliebige Richtung im Raume, so gilt für drei beliebige Punkte P_1, P_2, P im Raume*

$$|\cos(r_{PP_1}, \nu) - \cos(r_{PP_2}, \nu)| \leqq \frac{2\, r_{P_1P_2}}{r_{PP_1}}. \tag{13}$$

---

[16]) Für die nicht ausgeführten Beweise verweisen wir auf J. SCHAUDER, l. c. Anm. [14]).

[17]) Bei SCHAUDER ist hier das entgegengesetzte Zeichen angegeben. Ist aber die positive z-Richtung mit der Richtung n_p identisch, und bedeutet h die z-Koordinate von P, so muß das bei uns angegebene Zeichen stehen.

4. *Es seien p_1 und p_2 zwei Punkte der Fläche, deren Entfernung kleiner als $\frac{\varrho_0}{2}$ ist. Um den Mittelpunkt der Strecke $\overline{p_1 p_2}$ beschreibe man eine Kugel mit dem Radius $r_{p_1 p_2}$; sie sei, wie auch entsprechend gebildete Kugeln, im folgenden Text mit $K_{p_1 p_2}$ bezeichnet. Für jeden außerhalb $K_{p_1 p_2}$ liegenden Flächenpunkt q bestehen dann die Abschätzungen*

$$|\cos(r_{q p_1}, n_q) - \cos(r_{q p_2}, n_q)| \leqq K A \frac{r_{p_1 p_2}}{r_{q p_1}^{1-\lambda}} \tag{14}$$

und

$$|\cos(r_{q p_1}, n_{p_1}) - \cos(r_{q p_2}, n_{p_2})| \leqq K A \left(\frac{r_{p_1 p_2}}{r_{q p_1}^{1-\lambda}} + r_{p_1 p_2}^{\lambda}\right). \tag{15}$$

5. *Für jeden Punkt P, der außerhalb von $K_{p_1 p_2}$ liegt, ist*

$$\frac{1}{4} < \frac{r_{P p_1}}{r_{P p_2}} < 4 \tag{16}$$

und

$$\left|\frac{1}{r_{P p_1}^2} - \frac{1}{r_{P p_2}^2}\right| \leqq K \frac{r_{p_1 p_2}}{r_{P p_1}^3}, \tag{17}$$

$$\left|\frac{1}{r_{P p_1}^3} - \frac{1}{r_{P p_2}^3}\right| \leqq K \frac{r_{p_1 p_2}}{r_{P p_1}^4}. \tag{18}$$

6. *Für die in einem Punkte q von S_p in § 1 definierte t_x-Richtung gilt bei Zugrundelegung eines beliebigen rechtwinklig-kartesischen Bezugssystems ξ, η, ζ:*

$$\left.\begin{array}{l} |\cos(\xi, x) - \cos(\xi, t_x)| \\ |\cos(\eta, x) - \cos(\eta, t_x)| \\ |\cos(\zeta, x) - \cos(\zeta, t_x)| \end{array}\right\} \leqq A t^{\lambda}; \tag{19}$$

entsprechende Abschätzungen bestehen für die t_y-Richtung. Ist nämlich $\mathfrak{x}$ ein Einheitsvektor in x-Richtung, $\mathfrak{t}_x$ ein Einheitsvektor in t_x-Richtung, so sind die links stehenden Größen kleiner oder gleich als

$$|\mathfrak{x} - \mathfrak{t}_x| = 2\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}\right)} < \sqrt{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2} = \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right| \leqq A t^{\lambda},$$

wenn α den Winkel bezeichnet, den $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{t}_x$ miteinander bilden.

7. *Ist t_1 eine im Punkte p_1, t_2 eine im Punkte p_2 tangentiale Richtung, wobei für die Richtungskosinus gegen ein beliebiges rechtwinklig-kartesisches ξ, η, ζ-Koordinatensystem*

$$\left.\begin{array}{l} |\cos(\xi, t_1) - \cos(\xi, t_2)| \\ |\cos(\eta, t_1) - \cos(\eta, t_2)| \\ |\cos(\zeta, t_1) - \cos(\zeta, t_2)| \end{array}\right\} \leqq A r_{p_1 p_2}^{\lambda} \tag{20}$$

gilt, so bestehen die Ungleichungen

$$|\cos(n_q, t_1) - \cos(n_q, t_2)| \leqq 3\,A r_{p_1 p_2}^{\lambda}, \tag{21}$$

$$|\cos(r_{q p_1}, t_1) - \cos(r_{q p_2}, t_2)| \leqq \frac{6\, r_{p_1 p_2}}{r_{q p_1}} + 3\,A r_{p_1 p_2}^{\lambda}. \tag{22}$$

8. *Faßt man den Ausdruck* $\cos(r_{P_1 P}, \nu)$ *bei festem Punkt* P_1 *und fester Richtung* ν *als Funktion des Punktes* P *auf, so hat man für die Ableitung in einer beliebigen Richtung* t *im Raume*

$$\frac{\partial}{\partial t}\cos(r_{P_1 P}, \nu) = \{\cos(\nu, t) - \cos(r_{P_1 P}, t)\cos(r_{P_1 P}, \nu)\}\frac{1}{r_{P_1 P}}. \tag{23}$$

Setzt man nämlich

$$\overrightarrow{P_1 P} = \mathfrak{r}_{P_1 P},$$

und ist $\mathfrak{t}$ ein Einheitsvektor in t-Richtung ($|\mathfrak{t}| = 1$), so liegen die Endpunkte P der Vektoren $\overrightarrow{P_1 P}$, falls man P in t-Richtung variieren läßt, auf der Geraden

$$\mathfrak{r}_{P_1 P} = \mathfrak{r}_{P_1 P_0} + t\mathfrak{t}.$$

Daher wird

$$\frac{\partial \mathfrak{r}_{P_1 P}}{\partial t} = \mathfrak{t},$$

und es folgt, falls $\mathfrak{n}$ ein Einheitsvektor in ν-Richtung ist, ($|\mathfrak{n}| = 1$):

$$\frac{\partial}{\partial t}\cos(r_{P_1 P}, \nu) = \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\mathfrak{r}_{P_1 P}}{|\mathfrak{r}_{P_1 P}|}\cdot\mathfrak{n}\right\} = \frac{1}{r_{P_1 P}}\,\mathfrak{t}\cdot\mathfrak{n} - \mathfrak{r}_{P_1 P}\cdot\mathfrak{n}\,\frac{\cos(r_{P_1 P}, t)}{r_{P_2 P}^2}$$
$$= \{\cos(\nu, t) - \cos(r_{P_1 P}, \nu)\cos(r_{P_1 P}, t)\}\frac{1}{r_{P_1 P}}.$$

§ 3.

Hilfssätze über Integrale, die die biharmonischen Analoga des Potentials einer Doppelbelegung darstellen.

1. *Unter* ξ, η, ζ *verstehen wir, wie eben, die Koordinaten in bezug auf ein beliebiges rechtwinklig-kartesisches Bezugssystem. Die geschlossene Fläche* S *genüge den in* § 1 *genannten Voraussetzungen. Alsdann gilt*

$$\iint\limits_{(S)} \left(\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\, d\sigma = \iint\limits_{(S)} \frac{\cos^2(r_{p'P}, \xi)\cos(r_{p'P}, n_{p'})}{r_{p'P}^2}\, d\sigma = \begin{cases}\frac{4\pi}{3}\\[2pt] \frac{2\pi}{3},\\[2pt] 0\end{cases} \tag{24}$$

je nachdem P *im Innengebiet von* S, *auf* S *oder im Außengebiet von* S *liegt. Weiter ist bei beliebiger Lage des Punktes* P:

$$\iint\limits_{(S)} \frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \eta}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\, d\sigma = \iint\limits_{(S)} \frac{\cos(r_{p'P}, \xi)\cos(r_{p'P}, \eta)\cos(r_{p'P}, n_{p'})}{r_{p'P}^2}\, d\sigma = 0. \tag{25}$$

Hierbei bedeuten $P = (\xi, \eta, \zeta)$ den „Aufpunkt“, $p' = (\xi_{p'}, \eta_{p'}, \zeta_{p'})$ den Integrationspunkt; $n_{p'}$ bezeichnet die innere Normale, und es ist

$$\frac{\partial r_{p'P}}{\partial n_{p'}} = \frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi_{p'}} \cos(\xi, n_{p'}) + \frac{\partial r_{p'P}}{\partial \eta_{p'}} \cos(\eta, n_{p'}) + \frac{\partial r_{p'P}}{\partial \zeta_{p'}} \cos(\zeta, n_{p'})$$

gesetzt.

Dem Beweis von (24) und (25) legen wir folgenden Hilfssatz[18]) zugrunde: *Sind die Funktionentripel u, v, w und $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ im Bereich $R + S$ zweimal*[19]) *stetig differenzierbar, und genügen sie dort den Differentialgleichungen*

$$(26) \qquad \Delta u + k \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} = 0, \quad \Delta v + k \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} = 0, \quad \Delta w + k \frac{\partial \vartheta}{\partial \zeta} = 0$$

mit

$$\vartheta = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial \zeta},$$

wobei k ein Parameter ist, so besteht unter Benutzung der Bezeichnungen

$$(27) \left\{ \begin{aligned}
X_{u,v,w}(P,p) = & \left\{\frac{\partial u(P)}{\partial \xi}\cos(n_p,\xi) + \frac{\partial u(P)}{\partial \eta}\cos(n_p,\eta) + \frac{\partial u(P)}{\partial \zeta}\cos(n_p,\zeta)\right\} \\
& + k\left\{\frac{\partial u(P)}{\partial \xi} + \frac{\partial v(P)}{\partial \eta} + \frac{\partial w(P)}{\partial \zeta}\right\}\cos(n_p,\xi) + \\
& + \frac{k}{2+k}\left\{\frac{\partial v(P)}{\partial \xi}\cos(n_p,\eta) + \frac{\partial w(P)}{\partial \xi}\cos(n_p,\zeta) - \right. \\
& \left. - \frac{\partial v(P)}{\partial \eta}\cos(n_p,\xi) - \frac{\partial w(P)}{\partial \zeta}\cos(n_p,\xi)\right\}, \\
Y_{u,v,w}(P,p) = & \left\{\frac{\partial v(P)}{\partial \xi}\cos(n_p,\xi) + \frac{\partial v(P)}{\partial \eta}\cos(n_p,\eta) + \frac{\partial v(P)}{\partial \zeta}\cos(n_p,\zeta)\right\} \\
& + k\left\{\frac{\partial u(P)}{\partial \xi} + \frac{\partial v(P)}{\partial \eta} + \frac{\partial w(P)}{\partial \zeta}\right\}\cos(n_p,\eta) + \\
& + \frac{k}{2+k}\left\{\frac{\partial w(P)}{\partial \eta}\cos(n_p,\zeta) + \frac{\partial u(P)}{\partial \eta}\cos(n_p,\xi) - \right. \\
& \left. - \frac{\partial w(P)}{\partial \zeta}\cos(n_p,\eta) - \frac{\partial u(P)}{\partial \xi}\cos(n_p,\eta)\right\}, \\
Z_{u,v,w}(P,p) = & \left\{\frac{\partial w(P)}{\partial \xi}\cos(n_p,\xi) + \frac{\partial w(P)}{\partial \eta}\cos(n_p,\eta) + \frac{\partial w(P)}{\partial \zeta}\cos(n_p,\zeta)\right\} \\
& + k\left\{\frac{\partial u(P)}{\partial \xi} + \frac{\partial v(P)}{\partial \eta} + \frac{\partial w(P)}{\partial \zeta}\right\}\cos(n_p,\zeta) + \\
& + \frac{k}{2+k}\left\{\frac{\partial u(P)}{\partial \zeta}\cos(n_p,\xi) + \frac{\partial v(P)}{\partial \zeta}\cos(n_p,\eta) - \right. \\
& \left. - \frac{\partial u(P)}{\partial \xi}\cos(n_p,\zeta) - \frac{\partial v(P)}{\partial \eta}\cos(n_p,\zeta)\right\}
\end{aligned} \right.$$

---

[18]) Vgl. zu diesem Hilfssatz G. Lauricella, Alcune applicazioni della teoria delle equazioni funzionali alla fisica-matematica. Il Nuovo Cimento, serie 5a, XIII, S. 104—118, 155—174, 237—262, 501—518, insbes. S. 109.

[19]) Es würde auch genügen, vorauszusetzen, daß die zweiten Ableitungen in R und die ersten in $R + S$ stetig sind.

die Integralformel

$$(28)\quad \iint\limits_{(S)} \{[u]_S X_{\bar u,\bar v,\bar w}(p',p') + [v]_S Y_{\bar u,\bar v,\bar w}(p',p') + [w]_S Z_{\bar u,\bar v,\bar w}(p',p') - \\ - [\bar u]_S X_{u,v,w}(p',p') - [\bar v]_S Y_{u,v,w}(p',p') - [\bar w]_S Z_{u,v,w}(p',p')\}\, d\sigma = 0.$$

Die Relation (28) folgt unmittelbar bei Benutzung des Gaussschen Integralsatzes und einer Greenschen Formel aus

$$O = \iiint\limits_{(R)} \Big\{u\Big[\Delta\bar u + k\frac{\partial\bar\vartheta}{\partial\xi} + \frac{k}{2+k}\Big(\frac{\partial^2\bar v}{\partial\xi\,\partial\eta} + \frac{\partial^2\bar w}{\partial\xi\,\partial\zeta} - \frac{\partial^2\bar v}{\partial\eta\,\partial\xi} - \frac{\partial^2\bar w}{\partial\zeta\,\partial\xi}\Big)\Big] +$$
$$+ v\Big[\Delta\bar v + k\frac{\partial\bar\vartheta}{\partial\eta} + \frac{k}{2+k}\Big(\frac{\partial^2\bar w}{\partial\eta\,\partial\zeta} + \frac{\partial^2\bar u}{\partial\eta\,\partial\xi} - \frac{\partial^2\bar w}{\partial\zeta\,\partial\eta} - \frac{\partial^2\bar u}{\partial\xi\,\partial\eta}\Big)\Big] +$$
$$+ w\Big[\Delta\bar w + k\frac{\partial\bar\vartheta}{\partial\zeta} + \frac{k}{2+k}\Big(\frac{\partial^2\bar u}{\partial\zeta\,\partial\xi} + \frac{\partial^2\bar v}{\partial\zeta\,\partial\eta} - \frac{\partial^2\bar u}{\partial\xi\,\partial\zeta} - \frac{\partial^2\bar v}{\partial\eta\,\partial\zeta}\Big)\Big]\Big\}\, d\tau$$
$$= -\iiint\limits_{(R)} \Big\{\Big[\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\bar u}{\partial\xi} + \frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\bar u}{\partial\eta} + \frac{\partial u}{\partial\zeta}\frac{\partial u}{\partial\zeta} + \frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\bar v}{\partial\xi} + \frac{\partial v}{\partial\eta}\frac{\partial\bar v}{\partial\eta} + \frac{\partial v}{\partial\zeta}\frac{\partial\bar v}{\partial\zeta}$$
$$+ \frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\bar w}{\partial\xi} + \frac{\partial w}{\partial\eta}\frac{\partial\bar w}{\partial\eta} + \frac{\partial w}{\partial\zeta}\frac{\partial\bar w}{\partial\zeta}\Big] + k\vartheta\bar\vartheta +$$
$$+ \frac{k}{2+k}\Big[\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\bar v}{\partial\xi} + \frac{\partial\bar u}{\partial\eta}\frac{\partial v}{\partial\xi} + \frac{\partial v}{\partial\zeta}\frac{\partial\bar w}{\partial\eta} + \frac{\partial\bar v}{\partial\zeta}\frac{\partial w}{\partial\eta} + \frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\bar u}{\partial\zeta} + \frac{\partial\bar w}{\partial\xi}\frac{\partial u}{\partial\zeta} -$$
$$- \frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\bar v}{\partial\eta} - \frac{\partial\bar u}{\partial\xi}\frac{\partial v}{\partial\eta} - \frac{\partial v}{\partial\eta}\frac{\partial\bar w}{\partial\zeta} - \frac{\partial\bar v}{\partial\eta}\frac{\partial w}{\partial\zeta} - \frac{\partial w}{\partial\zeta}\frac{\partial\bar u}{\partial\xi} - \frac{\partial\bar w}{\partial\zeta}\frac{\partial u}{\partial\xi}\Big]\Big\}\, d\tau -$$
$$- \iint\limits_{(S)} \{[u]_S X_{\bar u,\bar v,\bar w}(p',p') + [v]_S Y_{\bar u,\bar v,\bar w}(p',p') + [w]_S Z_{\bar u,\bar v,\bar w}(p',p')\}\, d\sigma$$

und einer entsprechenden Beziehung, die sich durch Vertauschung der Tripel u, v, w und $\bar u, \bar v, \bar w$ ergibt.

Ist nunmehr P_1 ein beliebiger in R gelegener Punkt, so sind die neun durch

$$(29)\quad \begin{cases} u_1(P,P_1) = \dfrac{1}{r_{P_1P}} - \dfrac{k}{2(1+k)}\dfrac{\partial^2 r_{P_1P}}{\partial\xi^2}, \quad v_1(P,P_1) = -\dfrac{k}{2(1+k)}\dfrac{\partial^2 r_{P_1P}}{\partial\xi\,\partial\eta}, \\ \qquad w_1(P,P_1) = -\dfrac{k}{2(1+k)}\dfrac{\partial^2 r_{P_1P}}{\partial\xi\,\partial\zeta}, \\ u_2(P,P_1) = -\dfrac{k}{2(1+k)}\dfrac{\partial^2 r_{P_1P}}{\partial\eta\,\partial\xi}, \quad v_2(P,P_1) = \dfrac{1}{r_{P_1P}} - \dfrac{k}{2(1+k)}\dfrac{\partial^2 r_{P_1P}}{\partial\eta^2}, \\ \qquad w_2(P,P_1) = -\dfrac{k}{2(1+k)}\dfrac{\partial^2 r_{P_1P}}{\partial\eta\,\partial\zeta}, \\ u_3(P,P_1) = -\dfrac{k}{2(1+k)}\dfrac{\partial^2 r_{P_1P}}{\partial\zeta\,\partial\xi}, \quad v_3(P,P_1) = -\dfrac{k}{2(1+k)}\dfrac{\partial^2 r_{P_1P}}{\partial\zeta\,\partial\eta}, \\ \qquad w_3(P,P_1) = \dfrac{1}{r_{P_1P}} - \dfrac{k}{2(1+k)}\dfrac{\partial^2 r_{P_1P}}{\partial\zeta^2} \end{cases}$$

gegebenen Funktionen in $R + S$ mit Ausnahme des Punktes P_1 beliebig oft differenzierbar und genügen den Gleichungen (26). Wählt man alsdann die drei Funktionentripel (29) der Reihe nach für $\bar u$, $\bar v$, $\bar w$, und umgibt man den

Punkt P_1 mit einer ganz in R gelegenen Kugel S_0, so folgt aus der zu (28) analogen Formel, bei der neben dem Flächenintegral über S noch ein Flächenintegral über S_0 auftritt mit aus der Potentialtheorie geläufiger Schlußweise, wenn man den Radius von S_0 gegen Null gehen läßt, daß

$$(30)\left\{\begin{aligned}
u(P_1) &= \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{(S)}\{[u]_S X_{u_1,v_1,w_1}(p',p';P_1) + [v]_S Y_{u_1,v_1,w_1}(p',p';P_1) + \\
&\qquad + [w]_S Z_{u_1,v_1,w_1}(p',p';P_1) - \\
&\qquad - [u_1]_S X_{u,v,w}(p',p') - [v_1]_S Y_{u,v,w}(p',p') - \\
&\qquad - [w_1]_S Z_{u,v,w}(p',p')\}\,d\sigma, \\
v(P_1) &= \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{(S)}\{[u]_S X_{u_2,v_2,w_2}(p',p';P_1) + [v]_S Y_{u_2,v_2,w_2}(p',p';P_1) + \\
&\qquad + [w]_S Z_{u_2,v_2,w_2}(p',p';P_1) - \\
&\qquad - [u_2]_S X_{u,v,w}(p',p') - [v_2]_S Y_{u,v,w}(p',p') - \\
&\qquad - [w_2]_S Z_{u,v,w}(p',p')\}\,d\sigma, \\
w(P_1) &= \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{(S)}\{[u]_S X_{u_3,v_3,w_3}(p',p';P_1) + [v]_S Y_{u_3,v_3,w_3}(p',p';P_1) + \\
&\qquad + [w]_S Z_{u_3,v_3,w_3}(p',p';P_1) - \\
&\qquad - [u_3]_S X_{u,v,w}(p',p') - [v_3]_S Y_{u,v,w}(p',p') - \\
&\qquad - [w_3]_S Z_{u,v,w}(p',p')\}\,d\sigma
\end{aligned}\right.$$

sein muß. Hierbei ist gemäß (27) und (29)

$$X_{u_1,v_1,w_1}(p,p;P_1) = \frac{2}{2+k}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP_1}}\right)}{\partial n_p} + \frac{3k}{2+k}\left(\frac{\partial r_{pP_1}}{\partial \xi}\right)^2\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP_1}}\right)}{\partial n_p},$$

$$Y_{u_1,v_1,w_1}(p,p;P_1) = \frac{3k}{2+k}\frac{\partial r_{pP_1}}{\partial \xi}\frac{\partial r_{pP_1}}{\partial \eta}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP_1}}\right)}{\partial n_p},$$

$$Z_{u_1,v_1,w_1}(p,p;P_1) = \frac{3k}{2+k}\frac{\partial r_{pP_1}}{\partial \xi}\frac{\partial r_{pP_1}}{\partial \zeta}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP_1}}\right)}{\partial n_p},$$

$$X_{u_2,v_2,w_2}(p,p;P_1) = Y_{u_1,v_1,w_1}(p,p;P_1),$$

$$Y_{u_2,v_2,w_2}(p,p;P_1) = \frac{2}{2+k}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP_1}}\right)}{\partial n_p} + \frac{3k}{2+k}\left(\frac{\partial r_{pP_1}}{\partial \eta}\right)^2\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP_1}}\right)}{\partial n_p},$$

$$Z_{u_2,v_2,w_2}(p,p;P_1) = \frac{3k}{2+k}\frac{\partial r_{pP_1}}{\partial \eta}\frac{\partial r_{pP_1}}{\partial \zeta}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP_1}}\right)}{\partial n_p},$$

$$X_{u_3,v_3,w_3}(p,p;P_1) = Z_{u_1,v_1,w_1}(p,p;P_1),$$

$$Y_{u_3,v_3,w_3}(p,p;P_1) = Z_{u_2,v_2,w_2}(p,p;P_1),$$

$$Z_{u_3,v_3,w_3}(p,p;P_1) = \frac{2}{2+k}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP_1}}\right)}{\partial n_p} + \frac{3k}{2+k}\left(\frac{\partial r_{pP_1}}{\partial \zeta}\right)^2\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP_1}}\right)}{\partial n_p}$$

zu setzen.

Analoge Betrachtungen kann man für das Außengebiet R_a von R anstellen, wenn vorausgesetzt wird, daß die Funktionen u, v, w in $R_a + S$ zweimal stetig differenzierbar sind und dort den Gleichungen (26) genügen, daß sie ferner, falls der Aufpunkt P sich unbegrenzt weit vom Ursprung O des Koordinatensystems entfernt, wohlbestimmten Grenzwerten u_0, v_0, w_0 zustreben, während ihre ersten partiellen Ableitungen dabei wie $\frac{1}{r_{OP}^2}$ verschwinden. Es ergeben sich für $u(P_1)$, $v(P_1)$, $w(P_1)$ mit P_1 in R_a Ausdrücke von der Form (30), mit dem einzigen Unterschied, daß auf der rechten Seite bzw. die Bestandteile u_0, v_0, w_0 additiv hinzutreten.

Liegt schließlich der Punkt P_1 auf der Berandung S von R, so umgebe man ihn ebenfalls mit einer Kugel S_0 und wende (28), falls $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ bzw. gleich einem der Tripel (29) ist, auf die Oberfläche des Teilgebietes von R an, das aus R durch Wegnahme der Durchschnittsmenge von R und dem abgeschlossenen Kugelkörper von S_0 entsteht. Läßt man den Radius von S_0 gegen Null gehen, so erhält man eine zu (30) analoge Formel, die sich von dieser nur dadurch unterscheidet, daß der vor den Integralen über S stehende Faktor $\frac{1}{4\pi}$ durch $\frac{1}{2\pi}$ zu ersetzen ist.

Wählt man aber in (30) und in den im Text erwähnten entsprechenden Formeln, die sich ergeben, wenn P_1 auf S oder in R_a liegt, speziell

$$u(P) \equiv 1, \quad v(P) \equiv 0, \quad w(P) \equiv 0,$$

und beachtet man, daß als Folgerung aus dem GREENschen Satz der Potentialtheorie

$$\iint\limits_{(S)} \frac{\cos(r_{p'P}, n_{p'})}{r_{p'P}^2}\, d\sigma = \begin{cases} 4\pi \\ 2\pi \\ 0 \end{cases}$$

ist, je nachdem P in R, auf S oder in R_a liegt, so resultieren unmittelbar die behaupteten Relationen (24) und (25).

2. *Ist auf S eine integrable und beschränkte Funktion $f(p)$ gegeben, so genügen die Integrale*

$$V(p) = \iint\limits_{(S)} f(p')\, \frac{\cos^2(r_{p'p}, \xi)\cos(r_{p'p}, n_{p'})}{r_{p'p}^2}\, d\sigma$$

und

$$W(p) = \iint\limits_{(S)} f(p')\, \frac{\cos(r_{p'p}, \xi)\cos(r_{p'p}, \eta)\cos(r_{p'p}, n_{p'})}{r_{p'p}^2}\, d\sigma$$

auf S gleichmäßig einer H-Bedingung mit dem Flächenexponenten λ.

Dazu zeigen wir, daß für irgendeinen Flächenpunkt q *mit* $r_{pq} < \frac{\varrho_0}{2}$:

$$\left.\begin{array}{l} |V(q) - V(p)| \\ |W(q) - W(p)| \end{array}\right\} \leqq KA \,\overline{\mathrm{fin}}\, |f| r_{pq}^{\lambda}$$

gilt. Beachtet man nämlich, daß $r_{pq} \leqq Kt$ ist, so folgt daraus unmittelbar die Behauptung. Wir führen hier, wie auch bei den folgenden Hilfssätzen den Beweis nur für das Integral $V(p)$, da er für $W(p)$ ganz analog verläuft.

Um p und q beschreibe man die im § 2, Abschnitt 4 näher gekennzeichnete Kugel K_{pq}. Der Durchschnitt von S und K_{pq} heiße s; weiter sei $S - s = S'$. Damit wird

$$\begin{aligned} V(q) - V(p) = & \iint\limits_{(s)} f(p') \frac{\cos^2(r_{p'q}, \xi)\cos(r_{p'q}, n_{p'})}{r_{p'q}^2} d\sigma - \\ & - \iint\limits_{(s)} f(p') \frac{\cos^2(r_{p'p}, \xi)\cos(r_{p'p}, n_{p'})}{r_{p'p}^2} d\sigma + \\ & + \iint\limits_{(S-s)} f(p') \left\{ \frac{\cos^2(r_{p'q}, \xi)\cos(r_{p'q}, n_{p'})}{r_{p'q}^2} - \frac{\cos^2(r_{p'p}, \xi)\cos(r_{p'p}, n_{p'})}{r_{p'p}^2} \right\} d\sigma. \end{aligned}$$

Die beiden ersten Integrale lassen sich ihrem absoluten Betrage nach durch die bereits von SCHAUDER[20]) abgeschätzten Integrale

$$\iint\limits_{(s)} |f(p')| \frac{|\cos(r_{p'q}, n_{p'})|}{r_{p'q}^2} d\sigma \leqq KA \,\overline{\mathrm{fin}}\, |f| r_{pq}^{\lambda}$$

und

$$\iint\limits_{(s)} |f(p')| \frac{|\cos(r_{p'p}, n_{p'})|}{r_{p'p}^2} d\sigma \leqq KA \,\overline{\mathrm{fin}}\, |f| r_{pq}^{\lambda}$$

majorisieren.

Beschreibt man um den Punkt p die feste, d. h. von q unabhängige Kugel K_{ϱ_0}, so enthält sie die Kugel K_{pq} in ihrem Inneren. Der in K_{ϱ_0} gelegene Teil von $S - s$ heiße S''. Zerlegt man nun das Integral $\iint\limits_{(S-s)}$ in $\iint\limits_{(S'')}$ und $\iint\limits_{(S-s-S'')}$, so liefert das letztere sicher die für die H-Bedingung erforderliche Abschätzung. Für das restliche Integral kann geschrieben werden:

$$\begin{aligned} & \iint\limits_{(S'')} f(p') \frac{\{\cos^2(r_{p'q}, \xi) - \cos^2(r_{p'p}, \xi)\}\cos(r_{p'q}, n_{p'})}{r_{p'q}^2} d\sigma + \\ & \qquad + \iint\limits_{(S'')} f(p') \cos^2(r_{p'p}, \xi) \left\{ \frac{\cos(r_{p'q}, n_{p'})}{r_{p'q}^2} - \frac{\cos(r_{p'p}, n_{p'})}{r_{p'p}^2} \right\} d\sigma. \end{aligned}$$

---

[20]) J. SCHAUDER, l. c. Anm. [14]), insbes. S. 613.

Das zweite Integral kann durch das von SCHAUDER[21]) abgeschätzte Integral

$$\iint\limits_{(S'')} |f(p')| \left| \frac{\cos(r_{p'q}, n_{p'})}{r_{p'q}^2} - \frac{\cos(r_{p'p}, n_{p'})}{r_{p'p}^2} \right| d\sigma \leqq K A \,\overline{\text{fin}}\, |f| \, r_{pq}^{\lambda}$$

majorisiert werden.

Das erste Integral ist aber schließlich bei Beachtung von (9), (13) und (16) kleiner oder gleich als

$$4 \iint\limits_{(S'')} |f(p')| \left| \frac{r_{pq}}{r_{p'q}^3} \right| \cos(r_{p'q}, n_{p'}) | \, d\sigma$$

$$\leqq 4 \,\overline{\text{fin}}\, |f| \, r_{pq} K A \iint\limits_{(S'')} \frac{r_{p'q}^{\lambda}}{r_{p'q}^3} \, d\sigma \leqq K A \,\overline{\text{fin}}\, |f| \, r_{pq} \int\limits_{\frac{1}{2} r_{pq}}^{\varrho_0} \frac{d\varrho}{\varrho^{2-\lambda}}$$

$$\leqq K A \,\overline{\text{fin}}\, |f| \, r_{pq}^{\lambda},$$

wenn man berücksichtigt, daß zunächst

$$\iint\limits_{(S'')} \frac{1}{r_{p'p}^{3-\lambda}} \, d\sigma \leqq K \int\limits_{\varrho_1}^{\varrho_0} \frac{d\varrho}{\varrho^{2-\lambda}}$$

ist, falls ϱ_1 den Abstand des Punktes p vom Rande der Projektion von S'' auf die Tangentialebene in p bedeutet, und daß nach (12)

$$\varrho_1 = \tfrac{1}{2} r_{pq} (1 + O[r_{pq}^{\lambda}])$$

gilt.

3. *Genügt $f(p)$ auf S einer gleichmäßigen H-Bedingung mit dem Exponenten μ, d. h. gilt*

$$|f(q) - f(p)| \leqq B t^{\mu} \qquad (0 < \mu < 1; \; q \text{ in } S_p),$$

so hat man für $V(p)$ und $W(p)$ eine der drei Abschätzungen

$$\left.\begin{array}{l} |V(q) - V(p)| \\ \\ |W(q) - W(p)| \end{array}\right\} \leqq \left\{\begin{array}{l} K A B t^{\lambda+\mu} \\ K A B t \\ K A B t \, |\log t| \end{array}\right. ,$$

je nachdem

$$\mu + \lambda < 1, \quad \mu + \lambda > 1, \quad \mu + \lambda = 1$$

ist.

Da wegen (24)

$$\iint\limits_{(S)} f(p) \frac{\cos^2(r_{p'p}, \xi) \cos(r_{p'p}, n_{p'})}{r_{p'p}^2} \, d\sigma$$

$$= \iint\limits_{(S)} f(p) \frac{\cos^2(r_{p'q}, \xi) \cos(r_{p'q}, n_{p'})}{r_{p'q}^2} \, d\sigma = \frac{2\pi}{3} f(p)$$

[21]) J. SCHAUDER, l. c. Anm. [14]), insbes. S. 613.

sein muß, so kann man

$$V(q) - V(p) = \iint\limits_{(S)} \{f(p') - f(p)\} \left\{ \frac{\cos^2(r_{p'q}, \xi)\cos(r_{p'q}, n_{p'})}{r^2_{p'q}} - \right.$$

$$\left. - \frac{\cos^2(r_{p'p}, \xi)\cos(r_{p'p}, n_{p'})}{r^2_{p'p}} \right\} d\sigma$$

schreiben.

Zur Abschätzung dieser Differenz verwende man die bereits im Abschnitt 2 dieses Paragraphen benutzten Flächenstücke $s, S, S-s, S''$. Für $\iint\limits_{(s)}$ findet man unter Anwendung einer Abschätzung von SCHAUDER[22])

$$(31) \quad \left| \iint\limits_{(s)} \right| \leqq \iint\limits_{(s)} |f(p') - f(p)| \frac{|\cos(r_{p'q}, n_{p'})|}{r^2_{p'q}} d\sigma +$$

$$+ \iint\limits_{(s)} |f(p') - f(p)| \frac{|\cos(r_{p'p}, n_{p'})|}{r^2_{p'p}} d\sigma \leqq KABr_{pq}^{\mu+\lambda} \leqq KABt^{\mu+\lambda}.$$

Wegen (9), (13) und (16) und einer weiteren Abschätzung von SCHAUDER[23]) ist weiter

$$\left| \iint\limits_{(S'')} \right| \leqq \iint\limits_{(S'')} |f(p') - f(p)| \frac{|\cos^2(r_{p'q}, \xi) - \cos^2(r_{p'p}, \xi)| \cdot |\cos(r_{p'q}, n_{p'})|}{r^2_{p'q}} d\sigma +$$

$$+ \iint\limits_{(S'')} |f(p') - f(p)| \frac{|\cos^2(r_{p'p}, \xi)| \cdot |\cos(r_{p'q}, n_{p'}) - \cos(r_{p'p}, n_{p'})|}{r^2_{p'q}} d\sigma +$$

$$+ \iint\limits_{(S'')} |f(p') - f(p)| \cdot |\cos^2(r_{p'p}, \xi)| \cdot |\cos(r_{p'p}, n_{p'})| \cdot \left| \frac{1}{r^2_{p'q}} - \frac{1}{r^2_{p'p}} \right| d\sigma$$

$$\leqq 4KAB \iint\limits_{(S'')} r^{\mu}_{p'p} \frac{r_{pq}}{r^3_{p'q}} r^{\lambda}_{p'q} d\sigma + KABr_{pq} \int\limits_{\frac{1}{2}r_{pq}}^{\varrho_0} \frac{d\varrho}{\varrho^{2-(\lambda+\mu)}}$$

$$\leqq KABr_{pq} \int\limits_{\frac{1}{2}r_{pq}}^{\varrho_0} \frac{d\varrho}{\varrho^{2-(\lambda+\mu)}}.$$

Aus den gewonnenen Abschätzungen gewinnt man aber genau wie bei SCHAUDER die Behauptung.

N. B. Für $\lambda + \mu > 1$ folgt insbesondere aus der letzten Abschätzung

$$\left| \iint\limits_{(S'')} \right| \leqq KABr_{pq}\varrho_0^{\lambda+\mu-1}.$$

Daraus kann man bei Beachtung von (31) eine für spätere Zwecke nützliche Bemerkung ablesen. Ist σ ein Flächenstück, das ganz in einer Kugel vom

[22]) J. SCHAUDER, l. c. Anm. [14]), insbes. S. 614.

[23]) J. SCHAUDER, l. c. Anm. [14]), insbes. S. 614.

Radius $\varepsilon < \frac{\varrho_0}{2}$ um p enthalten ist, und gilt $r_{pq} < \varepsilon$, so folgt im Falle $\lambda + \mu > 1$ für das über σ erstreckte Integral

$$\left| \iint\limits_{(\sigma)} \{f(p') - f(p)\} \left\{ \frac{\cos^2(r_{p'q}, \xi)\cos(r_{p'q}, n_{p'})}{r^2_{p'q}} - \frac{\cos^2(r_{p'p}, \xi)\cos(r_{p'p}, n_{p'})}{r^2_{p'p}} \right\} d\sigma \right|$$
$$\leqq K A B \varepsilon^{\lambda+\mu-1} r_{pq}.$$

Man braucht ja in der eben angegebenen Abschätzung ϱ_0 nur durch ε zu ersetzen und in (31) $r_{pq} < \varepsilon$ zu berücksichtigen.

4. *Ist* $\lambda + \mu > 1$, *so existieren auf der Fläche die Tangentialableitungen* $\frac{\partial V(p)}{\partial t}$ *und* $\frac{\partial W(p)}{\partial t}$ *und sind durch*

$$\frac{\partial V(p)}{\partial t} = \iint\limits_{(S)} \{f(p') - f(p)\} \{\cos^2(r_{p'p}, \xi)\cos(n_{p'}, t) +$$
$$+ 2\cos(r_{p'p}, \xi)\cos(r_{p'p}, n_{p'})\cos(\xi, t) -$$
$$- 5\cos^2(r_{p'p}, \xi)\cos(r_{p'p}, n_{p'})\cos(r_{p'p}, t)\} \frac{1}{r^3_{p'p}}\, d\sigma$$

bzw.

$$\frac{\partial W(p)}{\partial t} = \iint\limits_{(S)} \{f(p') - f(p)\} \{\cos(r_{p'p}, \xi)\cos(r_{p'p}, \eta)\cos(n_{p'}, t) +$$
$$+ \cos(r_{p'p}, \xi)\cos(r_{p'p}, n_{p'})\cos(\eta, t) +$$
$$+ \cos(r_{p'p}, \eta)\cos(r_{p'p}, n_{p'})\cos(\xi, t) -$$
$$- 5\cos(r_{p'p}, \xi)\cos(r_{p'p}, \eta)\cos(r_{p'p}, n_{p'})\cos(r_{p'p}, t)\} \frac{1}{r^3_{p'p}}\, d\sigma$$

gegeben.

Beweis. Sei t eine an die Fläche im Punkte p tangentiale Richtung. Um p beschreibe man eine Kugel K_ε vom Radius ε mit $\varepsilon < \frac{\varrho_0}{2}$. Der Durchschnitt von S und K_ε heiße σ. Da nach (24)

$$\frac{\partial V(p)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \iint\limits_{(S)} \{f(p') - f(p)\} \frac{\cos^2(r_{p'p}, \xi)\cos(r_{p'p}, n_{p'})}{r^2_{p'p}}\, d\sigma$$

ist, so folgt bei Beachtung von (23), falls man das rechts stehende Integral $\iint\limits_{(S)}$ in $\iint\limits_{(\sigma)} + \iint\limits_{(S-\sigma)}$ zerlegt,

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint\limits_{(S-\sigma)} = \iint\limits_{(S-\sigma)} \{f(p') - f(p)\} \{\cos^2(r_{p'p}, \xi)\cos(n_{p'}, t) +$$
$$+ 2\cos(r_{p'p}, \xi)\cos(r_{p'p}, n_{p'})\cos(\xi, t) -$$
$$- 5\cos^2(r_{p'p}, \xi)\cos(r_{p'p}, n_{p'})\cos(r_{p'p}, t)\} \frac{1}{r^3_{p'p}}\, d\sigma.$$

Da nun aber weiter

$$\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{(\sigma)} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\iint\limits_{(\sigma)}\{f(p')-f(p)\}\left\{\frac{\cos^2(r_{p'q},\xi)\cos(r_{p'q},n_{p'})}{r^2_{p'q}}-\right.$$
$$\left.-\frac{\cos^2(r_{p'p},\xi)\cos(r_{p'p},n_{p'})}{r^2_{p'p}}\right\}d\sigma$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{r_{pq}}\iint\limits_{(\sigma)}$$

gilt, falls q ein Punkt von S_p ist, der in t-Richtung liegt, und t wie bisher die Projektion von $\overline{qp}$ auf die Tangentialebene in p darstellt, so ergibt sich bei Beachtung der Nebenbemerkung im Abschnitt 3 dieses Paragraphen, daß

$$\left|\frac{1}{r_{pq}}\iint\limits_{(\sigma)}\right| \leqq K\,A\,B\,\varepsilon^{\lambda+\mu-1}$$

ist und also wegen $\lambda+\mu>1$ mit ε gegen Null geht.

5. *Ist* $0<\lambda<1$, $0<\mu<1$, $\mu+\lambda>1$, *so genügen die Tangentialableitungen* $\frac{\partial V(p)}{\partial t}$ *und* $\frac{\partial W(p)}{\partial t}$ *einer H-Bedingung mit dem Exponenten* $\lambda+\mu-1$.

Es handelt sich also darum zu zeigen, daß für alle q aus S_p

$$\left.\begin{array}{l}\left|\dfrac{\partial V(q)}{\partial t_x}-\dfrac{\partial V(p)}{\partial x}\right|\\[2ex] \left|\dfrac{\partial V(q)}{\partial t_y}-\dfrac{\partial V(p)}{\partial y}\right|\end{array}\right\}\leqq C\,t^{\mu+\lambda-1}$$

gilt (vgl. § 1). Wir brauchen nur eine der beiden Relationen zu beweisen.

Bezeichnet man das in der Kugel $K_{pq}\left(r_{pq}<\frac{\varrho_0}{2}\right)$ gelegene Flächenstück mit s und schreibt man die links stehende Differenz der beiden Ableitungen unter Benutzung der im vorhergehenden Hilfssatz angegebenen Integraldarstellung als Differenz zweier Integrale, so findet man für die Integralanteile über s die Abschätzung

$$\left|\iint\limits_{(s)}\right| \leqq \iint\limits_{(s)}|f(p')-f(q)|\,|\cos^2(r_{p'q},\xi)\cos(n_{p'},t_x)+$$
$$+2\cos(r_{p'q},\xi)\cos(r_{p'q},n_{p'})\cos(\xi,t_x)-$$
$$-5\cos^2(r_{p'q},\xi)\cos(r_{p'q},n_{p'})\cos(r_{p'q},t_x)|\,\frac{1}{r^3_{p'q}}\,d\sigma+$$
$$+\iint\limits_{(s)}|f(p')-f(p)|\,|\cos^2(r_{p'p},\xi)\cos(n_{p'},x)+$$
$$+2\cos(r_{p'p},\xi)\cos(r_{p'p},n_{p'})\cos(\xi,x)-$$
$$-5\cos^2(r_{p'p},\xi)\cos(r_{p'p},n_{p'})\cos(r_{p'p},x)|\,\frac{1}{r^3_{p'p}}\,d\sigma$$

oder falls man (7), (9), (10) und

$$\begin{aligned}&|\cos(r_{p'q}, \xi)| \leqq 1, \quad |\cos(\xi, t_x)| \leqq 1, \quad |\cos(r_{p'q}, t_x)| \leqq 1;\\ &|\cos(r_{p'p}, \xi)| \leqq 1, \quad |\cos(\xi, x)| \leqq 1, \quad |\cos(r_{p'p}, x)| \leqq 1\end{aligned}$$

benutzt

$$\left|\iint\limits_{(s)}\right| \leqq K A B \left\{\iint\limits_{(s)} r^{\mu}_{p'q} \frac{r^{\lambda}_{p'q}}{r^3_{p'q}} d\sigma + \iint\limits_{(s)} r^{\mu}_{p'p} \frac{r^{\lambda}_{p'p}}{r^3_{p'p}} d\sigma\right\},$$

d. h.

$$\left|\iint\limits_{(s)}\right| \leqq K A B \int\limits_0^{2 r_{pq}} \frac{d\varrho}{\varrho^{2-(\lambda+\mu)}} = K A B\, r_{pq}^{\mu+\lambda-1}. \tag{32}$$

N. B. Diese Abschätzung besteht auch für $\mu = 1$.

Es sind also nur noch die Anteile der Integrale über S'' zu untersuchen. Zunächst ist

$$\begin{aligned}\iint\limits_{(S'')} = \{f(p) - f(q)\} \iint\limits_{(S'')} \{&\cos^2(r_{p'q}, \xi) \cos(n_{p'}, t_x) +\\ &+ 2\cos(r_{p'q}, \xi)\cos(r_{p'q}, n_{p'})\cos(\xi, t_x) -\\ &- 5\cos^2(r_{p'q}, \xi)\cos(r_{p'q}, n_{p'})\cos(r_{p'q}, t_x)\} \frac{1}{r^3_{p'q}} d\sigma +\\ + \iint\limits_{(S'')} \{f(p') - f(p)\} \Big[\{&\cos^2(r_{p'q}, \xi)\cos(n_{p'}, t_x) +\\ &+ 2\cos(r_{p'q}, \xi)\cos(r_{p'q}, n_{p'})\cos(\xi, t_x) -\\ &- 5\cos^2(r_{p'q}, \xi)\cos(r_{p'q}, n_{p'})\cos(r_{p'q}, t_x)\} \frac{1}{r^3_{p'q}} -\\ - \{\cos^2(r_{p'p}, \xi)&\cos(n_{p'}, x) + 2\cos(r_{p'p}, \xi)\cos(r_{p'p}, n_{p'})\cos(\xi, x) -\\ &- 5\cos^2(r_{p'p}, \xi)\cos(r_{p'p}, n_{p'})\cos(r_{p'p}, x)\} \frac{1}{r^3_{p'p}}\Big] d\sigma\\ = \mathrm{I} + \mathrm{II}.\end{aligned}$$

Das Integral I läßt sich nach (7) und (9) folgendermaßen abschätzen

$$|\mathrm{I}| \leqq B r^{\mu}_{pq} K A \iint\limits_{(S'')} \frac{r^{\lambda}_{p'q}}{r^3_{p'q}} d\sigma \leqq K A B r^{\mu}_{pq} \int\limits_{\frac{1}{2} r_{pq}}^{\varrho_0} \frac{d\varrho}{\varrho^{2-\lambda}},$$

d. h.

$$|\mathrm{I}| \leqq K A B r^{\mu}_{pq} r^{\lambda-1}_{pq} = K A B r^{\mu+\lambda-1}_{pq}. \tag{33}$$

N. B. Diese Abschätzung gilt auch für $\mu = 1$.

Das Integral II werde weiter zerlegt in

$$\begin{aligned}\mathrm{II} = \iint\limits_{(S'')} \{f(p') - f(p)\} \left\{\frac{\cos^2(r_{p'q}, \xi)\cos(n_{p'}, t_x)}{r^3_{p'q}} - \frac{\cos^2(r_{p'p}, \xi)\cos(n_{p'}, x)}{r^3_{p'p}}\right\} d\sigma + \\ + 2\iint\limits_{(S'')} \{f(p') - f(p)\} \left\{\frac{\cos(r_{p'q}, \xi)\cos(r_{p'q}, n_{p'})\cos(\xi, t_x)}{r^3_{p'q}} - \right. \\ \left. - \frac{\cos(r_{p'p}, \xi)\cos(r_{p'p}, n_{p'})\cos(\xi, x)}{r^3_{p'p}}\right\} d\sigma - \\ - 5\iint\limits_{(S'')} \{f(p') - f(p)\} \left\{\frac{\cos^2(r_{p'q}, \xi)\cos(r_{p'q}, n_{p'})\cos(r_{p'q}, t_x)}{r^3_{p'q}} - \right. \\ \left. - \frac{\cos^2(r_{p'p}, \xi)\cos(r_{p'p}, n_{p'})\cos(r_{p'p}, x)}{r^3_{p'p}}\right\} d\sigma \\ = J_1 + J_2 + J_3.\end{aligned}$$

Da

$$\begin{aligned}J_1 = \iint\limits_{(S'')} \{f(p') - f(p)\} \left[\left\{\frac{\cos^2(r_{p'q}, \xi)\cos(n_{p'}, t_x)}{r^3_{p'q}} - \frac{\cos^2(r_{p'p}, \xi)\cos(n_{p'}, t_x)}{r^3_{p'q}}\right\} + \right. \\ + \left\{\frac{\cos^2(r_{p'p}, \xi)\cos(n_{p'}, t_x)}{r^3_{p'q}} - \frac{\cos^2(r_{p'p}, \xi)\cos(n_{p'}, x)}{r^3_{p'q}}\right\} + \\ \left. + \left\{\frac{\cos^2(r_{p'p}, \xi)\cos(n_{p'}, x)}{r^3_{p'q}} - \frac{\cos^2(r_{p'p}, \xi)\cos(n_{p'}, x)}{r^3_{p'p}}\right\}\right] d\sigma,\end{aligned}$$

so hat man bei Beachtung von (13), (7), (21), (18) und (16)

$$\begin{aligned}|J_1| \leqq K A B \iint\limits_{(S'')} \left\{\frac{r^u_{p'p} r_{pq} r^\lambda_{p'q}}{r^4_{p'q}} + \frac{r^u_{p'p} r^\lambda_{pq}}{r^3_{p'q}} + \frac{r^u_{p'p} r^\lambda_{p'p} r_{pq}}{r^4_{p'q}}\right\} d\sigma \\ \leqq K A B r^\lambda_{pq} \int\limits_{\frac{1}{2} r_{pq}}^{\varrho_0} \frac{d\varrho}{\varrho^{2-u}} + K A B r_{pq} \int\limits_{\frac{1}{2} r_{pq}}^{\varrho_0} \frac{d\varrho}{\varrho^{3-(\lambda+u)}}.\end{aligned}$$

Für $\lambda + \mu > 1$ und $\mu < 1$ ergibt sich daher

$$|J_1| \leqq K A B r^{\lambda+\mu-1}_{pq}.$$

Genau so erkennt man nach (13), (9), (14), (19) und (18), daß

$$\begin{aligned}|J_2| \leqq K A B \iint\limits_{(S'')} \left\{\frac{r^\mu_{p'p} r_{pq} r^\lambda_{p'q}}{r^4_{p'q}} + \frac{r^u_{p'p} r_{pq}}{r^3_{p'q} r^{1-\lambda}_{p'q}} + \frac{r^u_{p'p} r^\lambda_{p'p} r^\lambda_{pq}}{r^3_{p'q}} + \frac{r^\mu_{p'p} r^\lambda_{p'p} r_{pq}}{r^4_{p'q}}\right\} d\sigma \\ \leqq K A B r_{pq} \int\limits_{\frac{1}{2} r_{pq}}^{\varrho_0} \frac{d\varrho}{\varrho^{3-(\lambda+u)}} + K A B r^\lambda_{pq} \int\limits_{\frac{1}{2} r_{pq}}^{\varrho_0} \frac{d\varrho}{\varrho^{2-(\lambda+\mu)}} \\ \leqq K A B r^{\lambda+\mu-1}_{pq} + K A B r^\lambda_{pq} r^{\lambda+\mu-1}_{pq} \leqq K A B r^{\mu+\lambda-1}_{pq},\end{aligned}$$

d. h.

(34) $$|J_2| \leqq K A B r_{pq}^{\mu+\lambda-1}$$

ist, und gemäß (13), (10), (14), (9), (22) und (18) wird schließlich

$$|J_3| \leqq K A B \iint\limits_{(S'')} \left\{ \frac{r_{p'p}^{\mu}\, r_{pq}\, r_{p'q}^{\lambda}}{r_{p'q}^{4}} + \frac{r_{p'p}^{\mu}\, r_{pq}\, r_{p'q}^{\lambda}}{r_{p'q}^{4}} + \right.$$

$$\left. + \frac{r_{p'p}^{\mu}\, r_{p'p}^{\lambda}}{r_{p'q}^{3}} \left(\frac{r_{pq}}{r_{p'q}} + r_{pq}^{\lambda} \right) + \frac{r_{p'p}^{\mu}\, r_{p'p}^{\lambda}\, r_{pq}}{r_{p'q}^{4}} \right\} d\sigma$$

$$\leqq K A B r_{pq} \int\limits_{\frac{1}{2} r_{pq}}^{\varrho_0} \frac{d\varrho}{\varrho^{3-(\lambda+\mu)}} + K A B r_{pq}^{\lambda} \int\limits_{\frac{1}{2} r_{pq}}^{\varrho_0} \frac{d\varrho}{\varrho^{2-(\lambda+\mu)}},$$

d. h.

(35) $$|J_3| \leqq K A B r_{pq}^{\mu+\lambda-1}.$$

6. *Besitzt die Funktion $f(p)$ auf S tangentiale Ableitungen, die gleichmäßig einer H-Bedingung mit dem Exponenten $\varepsilon > 0$ genügen:*

$$\left.\begin{aligned} \left| \frac{\partial f(q)}{\partial t_x} - \frac{\partial f(p)}{\partial x} \right| \\ \left| \frac{\partial f(q)}{\partial t_y} - \frac{\partial f(p)}{\partial y} \right| \end{aligned}\right\} \leqq C t^{\varepsilon} \quad \left(q \text{ in } S_p;\ \mathrm{Max} \left| \frac{\partial f}{\partial t} \right| \leqq C \right),$$

so genügen die Tangentialableitungen $\frac{\partial V(p)}{\partial t}$ und $\frac{\partial W(p)}{\partial t}$ gleichmäßig einer H-Bedingung mit dem Exponenten λ.

Beweis. Wegen der Existenz der Tangentialableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ in jedem Punkte p muß

$$\frac{|f(q) - f(p)|}{t} \leqq K C$$

sein, so daß $f(p)$ gleichmäßig einer H-Bedingung mit dem Exponenten $\mu = 1$ genügt.

Schreibt man nun, wie bei dem vorstehenden Hilfssatz

$$\frac{\partial V(q)}{\partial t_x} - \frac{\partial V(p)}{\partial x}$$

als Integral über S, so folgt nach den auch bei $\mu = 1$ geltenden Abschätzungen (32) und (33)

$$\left| \iint\limits_{(s)} \right| \leqq K A C r_{pq}^{\lambda}, \quad |\mathrm{I}| \leqq K A C r_{pq}^{\lambda}.$$

Bei Benutzung des im Punkte p lokalen Koordinatensystems wird nun

$$f(p') - f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 x' + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 y' + \left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^* - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0\right\} x' + \left\{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^* - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0\right\} y'.$$

Führt man die in der zum Punkte p^* gehörigen t_x-Richtung variierende lokale Tangentialkoordinate

$$t_x = (x - x^*) \cos\alpha + \{\varphi(x, 0) - \varphi(x^*, 0)\} \sin\alpha$$

ein, wo α der Winkel zwischen der x-Achse und der t_x-Richtung ist, so gilt

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^* &= \left(\frac{\partial f}{\partial t_x}\right)_{t_x=0} \left(\frac{d t_x}{d x}\right)_{x=x^*} = \left(\frac{\partial f}{\partial t_x}\right)^* \left(\frac{d t_x}{d x}\right)^* \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial t_x}\right)^* \left\{\cos\alpha + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^* \sin\alpha\right\} = \left(\frac{\partial f}{\partial t_x}\right)^* \frac{1}{\cos\alpha} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial t_x}\right)^* \sqrt{1 + \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^*\right]^2}.\end{aligned}$$

Damit erhält man ohne weiteres bei Beachtung von (1) und der Voraussetzung dieses Hilfssatzes[24])

$$(36) \qquad f(p') - f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 x' + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 y' + O\left[t'^{1+\varepsilon} + t'^{1+\lambda}\right].$$

Für das Integral II kann dann geschrieben werden

$$\begin{aligned}\mathrm{II} = a_0 \iint\limits_{(S'')} x' \Big[&\{\cos^2(r_{p'q}, \xi)\cos(n_{p'}, t_x) + 2\cos(r_{p'q}, \xi)\cos(r_{p'q}, n_{p'})\cos(\xi, t_x) - \\ &- 5\cos^2(r_{p'q}, \xi)\cos(r_{p'q}, n_{p'})\cos(r_{p'q}, t_x)\} \frac{1}{r^3_{p'q}} - \\ &- \{\cos^2(r_{p'p}, \xi)\cos(n_{p'}, x) + 2\cos(r_{p'p}, \xi)\cos(r_{p'p}, n_{p'})\cos(\xi, x) - \\ &- 5\cos^2(r_{p'p}, \xi)\cos(r_{p'p}, n_{p'})\cos(r_{p'p}, x)\} \frac{1}{r^3_{p'p}}\Big] d\sigma + \\ &+ b_0 \iint\limits_{(S'')} y' [\ldots] d\sigma + \iint\limits_{(S'')} O\left[t'^{1+\varepsilon} + t'^{1+\lambda}\right] \cdot [\cdots] d\sigma \\ = \mathrm{II}_1 + \mathrm{II}_2 + \mathrm{II}_3,&\end{aligned}$$

falls

$$a_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0, \quad b_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0$$

---

24) Bei SCHAUDER, l. c. Anm. 14) wird auf der rechten Seite irrtümlicherweise nur ein $O[t'^{1+\varepsilon}]$ angegeben.

gesetzt ist. Das Integral II_3 läßt sich wie das Integral II beim Beweise des Hilfssatzes 5 abschätzen:

$$|\mathrm{II}_3| \leqq K A C r_{pq}^{\lambda} \int\limits_{\frac{1}{2} r_{pq}}^{\varrho_0} \frac{d\varrho}{\varrho^{2-(1+\varepsilon)}} + K A C r_{pq} \int\limits_{\frac{1}{2} r_{pq}}^{\varrho_0} \frac{d\varrho}{\varrho^{3-(1+\varepsilon+\lambda)}} +$$

$$+ K A C r_{pq}^{\lambda} \int\limits_{\frac{1}{2} r_{pq}}^{\varrho_0} \frac{d\varrho}{\varrho^{2-(1+\varepsilon+\lambda)}} + K A C r_{pq}^{\lambda} \int\limits_{\frac{1}{2} r_{pq}}^{\varrho_0} \frac{d\varrho}{\varrho^{2-(1+\lambda)}} +$$

$$+ K A C r_{pq} \int\limits_{\frac{1}{2} r_{pq}}^{\varrho_0} \frac{d\varrho}{\varrho^{3-(1+2\lambda)}} + K A C r_{pq}^{\lambda} \int\limits_{\frac{1}{2} r_{pq}}^{\varrho_0} \frac{d\varrho}{\varrho^{2-(1+2\lambda)}}$$

$$\leqq K A C r_{pq}^{\lambda}.$$

Von den Integralen II_1 und II_2 braucht nur eines, etwa II_1, abgeschätzt zu werden. Das Integral II_1 zerlege man analog zu der früheren Zerlegung von II in $J_1 + J_2 + J_3$ in die drei Teilintegrale

$$\mathrm{II}_1 = J_1' + J_2' + J_3'.$$

Nimmt man weiter bei J_1' die Zerspaltung vor, wie sie früher für J_1 angegeben wurde, so findet man bei Beachtung von $|x'| \leqq r_{p'p}$:

$$|J_1'| = \left| a_0 \iint\limits_{(S'')} x' \left\{ \frac{\cos^2(r_{p'q}, \xi) \cos(n_{p'}, t_x)}{r_{p'q}^3} - \frac{\cos^2(r_{p'p}, \xi)\cos(n_{p'}, x)}{r_{p'p}^3} \right\} d\sigma \right|$$

$$\leqq K A C \iint\limits_{(S'')} \frac{|x'|\, r_{pq}\, r_{p'q}^{\lambda}}{r_{p'q}^4} + \left| a_0 \iint\limits_{(S'')} x' \left\{ \frac{\cos^2(r_{p'p}, \xi)\cos(n_{p'}, t_x)}{r_{p'q}^3} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\cos^2(r_{p'p}, \xi)\cos(n_{p'}, x)}{r_{p'q}^3} \right\} d\sigma \right| +$$

$$+ K A C \iint\limits_{(S'')} \frac{|x'|\, r_{p'p}^{\lambda}\, r_{pq}}{r_{p'q}^4}\, d\sigma$$

$$\leqq K A C r_{pq}^{\lambda} + \left| a_0 \iint\limits_{(S'')} \frac{x' \cos^2(r_{p'p}, \xi) \{\cos(n_{p'}, t_x) - \cos(n_{p'}, x)\}}{r_{p'q}^3}\, d\sigma \right|.$$

Aus

$$\cos(r_{p'p}, \xi) = \cos(r_{p'p}, x)\cos(x, \xi) + \cos(r_{p'p}, y)\cos(y, \xi) +$$
$$+ \cos(r_{p'p}, z)\cos(z, \xi)$$

folgt aber nach (11) und (10)

$$\cos(r_{p'p}, \xi) = \left(-\frac{x'}{t'}\right)\cos(x, \xi) + \left(-\frac{y'}{t'}\right)\cos(y, \xi) +$$
$$+ O[t'^{\lambda}]\cos(x, \xi) + O[t'^{\lambda}]\cos(y, \xi) + O[t'^{\lambda}]\cos(z, \xi),$$

so daß auch

$$\cos^2(r_{p'p}, \xi) = \frac{x'^2}{t'^2}\cos^2(x, \xi) + \frac{y'^2}{t'^2}\cos^2(y, \xi) + \frac{2\,x'\,y'}{t'^2}\cos(x,\xi)\cos(y,\xi) + \\ + O\,[t'^{\lambda}]$$

ist.

Damit erhält man, wenn man neben (19), (7) und (8) beachtet, daß nach (16) und (12)

$$\frac{1}{r^3_{p'q}} \leqq \frac{K}{t'^3} + O\left[\frac{1}{t'^{3-\lambda}}\right]$$

gilt, die Abschätzung

$$\left| a_0 \iint\limits_{(S'')} \frac{x' \cos^2(r_{p'p}, \xi)\,\{\cos(n_{p'}, t_x) - \cos(n_{p'}, x)\}}{r^3_{p'q}}\, d\sigma \right|$$

$$\leqq \left| a_0 \{\cos(x, t_x) - \cos(x, x)\} \iint\limits_{(S'')} \frac{x' \cos^2(r_{p'p}, \xi)\cos(n_{p'}, x)}{r^3_{p'q}}\, d\sigma \right| +$$

$$+ \left| a_0 \{\cos(y, t_x) - \cos(y, x)\} \iint\limits_{(S'')} \frac{x' \cos^2(r_{p'p}, \xi)\cos(n_{p'}, y)}{r^3_{p'q}}\, d\sigma \right| +$$

$$+ \left| a_0 \{\cos(z, t_x) - \cos(z, x)\} \iint\limits_{(S'')} \frac{x' \cos^2(r_{p'p}, \xi)\cos(n_{p'}, z)}{r^3_{p'q}}\, d\sigma \right|$$

$$\leqq K\,A\,C\,r^{\lambda}_{pq} +$$

$$+ K\,A\,C\,r^{\lambda}_{pq} \left| \cos^2(x, \xi) \iint\limits_{(S'')} \frac{x'^3}{t'^5}\, d\sigma + \cos^2(y, \xi) \iint\limits_{(S'')} \frac{x'\,y'^2}{t'^5}\, d\sigma + \right.$$

$$\left. + 2\cos(x, \xi)\cos(y, \xi) \iint\limits_{(S'')} \frac{x'^2\,y'}{t'^3}\, d\sigma \right| .$$

Die drei hier auf der rechten Seite stehenden Integrale sind aber beschränkt, denn sie unterscheiden sich zunächst durch beschränkte Größen von den Integralen mit demselben Integranden, die aber statt über S'' über die Projektion S_1'' von S'' auf die Tangentialebene in p erstreckt werden. Ersetzt man weiterhin die Integrationsfläche S_1'' durch die konzentrisch zu p gelegene Kreisringfläche S_2'', deren Randkreisradien ϱ_1 und ϱ_2 ($\varrho_1 < \varrho_2$) gleich dem minimalen bzw. maximalen Abstand der Randpunkte von S_1'' vom Punkte p sind, dann wird z. B.

$$\iint\limits_{(S_1'')} \frac{x'^3}{t'^5}\, d\sigma = \iint\limits_{(S_2'')} \frac{x'^3}{t'^5}\, d\sigma - \iint\limits_{(S_2''-S_1'')} \frac{x'^3}{t'^5}\, d\sigma$$

$$= \int\limits_{\vartheta=0}^{2\pi} \int\limits_{\varrho_1}^{\varrho_2} \frac{\cos^3\vartheta}{\varrho}\, d\varrho\, d\vartheta - \iint\limits_{(S_2''-S_1'')} \frac{x'^3}{t'^5}\, d\sigma = - \iint\limits_{(S_2''-S_1'')} \frac{x'^3}{t'^5}\, d\sigma .$$

Das letztere Integral ist aber, abgesehen von einem beschränkten Bestandteil, gleich dem Integral über ein Flächenstück, das von den inneren Randkurven von S_1'' und S_2'' berandet wird. Bezeichnet man den maximalen Abstand eines Punktes der inneren Randkurve von S_1'' vom Punkte p mit ϱ_3 ($\varrho_3 < 2\, r_{pq}$), so gilt

$$\left| \iint\limits_{(S_1'')} \frac{x'^3}{t'^5}\, d\sigma \right| \leqq K \int\limits_{\varrho_1}^{\varrho_3} \frac{d\varrho}{\varrho} < K \frac{\varrho_3 - \varrho_1}{\varrho_1} < K \frac{r_{pq}}{\varrho_1}.$$

Auf dem inneren Rand von S'' gibt es nun einen Punkt p^*, dessen Projektion von p den Abstand ϱ_1 hat. Es ist dann offensichtlich

$$\frac{r_{p p^*}}{\varrho_1} \leqq K.$$

Da aber für alle Punkte auf diesem Rande, also insbesondere für p^*, die Abschätzung

$$r_{pq} \leqq \tfrac{1}{2}\, r_{pq} + r_{p p^*}$$

oder

$$r_{pq} \leqq 2\, r_{p p^*}$$

besteht, so folgt schließlich, wie behauptet,

$$\left| \iint\limits_{(S_1'')} \frac{x'^3}{t'^5}\, d\sigma \right| \leqq K \frac{r_{p p^*}}{\varrho_1} \leqq K.$$

Ähnlich schließt man für die zwei verbleibenden Integrale.

Zur Abschätzung der Integrale J_1' und J_2' kann man unmittelbar die im 5. Abschnitt angegebenen Abschätzungen (34) und (35) für J_2 und J_3 verwenden, wenn man den dort auftretenden Exponenten μ durch 1 und B durch C ersetzt, so daß schließlich

$$|J_2'| \leqq K A C r_{pq}^{\lambda} \quad \text{und} \quad |J_3'| \leqq K A C r_{pq}^{\lambda}$$

wird.

7. *Für einen beliebigen Punkt P gilt*

$$(37) \qquad \left.\begin{aligned} &\iint\limits_{(S)} \left| \frac{\cos^2 (r_{p'P}, \xi) \cos (r_{p'P}, n_{p'})}{r_{p'P}^2} \right| d\sigma, \\ &\iint\limits_{(S)} \left| \frac{\cos (r_{p'P}, \xi) \cos (r_{p'P}, \eta) \cos (r_{p'P}, n_{p'})}{r_{p'P}^2} \right| d\sigma \end{aligned}\right\} \leqq K.$$

Das ist eine unmittelbare Folge der in der Potentialtheorie benötigten Abschätzung[25])

$$(38) \qquad \iint\limits_{(S)} \left| \frac{\cos (r_{p'P}, n_{p'})}{r_{p'P}^2} \right| d\sigma \leqq K.$$

[25]) Für den Beweis vgl. J. SCHAUDER, l. c. Anm. [14]), insbes. S. 628.

8. *Sind $V_i(p)$ und $V_a(p)$ bzw. $W_i(p)$ und $W_a(p)$ die Grenzwerte von $V(p)$ bzw. $W(p)$, wenn sich der Punkt P von innen oder außen einem Punkte p von S nähert, so gilt, falls $f(p)$ stetig ist,*

$$V_i(p) - V_a(p) = \frac{4\pi}{3} f(p)$$

und

$$V_i(p) + V_a(p) = 2 \iint\limits_{(S)} f(p') \frac{\cos^2(r_{p'p}, \xi)\cos(r_{p'p}, n_{p'})}{r^2_{p'p}}\, d\sigma$$

bzw.

$$W_i(p) - W_a(p) = 0,$$

$$W_i(p) + W_a(p) = 2 \iint\limits_{(S)} f(p') \frac{\cos(r_{p'p}, \xi)\cos(r_{p'p}, \eta)\cos(r_{p'p}, n_{p'})}{r^2_{p'p}}\, d\sigma.$$

Schreibt man nämlich, um z. B. das erste Relationenpaar zu beweisen,

$$V(P) = f(p) \iint\limits_{(S)} \frac{\cos^2(r_{p'P}, \xi)\cos(r_{p'P}, n_{p'})}{r^2_{p'P}}\, d\sigma +$$

$$+ \iint\limits_{(S)} \{f(p') - f(p)\} \frac{\cos^2(r_{p'P}, \xi)\cos(r_{p'P}, n_{p'})}{r^2_{p'P}}\, d\sigma,$$

so erkennt man bei Beachtung des Hilfssatzes 7 in bekannter Schlußweise, daß das zweite Integral beim Durchgang durch die Fläche stetig ist. Der Hilfssatz 1 dieses Paragraphen liefert dann die Relationen

$$V_i(p) - f(p)\frac{4\pi}{3} = V(p) - f(p)\frac{2\pi}{3} = V_a(p)$$

oder

(39) $$V_i(p) = V(p) + \frac{2\pi}{3} f(p),$$

(40) $$V_a(p) = V(p) - \frac{2\pi}{3} f(p),$$

aus denen die Behauptung folgt.

Entsprechend hat man

(41) $$W_i(p) = W(p),$$

(42) $$W_a(p) = W(p).$$

9. *Besitzt die Belegung $f(p)$ partielle Ableitungen, die ihrerseits einer gleichmäßigen H-Bedingung mit dem Exponenten λ genügen, und konvergieren die*

Punktfolgen P_n^i bzw. P_n^a längs der Normalen von der einen oder anderen Seite von S gegen p, so gilt für das im Punkte p lokale Koordinatensystem

$$\lim_{\substack{P_n^i \to p \\ P_n^a \to p}} \frac{\partial V(P)}{\partial x} = \iint\limits_{(S)} \{f(p') - f(p)\} \{\cos^2(r_{p'p}, \xi) \cos(n_{p'}, x) + $$
$$+ 2\cos(r_{p'p}, \xi)\cos(r_{p'p}, n_{p'})\cos(\xi, x) -$$
$$- 5\cos^2(r_{p'p}, \xi)\cos(r_{p'p}, n_{p'})\cos(r_{p'p}, x)\} \frac{1}{r_{p'p}^3}\, d\sigma \pm \frac{2\pi}{3}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0,$$

$$\lim_{\substack{P_n^i \to p \\ P_n^a \to p}} \frac{\partial W(P)}{\partial x} = \iint\limits_{(S)} \{f(p') - f(p)\} \{\cos(r_{p'p}, \xi)\cos(r_{p'p}, \eta)\cos(n_{p'}, x) +$$
$$+ \cos(r_{p'p}, \xi)\cos(r_{p'p}, n_{p'})\cos(\eta, x) - \cos(r_{p'p}, \eta)\cos(r_{p'p}, n_{p'})\cos(\xi, x) -$$
$$- 5\cos(r_{p'p}, \xi)\cos(r_{p'p}, \eta)\cos(r_{p'p}, n_{p'})\cos(r_{p'p}, x)\} \frac{1}{r_{p'p}^3}\, d\sigma.$$

Beweis. Es ist zunächst auf Grund von Hilfssatz 1:

$$\frac{\partial V(P)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{V(P) - f(p) \iint\limits_{(S)} \frac{\cos^2(r_{p'P}, \xi)\cos(r_{p'P}, n_{p'})}{r_{p'P}^2}\, d\sigma\right\}.$$

Schreibt man den rechts in der Klammer stehenden Ausdruck als ein einziges Integral über S und zerlegt es in der Form

$$\iint\limits_{(S)} = \iint\limits_{(S-s)} + \iint\limits_{(s)},$$

wo s ein Teilflächenstück von S ist, das ganz im Innern von S_p enthalten ist, und dessen Projektion auf die Tangentialebene in p ein Kreis K_ε vom Radius ε ist ($\varepsilon < \varrho_0$), so brauchen wir uns wegen

$$\lim_{P \to p} \left\{\frac{\partial}{\partial x} \iint\limits_{(S-s)}\right\} = \lim_{P \to p} \iint\limits_{(S-s)} \{f(p') - f(p)\} \{\cos^2(r_{p'P}, \xi)\cos(n_{p'}, x) +$$
$$+ 2\cos(r_{p'P}, \xi)\cos(r_{p'P}, n_{p'})\cos(\xi, x) -$$
$$- 5\cos^2(r_{p'P}, \xi)\cos(r_{p'P}, n_{p'})\cos(r_{p'P}, x)\} \frac{1}{r_{p'P}^3}\, d\sigma$$
$$= \iint\limits_{(S-s)} \{f(p') - f(p)\} \{\cos^2(r_{p'p}, \xi)\cos(n_{p'}, x) +$$
$$+ 2\cos(r_{p'p}, \xi)\cos(r_{p'p}, n_{p'})\cos(\xi, x) -$$
$$- 5\cos^2(r_{p'p}, \xi)\cos(r_{p'p}, n_{p'})\cos(r_{p'p}, x)\} \frac{1}{r_{p'p}^3}\, d\sigma$$

nur mit der Ableitung des Integrals $\iint\limits_{(s)}$ zu befassen, für die wir bei Beachtung von (36) auch

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\iint\limits_{(s)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \iint\limits_{(s)} x' \{&\cos^2(r_{p'P}, \xi)\cos(n_{p'}, x) \\ &+ 2\cos(r_{p'P}, \xi)\cos(r_{p'P}, n_{p'})\cos(\xi, x) - \\ &- 5\cos^2(r_{p'P}, \xi)\cos(r_{p'P}, n_{p'})\cos(r_{p'P}, x)\}\frac{1}{r^3_{p'P}}\,d\sigma + \\ &+ \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \iint\limits_{(s)} y'\{\cdots\}\frac{1}{r^3_{p'P}}\,d\sigma + \iint\limits_{(s)} O[t'^{1+\lambda}]\{\cdots\}\frac{1}{r^3_{p'P}}\,d\sigma \\ = \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}\end{aligned}$$

schreiben können.

Für $|\mathrm{III}|$ gilt aber nach (2)

$$\begin{aligned}|\mathrm{III}| &\leqq \left|\iint\limits_{(s)} O[t'^{1+\lambda}]\left\{\frac{1}{(t'^2+h^2)^{\frac{3}{2}}} + O\left[\frac{1}{(t'^2+h^2)^{\frac{3-\lambda}{2}}}\right]\right\}d\sigma\right| \\ &\leqq \iint\limits_{(s)} O\left[\frac{1}{t'^{2-\lambda}}\right]d\sigma \leqq O\left[\int\limits_0^\varepsilon \frac{d\varrho}{\varrho^{1-\lambda}}\right] = O[\varepsilon^\lambda],\end{aligned}$$

so daß das Integral III mit $\varepsilon \to 0$ gegen Null geht.

Das Integral I zerlegen wir gemäß den drei Summanden in der geschweiften Klammer des Integranden in drei Teilintegrale. Das erste Teilintegral läßt sich wegen (2) und (7) folgendermaßen abschätzen:

$$\begin{aligned}&\left|\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \iint\limits_{(s)} x' \frac{\cos^2(r_{p'P}, \xi)\cos n_{p'}, x)}{r^3_{p'P}}\,d\sigma\right| \\ &\leqq O\left[\iint\limits_{(s)} \frac{x'(t'^2+z'^2)^{\frac{\lambda}{2}}}{t'^3}\,d\sigma\right] = O\left[\int\limits_0^\varepsilon \frac{d\varrho}{\varrho^{1-\lambda}}\right] = O[\varepsilon^\lambda],\end{aligned}$$

wenn man noch nach (1) $z' = O[t'^{1+\lambda}]$ beachtet. Da gemäß

$$\cos(r_{p'P}, \xi) = \cos(r_{p'P}, x)\cos(x, \xi) + \cos(r_{p'P}, y)\cos(y, \xi) + \\ + \cos(r_{p'P}, z)\cos(z, \xi)$$

und (5), (6) und (3) die Abschätzung

$$\begin{aligned}\cos(r_{p'P}, \xi) = &-\frac{x'}{\sqrt{t'^2+h^2}}\cos(x, \xi) - \frac{y'}{\sqrt{t'^2+h^2}}\cos(y, \xi) + \\ &+ \frac{h}{\sqrt{t'^2+h^2}}\cos(z, \xi) + O[(t'^2+h^2)^{\frac{\lambda}{2}}]\end{aligned} \tag{43}$$

besteht, so erhält man für das zweite Teilintegral wegen (2) und (4) die Relation

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \iint\limits_{(s)} x' \, 2 \cos(r_{p'P}, \xi) \cos(r_{p'P}, n_{p'}) \cos(\xi, x) \frac{1}{r^3_{p'P}} \, d\sigma$$

$$= 2 \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \iint\limits_{(s)} x' \left\{ - \frac{x'}{\sqrt{t'^2 + h^2}} \cos(x, \xi) - \frac{y'}{\sqrt{t'^2 + h^2}} \cos(y, \xi) + \right.$$

$$\left. + \frac{h}{\sqrt{t'^2 + h^2}} \cos(z, \xi) + O\left[(t'^2 + h^2)^{\frac{\lambda}{2}}\right] \right\}$$

$$\left\{ \frac{h}{\sqrt{t'^2 + h^2}} + O\left[(t'^2 + h^2)^{\frac{\lambda}{2}}\right] \right\} \cos(\xi, x) \left\{ \frac{1}{\sqrt{t'^2 + h^2}^{\,3}} + O\left[\frac{1}{(t'^2 + h^2)^{\frac{3-\lambda}{2}}}\right] \right\} d\sigma$$

$$= -2 \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \left\{ \cos^2(\xi, x)\, h \iint\limits_{(s)} \frac{x'^2}{(t'^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}} \, d\sigma + \cos(\xi, x) \cos(\xi, y)\, h \iint\limits_{(s)} \frac{x' y'}{(t'^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}} \, d\sigma - \right.$$

$$\left. - \cos(\xi, x) \cos(\xi, z)\, h^2 \iint\limits_{(s)} \frac{x'}{(t'^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}} \, d\sigma + O[\varepsilon^\lambda] \right\}$$

$$= -2 \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \cos^2(\xi, x)\, h \int\limits_0^{2\pi} \cos^2 \vartheta \, d\vartheta \int\limits_0^{\varepsilon} \frac{\varrho^3}{(\varrho^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}} \, d\varrho + O[\varepsilon^\lambda]$$

$$= -2\pi \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \cos^2(\xi, x)\, h \left\{ \left(-\varepsilon^2 - \frac{2h^2}{3}\right) \frac{1}{(\varepsilon^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2}{3} \frac{1}{|h|} \right\} + O[\varepsilon^\lambda],$$

wenn man berücksichtigt, daß

$$\int \frac{x^3}{(x^2 + a)^{\frac{5}{2}}} \, dx = \frac{-a^2 - \frac{2a}{3}}{(x^2 + a)\sqrt{x^2 + a}}$$

ist, die Abschätzungen

$$h \int\limits_0^{\varepsilon} \frac{\varrho^3 \varrho^\lambda}{(\varrho^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}} \, d\varrho < \frac{h}{(h^2)^{\frac{1}{2}}} \int\limits_0^{\varepsilon} \frac{\varrho^{3+\lambda}}{(\varrho^2)^{\frac{4}{2}}} \, d\varrho = O[\varepsilon^\lambda],$$

$$h^2 \int\limits_0^{\varepsilon} \frac{\varrho^2 \varrho^\lambda}{(\varrho^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}} \, d\varrho < \frac{h^2}{(h^2)^{\frac{2}{2}}} \int\limits_0^{\varepsilon} \frac{\varrho^{2+\lambda}}{(\varrho^2)^{\frac{3}{2}}} \, d\varrho = O[\varepsilon^\lambda]$$

bestehen, und die Integrale

$$\iint\limits_{(K_\varepsilon)} \frac{x' y'}{(t'^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}} \, dx \, dy = 0, \qquad \iint\limits_{(K_\varepsilon)} \frac{x'}{(t'^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}} \, dx \, dy = 0$$

sind, wie man unter Einführung von Polarkoordinaten sofort sieht. Bei festem ε und $h \to 0$ geht also das zweite Teilintegral gegen

$$\mp \frac{4\pi}{3}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \cos^2(\xi, x) + O[\varepsilon^\lambda],$$

je nachdem der Fall $P_n^i \to p$ oder $P_n^a \to p$ vorliegt.

Für das dritte Teilintegral von I findet man schließlich nach (43), (2), (4) und (5)

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \iint\limits_{(s)} x' \, 5\cos^2(r_{p'P}, \xi)\cos(r_{p'P}, n_{p'})\cos(r_{p'P}, x)\frac{1}{r_{p'P}^3}\, d\sigma$$

$$= 5\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \iint\limits_{(s)} x' \left\{\frac{x'^2}{t'^2+h^2}\cos^2(x,\xi) + \frac{y'^2}{t'^2+h^2}\cos^2(y,\xi) + \frac{h^2}{t'^2+h^2}\cos^2(z,\xi) + \right.$$

$$+ 2\frac{x'y'}{t'^2+h^2}\cos(x,\xi)\cos(y,\xi) - 2\frac{x'h}{t'^2+h^2}\cos(x,\xi)\cos(z,\xi) -$$

$$\left. - 2\frac{y'h}{t'^2+h^2}\cos(y,\xi)\cos(z,\xi) + O[(t'^2+h^2)^{\frac{\lambda}{2}}]\right\}$$

$$\left\{\frac{h}{\sqrt{t'^2+h^2}} + O[(t'^2+h^2)^{\frac{\lambda}{2}}]\right\}\left\{-\frac{x'}{\sqrt{t'^2+h^2}} + O[(t'^2+h^2)^{\frac{\lambda}{2}}]\right\}$$

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{t'^2+h^2}^3} + O\left[\frac{1}{(t'^2+h^2)^{\frac{3-\lambda}{2}}}\right]\right\} d\sigma$$

$$= -5\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \left\{\cos^2(\xi,x)\, h \iint\limits_{(s)} \frac{x'^4}{(t'^2+h^2)^{\frac{7}{2}}}\, d\sigma + \cos^2(\xi,y)\, h \iint\limits_{(s)} \frac{x'^2 y'^2}{(t'^2+h^2)^{\frac{7}{2}}}\, d\sigma + \right.$$

$$+ \cos^2(\xi,z)\, h^3 \iint\limits_{(s)} \frac{x'^2}{(t'^2+h^2)^{\frac{7}{2}}}\, d\sigma + 2\cos(\xi,x)\cos(\xi,y)\, h \iint\limits_{(s)} \frac{x'^3 y'}{(t'^2+h^2)^{\frac{7}{2}}}\, d\sigma -$$

$$- 2\cos(\xi,x)\cos(\xi,z)\, h^2 \iint\limits_{(s)} \frac{x'^3}{(t'^2+h^2)^{\frac{7}{2}}}\, d\sigma -$$

$$\left. - 2\cos(\xi,y)\cos(\xi,z)\, h^2 \iint\limits_{(s)} \frac{x'^2 y'}{(t'^2+h^2)^{\frac{7}{2}}}\, d\sigma + O[\varepsilon^\lambda]\right\}$$

$$= -5\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \left[\cos^2(\xi,x)\frac{3\pi}{4}\, h\left\{-\frac{\varepsilon^4}{5(\varepsilon^2+h^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{4}{5}\left(\varepsilon^2 + \frac{2h^2}{3}\right)\frac{1}{(\varepsilon^2+h^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{8}{15}\frac{1}{|h|}\right\} + \right.$$

$$+ \cos^2(\xi,y)\frac{\pi}{4}\, h\left\{-\frac{\varepsilon^4}{5(\varepsilon^2+h^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{4}{5}\left(\varepsilon^2 + \frac{2h^2}{3}\right)\frac{1}{(\varepsilon^2+h^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{8}{15}\frac{1}{|h|}\right\} +$$

$$\left. + \cos^2(\xi,z)\,\pi h^3\left\{-\frac{\varepsilon^2}{5(\varepsilon^2+h^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{2}{15}\frac{1}{(\varepsilon^2+h^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2}{15}\frac{1}{|h|^3}\right\}\right] + O[\varepsilon^\lambda],$$

wenn man noch beachtet, daß

$$\int_0^{2\pi} \cos^4 \vartheta\, d\vartheta = \frac{3\pi}{4}, \qquad \int_0^{2\pi} \cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta\, d\vartheta = \frac{\pi}{4}, \qquad \int_0^{2\pi} \cos^2 \vartheta\, d\vartheta = \pi,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^3 \vartheta \sin \vartheta\, d\vartheta = 0, \qquad \int_0^{2\pi} \cos^3 \vartheta\, d\vartheta = 0, \qquad \int_0^{2\pi} \cos^2 \vartheta \sin \vartheta\, d\vartheta = 0,$$

$$\int \frac{x^5}{(x^2+a)^{\frac{7}{2}}}\, dx = -\frac{x^4}{5\,(x^2+a)^{\frac{5}{2}}} - \frac{4}{5}\,\frac{x^2+\frac{2a}{3}}{(x^2+a)\sqrt{x^2+a}}$$

und

$$\int \frac{x^3}{(x^2+a)^{\frac{7}{2}}}\, dx = -\frac{x^2}{5\,(x^2+a)^{\frac{5}{2}}} - \frac{2}{15}\,\frac{1}{(x^2+a)^{\frac{3}{2}}}$$

ist. Der Limes bei festem ε und $h \to 0$ des dritten Teilintegrals ist also

$$\mp 5 \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \left[\cos^2(\xi, x)\,\frac{3\pi}{4}\,\frac{8}{15} + \cos^2(\xi, y)\,\frac{\pi}{4}\,\frac{8}{15} + \cos^2(\xi, z)\,\pi\,\frac{2}{15}\right] + O[\varepsilon^\lambda]$$

$$= \mp 2\pi \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \left[\cos^2(\xi, x) + \frac{1}{3}\cos^2(\xi, y) + \frac{1}{3}\cos^2(\xi, z)\right] + O[\varepsilon^\lambda],$$

je nachdem der Fall $P_n^i \to p$ oder $P_n^a \to p$ vorliegt.

Das Integral I konvergiert also für $h \to 0$ gegen

$$\lim_{\substack{P_n^i \to p \\ P_n^a \to p}} \mathrm{I} = \mp \frac{4\pi}{3}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \cos^2(\xi, x) \pm 2\pi \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \left[\cos^2(\xi, x) + \frac{1}{3}\cos^2(\xi, y) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{3}\cos^2(\xi, z)\right] + O[\varepsilon^\lambda]$$
$$= \pm \frac{2\pi}{3}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 [\cos^2(\xi, x) + \cos^2(\xi, y) + \cos^2(\xi, z)] + O[\varepsilon^\lambda]$$
$$= \pm \frac{2\pi}{3}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0.$$

Nimmt man mit dem Integral II eine entsprechende Zerlegung in drei Teilintegrale vor, so findet man, daß das erste ein $O[\varepsilon^\lambda]$ ist, während die beiden anderen ergeben

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \iint_{(s)} y'\, 2\cos(r_{p'P}, \xi)\cos(r_{p'P}, n_{p'})\cos(\xi, x)\,\frac{1}{r^3_{p'P}}\, d\sigma$$

$$= -2\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \Big\{\cos^2(\xi. x)\, h \iint_{(s)} \frac{x'\,y'}{(t'^2+h^2)^{\frac{5}{2}}}\, d\sigma + \cos(\xi, x)\cos(\xi, y)\, h \iint_{(s)} \frac{y'^2}{(t'^2+h^2)^{\frac{5}{2}}}\, d\sigma -$$

$$- \cos(\xi, x)\cos(\xi, z)\, h^2 \iint_{(s)} \frac{y'}{(t'^2+h^2)^{\frac{5}{2}}}\, d\sigma + O[\varepsilon^\lambda],$$

d. h. für $h \to 0$:

$$\mp \frac{4\pi}{3} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \cos(\xi, x) \cos(\xi, y) + O[\varepsilon^\lambda]$$

bzw.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \iint\limits_{(s)} y'\, 5 \cos^2 (r_{p'P}, \xi) \cos (r_{p'P}, n_{p'}) \cos (r_{p'P}, x) \frac{1}{r^3_{p'P}}\, d\sigma$$

$$= -5 \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \Bigg\{\cos^2(\xi, x)\, h \iint\limits_{(s)} \frac{x'^3 y'}{(t'^2 + h^2)^{\frac{7}{2}}}\, d\sigma + \cos^2(\xi, y)\, h \iint\limits_{(s)} \frac{x' y'^3}{(t'^2 + h^2)^{\frac{7}{2}}}\, d\sigma +$$

$$+ \cos^2(\xi, z)\, h^2 \iint\limits_{(s)} \frac{x' y'}{(t'^2 + h^2)^{\frac{7}{2}}}\, d\sigma + 2 \cos(\xi, x) \cos(\xi, y)\, h \iint\limits_{(s)} \frac{x'^2 y'^2}{(t'^2 + h^2)^{\frac{7}{2}}}\, d\sigma -$$

$$- 2 \cos(\xi, x) \cos(\xi, z)\, h^2 \iint\limits_{(s)} \frac{x'^2 y'}{(t'^2 + h^2)^{\frac{7}{2}}}\, d\sigma -$$

$$- 2 \cos(\xi, y) \cos(\xi, z)\, h^2 \iint\limits_{(s)} \frac{x' y'^2}{(t'^2 + h^2)^{\frac{7}{2}}}\, d\sigma + O[\varepsilon^\lambda]\Bigg\},$$

d. h. für $h \to 0$

$$\mp 5 \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 2 \cos(\xi, x) \cos(\xi, y) \frac{\pi}{4} \frac{8}{15} + O[\varepsilon^\lambda]$$

$$= \mp \frac{4\pi}{3} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \cos(\xi, x) \cos(\xi, y) + O[\varepsilon^\lambda],$$

wenn man noch beachtet, daß

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos\vartheta \sin^3\vartheta\, d\vartheta = 0, \quad \int\limits_0^{2\pi} \cos\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta = 0, \quad \int\limits_0^{2\pi} \cos\vartheta \sin^3\vartheta\, d\vartheta = 0$$

ist.

Da mithin

$$\lim_{h \to 0} \mathrm{II} = \mp \frac{4\pi}{3} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \cos(\xi, x) \cos(\xi, y) \pm \frac{4\pi}{3} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \cos(\xi, x) \cos(\xi, y) + \\ + O[\varepsilon^\lambda] = O[\varepsilon^\lambda]$$

ist, so folgt

$$\lim_{h \to 0} \iint\limits_{(s)} = \lim_{h \to 0} \{\mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}\} = \pm \frac{2\pi}{3} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 + O[\varepsilon^\lambda].$$

10. *Unter der Voraussetzung von Hilfssatz 9 hat man für die Normalableitungen von V bzw. W die Limesrelationen*

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{P_n^i \to p\\ P_n^a \to p}} \frac{\partial V(P)}{\partial z} = \iint\limits_{(S)} &\{f(p') - f(p)\}\{\cos^2(r_{p'p}, \xi)\cos(n_{p'}, n_p) + \\ &+ 2\cos(r_{p'p}, \xi)\cos(r_{p'p}, n_{p'})\cos(n_p, \xi) - \\ &- 5\cos^2(r_{p'p}, \xi)\cos(r_{p'p}, n_{p'})\cos(r_{p'p}, n_p)\}\frac{1}{r_{p'p}^3}\,d\sigma \mp \\ &\mp \frac{4\pi}{3}\cos(\xi, z)\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \cos(\xi, x) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \cos(\xi, y)\right\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{P_n^i \to p\\ P_n^a \to p}} \frac{\partial W(P)}{\partial z} = \iint\limits_{(S)} &\{f(p') - f(p)\}\{\cos(r_{p'p}, \xi)\cos(r_{p'p}, \eta)\cos(n_{p'}, n_p) + \\ &+ \cos(r_{p'p}, \xi)\cos(r_{p'p}, n_{p'})\cos(n_p, \eta) + \\ &+ \cos(r_{p'p}, \eta)\cos(r_{p'p}, n_{p'})\cos(n_p, \xi) - \\ &- 5\cos(r_{p'p}, \xi)\cos(r_{p'p}, \eta)\cos(r_{p'p}, n_{p'})\cos(r_{p'p}, n_p)\}\frac{1}{r_{p'p}^3}\,d\sigma \mp \\ &\mp \frac{2\pi}{3}\left\{\cos(\xi, z)\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \cos(x, \eta) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \cos(y, \eta)\right) + \right. \\ &\left. + \cos(\eta, z)\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \cos(x, \xi) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \cos(y, \xi)\right)\right\}.\end{aligned}$$

Beweis. Nach Hilfssatz 1 dieses Paragraphen ist

$$\frac{\partial V(P)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left\{V(P) - f(p)\iint\limits_{(S)} \frac{\cos^2(r_{p'P}, \xi)\cos(r_{p'P}, n_{p'})}{r_{p'P}^2}\,d\sigma\right\}.$$

Wird der in der geschweiften Klammer stehende Ausdruck wieder analog wie bei dem Beweise von Hilfssatz 9 als ein Integral über S geschrieben und in der Form

$$\iint\limits_{(S)} = \iint\limits_{(S-s)} + \iint\limits_{(s)}$$

zerlegt, so braucht wegen

$$\begin{aligned}\lim_{P \to p}\left\{\frac{\partial}{\partial z}\iint\limits_{(S-s)}\right\} = \lim_{P \to p}\iint\limits_{(S-s)} &\{f(p') - f(p)\}\{\cos^2(r_{p'P}, \xi)\cos(n_{p'}, n_p) + \\ &+ 2\cos(r_{p'P}, \xi)\cos(r_{p'P}, n_{p'})\cos(n_p, \xi) - \\ &- 5\cos^2(r_{p'P}, \xi)\cos(r_{p'P}, n_{p'})\cos(r_{p'P}, n_p)\}\frac{1}{r_{p'P}^3}\,d\sigma \\ = \iint\limits_{(S-s)} &\{f(p') - f(p)\}\{\cos^2(r_{p'p}, \xi)\cos(n_{p'}, n_p) + \\ &+ 2\cos(r_{p'p}, \xi)\cos(r_{p'p}, n_{p'})\cos(n_p, \xi) - \\ &- 5\cos(r_{p'p}, \xi)\cos(r_{p'p}, n_{p'})\cos(r_{p'p}, n_p)\}\frac{1}{r_{p'p}^3}\,d\sigma.\end{aligned}$$

[man vergleiche hierzu (23)] nur noch der Limes von

$$\frac{\partial}{\partial z}\iint\limits_{(s)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \iint\limits_{(s)} x' \{\cos^2(r_{p'P}, \xi)\cos(n_{p'}, n_p) +$$
$$+ 2\cos(r_{p'P}, \xi)\cos(r_{p'P}, n_{p'})\cos(n_p, \xi) -$$
$$- 5\cos^2(r_{p'P}, \xi)\cos(r_{p'P}, n_{p'})\cos(r_{p'P}, n_p)\}\frac{1}{r^3_{p'P}}\,d\sigma +$$
$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \iint\limits_{(s)} y'\{\cdots\}\frac{1}{r^3_{p'P}}\,d\sigma + \iint\limits_{(s)} O[t'^{1+\lambda}]\{\cdots\}\frac{1}{r^3_{p'P}}\,d\sigma$$
$$= \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}$$

untersucht zu werden.

Für III erkennt man genau, wie im vorhergehenden Abschnitt, daß

$$|\mathrm{III}| \leqq O[\varepsilon^\lambda]$$

ist. Zerlegt man I wieder in drei Teilintegrale, so findet man für das erste bei Beachtung von (43) und (8)

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \iint\limits_{(s)} \frac{x'\cos^2(r_{p'P}, \xi)\cos(n_{p'}, n_p)}{r^3_{p'P}}\,d\sigma$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \iint\limits_{(s)} x'\left\{\frac{x'^2}{t'^2+h^2}\cos^2(x, \xi) + \frac{y'^2}{t'^2+h^2}\cos^2(y, \xi) + \frac{h^2}{t'^2+h^2}\cos^2(z, \xi) +\right.$$
$$+ \frac{2x'y'}{t'^2+h^2}\cos(x, \xi)\cos(y, \xi) - \frac{2x'h}{t'^2+h^2}\cos(x, \xi)\cos(z, \xi) -$$
$$- \frac{2y'h}{t'^2+h^2}\cos(y, \xi)\cos(z, \xi) +$$
$$\left. + O\left[(t'^2+h^2)^{\frac{\lambda}{2}}\right]\right\}\{1 + O[t'^\lambda]\}\left\{\frac{1}{\sqrt{t'^2+h^2}^{\,3}} + O\left[\frac{1}{(t'^2+h^2)^{\frac{3-\lambda}{2}}}\right]\right\}d\sigma,$$

so daß für $h \to 0$ sich der Grenzwert

$$\mp\frac{4\pi}{3}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \cos(\xi, x)\cos(\xi.\, z) + O[\varepsilon^\lambda]$$

ergibt.

Für das zweite Teilintegral von I folgt nach (43) und (4)

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \iint\limits_{(s)} x'\, 2\cos(r_{p'P}, \xi)\cos(r_{p'P}, n_{p'})\cos(n_p, \xi)\frac{1}{r^3_{p'P}}\,d\sigma$$
$$= 2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \iint\limits_{(s)} x'\left\{-\frac{x'}{\sqrt{t'^2+h^2}}\cos(x,\xi) - \frac{y'}{\sqrt{t'^2+h^2}}\cos(y,\xi) + \frac{h}{\sqrt{t'^2+h^2}}\cos(z, \xi) +\right.$$
$$\left. + O\left[(t'^2+h^2)^{\frac{\lambda}{2}}\right]\right\}\left\{\frac{h}{\sqrt{t'^2+h^2}} + O\left[(t'^2+h^2)^{\frac{\lambda}{2}}\right]\right\}\cos(z, \xi)$$
$$\left\{\frac{1}{\sqrt{t'^2+h^2}^{\,3}} + O\left[\frac{1}{(t'^2+h^2)^{\frac{3-\lambda}{2}}}\right]\right\}d\sigma,$$

so daß der Grenzwert für $h \to 0$

$$\mp \frac{4\pi}{3} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \cos(\xi, x) \cos(\xi, z) + O[\varepsilon^\lambda]$$

ist.

Für das dritte Teilintegral von I wird schließlich

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \iint\limits_{(s)} x' 5 \cos^2(r_{p'P}, \xi) \cos(r_{p'P}, n_{p'}) \cos(r_{p'P}, n_p) \frac{1}{r^3_{p'P}} d\sigma$$

$$= 5 \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \iint\limits_{(s)} x' \left\{\frac{x'^2}{t'^2+h^2} \cos^2(x, \xi) + \frac{y'^2}{t'^2+h^2} \cos^2(y, \xi) + \frac{h^2}{t'^2+h^2} \cos^2(z, \xi) + \right.$$

$$+ \frac{2x'y'}{t'^2+h^2} \cos(x, \xi) \cos(y, \xi) - \frac{2x'h}{t'^2+h^2} \cos(x, \xi) \cos(z, \xi) -$$

$$\left. - \frac{2y'h}{t'^2+h^2} \cos(y, \xi) \cos(z, \xi) + O\left[(t'^2+h^2)^{\frac{\lambda}{2}}\right]\right\}$$

$$\left\{\frac{h}{\sqrt{t'^2+h^2}} + O\left[(t'^2+h^2)^{\frac{\lambda}{2}}\right]\right\} \left\{\frac{h}{\sqrt{t'^2+h^2}} + O\left[(t'^2+h^2)^{\frac{\lambda}{2}}\right]\right\}$$

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{t'^2+h^2}^{\,3}} + O\left[\frac{1}{(t'^2+h^2)^{\frac{3-\lambda}{2}}}\right]\right\} d\sigma,$$

so daß der Grenzwert für $h \to 0$

$$\mp 10 \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \cos(\xi, x) \cos(\xi, z) \pi \frac{2}{15} + O[\varepsilon^\lambda]$$

$$= \mp \frac{4\pi}{3} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \cos(\xi, x) \cos(\xi, z) + O[\varepsilon^\lambda]$$

lautet.

Damit ist also erkannt, daß

$$\lim_{h \to 0} \mathrm{I} = \mp \frac{4\pi}{3} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \cos(\xi, x) \cos(\xi, z) + O[\varepsilon^\lambda]$$

ist. Wird das Integral II entsprechend behandelt, so ergibt sich

$$\lim_{h \to 0} \mathrm{II} = \mp \frac{4\pi}{3} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \cos(\xi, y) \cos(\xi, z) \mp \frac{4\pi}{3} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \cos(\xi, y) \cos(\xi, z) \pm$$

$$\pm \frac{4\pi}{3} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \cos(\xi, y) \cos(\xi, z) + O[\varepsilon^\lambda]$$

$$= \mp \frac{4\pi}{3} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \cos(\xi, y) \cos(\xi, z) + O[\varepsilon^\lambda],$$

so daß insgesamt

$$\lim_{\substack{P_n^i \to p \\ P_n^a \to p}} \frac{\partial}{\partial z} \iint\limits_{(s)} = \mp \frac{4\pi}{3} \cos(\xi, z) \left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \cos(\xi, x) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \cos(\xi, y)\right\} + O[\varepsilon^\lambda]$$

ist.

N. B. Die Grenzwerte in den Hilfssätzen 9 und 10 werden gleichmäßig angenommen.

11. *Genügt die Belegung $f(p)$ einer H-Bedingung mit dem Exponenten μ, so genügen die Integrale $V(P)$ und $W(P)$ in $R+S$ und in R_a+S einer H-Bedingung mit dem gleichen Exponenten μ, wenn man hier, abweichend von der früher benutzten Terminologie, die Werte von V und W in einem Punkte p der Berandung S von R bzw. R_a durch*

$$V(p) = \lim_{P_n^i \to p} V(P_n^i), \quad W(p) = \lim_{P_n^i \to p} W(P_n^i)$$

bzw.

$$V(p) = \lim_{P_n^a \to p} V(P_n^a), \quad W(p) = \lim_{P_n^a \to p} W(P_n^a)$$

gegeben denkt.

Beweis[26]). Es seien P_1, P_2 zwei beliebige in R (oder in R_a) gelegene Punkte, für die

$$r_{P_1 P_2} = r_{12} < \frac{\varrho_0}{8}$$

gilt, und deren Entfernung von der Fläche kleiner als $\frac{\varrho_0}{4}$ ist. Versteht man unter K_{12} die Kugel mit dem Radius r_{12} um den Mittelpunkt P von $\overline{P_1 P_2}$, so sei

$$s = S \cdot K_{12},$$

wobei s natürlich auch die Nullmenge sein kann. Mit p_0 bezeichne man den P_1 am nächsten gelegenen Punkt von S, so daß

$$r_{p_0 P_1} < \frac{\varrho_0}{4}$$

ist. Die Strecke $\overline{p_0 P_1}$ steht dann offenbar auf S senkrecht.

Es kann nun

$$V(P_1) - V(P_2) = \iint\limits_{(S)} \{f(p') - f(p_0)\} \left\{ \frac{\cos^2(r_{p'P_1}, \xi)\cos(r_{p'P_1}, n_{p'})}{r^2_{p'P_1}} - \right.$$
$$\left. - \frac{\cos^2(r_{p'P_2}, \xi)\cos(r_{p'P_2}, n_{p'})}{r^2_{p'P_2}} \right\} d\sigma$$
$$= \iint\limits_{(s)} + \iint\limits_{(S-s)}$$

geschrieben werden. Ist s nicht gleich der Nullmenge, so gibt es mindestens einen Punkt p von s mit

$$r_{pP_1} \leqq r_{pP} + r_{PP_1} \leqq r_{12} + \frac{1}{2} r_{12} = \frac{3}{2} r_{12},$$

---

[26]) Bei den für den Beweis benutzten Abschätzungen sind in Richtigstellung der ursprünglichen SCHAUDERschen Fassung einige Modifikationen angebracht worden, die auch bei der Behandlung des Potentials der Doppelschicht entsprechend zu benutzen sind.

so daß auch

$$r_{p_0 P_1} \leqq \frac{3}{2} r_{12}$$

und daher

$$r_{p p_0} \leqq r_{p P_1} + r_{P_1 p_0} \leqq 3 r_{12}$$

gilt. Da dann für jeden Punkt p von s

$$|f(p) - f(p_0)| \leqq 3 B r_{12}^{\mu}$$

ist, so folgt auf Grund von Hilfssatz 7 dieses Paragraphen, daß

$$(44) \quad \iint_{(s)} \{f(p') - f(p_0)\} \left\{ \frac{\cos^2(r_{p' P_1}, \xi) \cos(r_{p' P_1}, n_{p'})}{r_{p' P_1}^2} - \frac{\cos^2(r_{p' P_2}, \xi) \cos(r_{p' P_2}, n_{p'})}{r_{p' P_2}^2} \right\} d\sigma \leqq K B r_{12}^{\mu}$$

ist.

Außerhalb von K_{12} muß nach (13) und (17)

$$(45) \quad \left| \frac{\cos^2(r_{p P_1}, \xi) \cos(r_{p P_1}, n_p)}{r_{p P_1}^2} - \frac{\cos^2(r_{p P_2}, \xi) \cos(r_{p P_2}, n_p)}{r_{p P_2}^2} \right| \leqq K \frac{r_{12}}{r_{p P_1}^3}$$

sein. Versteht man unter $K_{\varrho_0}^{(p_0)}$ die feste Kugel mit dem Radius $\frac{\varrho_0}{2}$ um p_0, so ist s, da für einen beliebigen Punkt p von s

$$r_{p p_0} \leqq 3 r_{12} < \frac{\varrho_0}{2}$$

gilt, in $K_{\varrho_0}^{(p_0)}$ enthalten. Die Menge $S - S \cdot K_{\varrho_0}^{(p_0)}$ liegt also außerhalb von K_{12}. Da aber für einen beliebigen Punkt p von ihr

$$r_{p P_1} \geqq r_{p p_0} - r_{p_0 P_1} \geqq \frac{\varrho_0}{2} - \frac{\varrho_0}{4} = \frac{\varrho_0}{4}$$

sein muß, so ergibt sich nach der gleichzeitig erfüllten Ungleichung (45) die Abschätzung

$$(46) \qquad \left| \iint_{(S - S \cdot K_{\varrho_0}^{(p_0)})} \right| \leqq K B r_{12},$$

wenn für die Konstante B der H-Bedingung für $f(p)$ gleichzeitig $\operatorname{Max} |f(p)| \leqq B$ gilt.

Versteht man weiter unter R_{12} die Kugel vom Radius r_{12} um den Punkt p_0 und ist $\sigma = S \cdot R_{12}$, so gilt nach dem Hilfssatz 7 dieses Paragraphen

$$(47)\quad \left|\iint_{(\sigma)} \{f(p') - f(p_0)\} \left\{\frac{\cos^2(r_{p'P_1}, \xi)\cos(r_{p'P_1}, n_{p'})}{r^2_{p'P_1}} - \frac{\cos^2(r_{p'P_2}, \xi)\cos(r_{p'P_2}, n_{p'})}{r^2_{p'P_2}}\right\} d\sigma\right|$$

$$\leqq K B r_{12}^{\mu} \left\{\iint_{(\sigma)} \left|\frac{\cos^2(r_{p'P_1}, \xi)\cos(r_{p'P_1}, n_{p'})}{r^2_{p'P_1}}\right| d\sigma + \iint_{(\sigma)} \left|\frac{\cos^2(r_{p'P_2}, \xi)\cos(r_{p'P_2}, n_{p'})}{r^2_{p'P_2}}\right| d\sigma\right\}$$

$$\leqq K B r_{12}^{\mu}.$$

Für einen beliebigen Punkt p von $S \cdot K_{\varrho_0}^{(p_0)}$ bestehen nun die Abschätzungen

$$(48)\qquad r_{p p_0} \leqq K A (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}, \quad r_{p P_1} \geqq (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}},$$

wenn man das in p_0 lokale rechtwinklige Koordinatensystem zugrunde legt, bei dem die Strecke $\overline{p_0 P_1}$ auf der z-Achse liegt. Daher findet man nach (45) und (48)

$$(49)\qquad \left|\iint_{(S \cdot K_{\varrho_0}^{(p_0)} - (s \dotplus \sigma))}\right| \leqq K B r_{12} \iint_{(S \cdot K_{\varrho_0}^{(p_0)} - (s \dotplus \sigma))} \frac{r^{\mu}_{p'p_0}}{r^3_{p'P_1}} d\sigma$$

$$\leqq K A B r_{12} \iint_{(S \cdot K_{\varrho_0}^{(p_0)} - (s \dotplus \sigma))} \frac{1}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3-\mu}{2}}} d\sigma \leqq K A B r_{12}^{\mu}.$$

Aus (44), (46), (47) und (49) folgt aber insgesamt

$$|V(P_1) - V(P_2)| = \left|\iint_{(s)} + \iint_{(S - S \cdot K_{\varrho_0}^{(p_0)})} + \iint_{(\sigma)} + \iint_{(S \cdot K_{\varrho_0}^{(p_0)} - (s \dotplus \sigma))}\right| \leqq K B r_{12}^{\mu}$$

q. e. d.

12. *Die in diesem Paragraphen für den Raum abgeleiteten Hilfssätze gelten mutatis mutandis auch für die Ebene.*

Sind ξ, η die Koordinaten in bezug auf ein beliebiges in der Ebene gelegenes rechtwinklig-kartesisches Bezugssystem, so bestehen, falls die Kurve S den in § 1 genannten Voraussetzungen genügt, die (24) und (25) entsprechenden Relationen

$$(50)\quad \int_{(S)} \left(\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial \left(\log \frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}} ds = \int_{(S)} \frac{\cos^2(r_{p'P}, \xi)\cos(r_{p'P}, n_{p'})}{r^2_{p'P}} ds = \begin{cases} \pi \\ \frac{\pi}{2} \\ 0 \end{cases},$$

je nachdem P im Innengebiet von S, auf S oder im Außengebiet von S liegt, und

$$(51)\quad \int\limits_{(S)} \frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \eta}\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\,ds = \int\limits_{(S)} \frac{\cos(r_{p'P},\xi)\cos(\overline{r_{p'P}},\eta)\cos(r_{p'P},n_{p'})}{r_{p'P}}\,ds = 0$$

bei beliebiger Lage des Aufpunktes P. Den Beweis von (50) und (51) kann man unter Benutzung des erst an einer späteren Stelle dieser Arbeit angegebenen ebenen Analogons (161), (162) der räumlichen Beziehungen (30) mit derselben Methode erbringen, die zum Beweise von (24) und (25) herangezogen wurde.

Mit geometrischen Hilfssätzen in der Art, wie sie in § 2 angegeben wurden, können die Analoga der Hilfssätze 2 bis 11 für den ebenen Fall bewiesen werden. Die Analoga der Hilfssätze 2 bis 6 lassen sich jedoch auch unmittelbar aus den bereits bewiesenen Sätzen für den räumlichen Fall ablesen, wie jetzt noch kurz gezeigt werden soll[27]).

Man ergänze das ξ, η-Koordinatensystem durch eine zur ξ, η-Ebene senkrechte ζ-Achse zu einem räumlichen Bezugssystem und bilde mit Hilfe der auf der Kurve S definierten integrablen Funktion $f(p)$ das über einen unendlich langen Zylinder, dessen Erzeugende der ζ-Achse parallel sind, erstreckte Integral

$$(52)\quad \lim_{b\to\infty}\int\limits_{(S)}\left\{\int\limits_{-b}^{b} f(p)\left(\frac{\partial r_{pP}}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p}\,d\zeta\right\} ds,$$

wobei p der auf dem Zylinder gelegene Integrationspunkt, P ein Punkt der ξ, η-Ebene ist und die Definition von $f(p)$ dadurch auf alle Punkte p des Zylinders erweitert wird, daß für sie der Wert der Funktion gleich dem an denjenigen auf S gelegenen Punkten p' angenommenen Wert ist, die dieselben ξ, η-Koordinaten besitzen.

Da aber mit

$$r_{pP} = \sqrt{r_{p'P}^2 + \zeta^2}$$

die Gleichungen

$$\frac{\partial r_{pP}}{\partial \xi} = \frac{r_{p'P}}{\sqrt{r_{p'P}^2+\zeta^2}}\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi} \quad \text{und} \quad \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p} = -\frac{r_{p'P}}{(r_{p'P}^2+\zeta^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial r_{p'P}}{\partial n_p}$$

---

[27]) Vgl. hierzu O. D. KELLOG, Foundations of potential theory. Berlin 1929. Insbes. S. 172—174.

bestehen, so erhält man

$$\int_{-b}^{b} f(p)\left(\frac{\partial r_{pP}}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p}\, d\zeta = -f(p')\, r_{p'P}^3 \left(\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial r_{p'P}}{\partial n_{p'}} \int_{-b}^{b} \frac{d\zeta}{(r_{p'P}^2+\zeta^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$= -f(p')\, r_{p'P}^3 \left(\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial r_{p'P}}{\partial n_{p'}} \left[\left(\frac{2}{3 r_{p'P}^4}\zeta^3 + \frac{1}{r_{p'P}^2}\zeta\right)\frac{1}{(r_{p'P}^2+\zeta^2)^{\frac{3}{2}}}\right]_{-b}^{b}$$

und also

$$(53) \qquad \lim_{b\to\infty} \int_{(S)} \left\{ \int_{-b}^{b} f(p)\left(\frac{\partial r_{pP}}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p}\, d\zeta \right\} ds$$

$$= \frac{4}{3}\int_{(S)} f(p')\left(\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial\left(\log \frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\, ds.$$

Wählt man nun eine feste Zahl a mit $0 < a < b$, so wird

$$\lim_{b\to\infty} \int_{a}^{b} f(p)\left(\frac{\partial r_{pP}}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p}\, d\zeta = -f(p')\, r_{p'P}^3 \left(\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial r_{p'P}}{\partial n_{p'}} \left[\frac{2}{3 r_{p'P}^4} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{2a^3}{3 r_{p'P}^4} + \frac{a}{r_{p'P}^2}\right)\frac{1}{(r_{p'P}^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

und

$$\lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{-a} f(p)\left(\frac{\partial r_{pP}}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p}\, d\zeta = -f(p')\, r_{p'P}^3 \left(\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial r_{p'P}}{\partial n_{p'}}\cdot$$

$$\cdot\left[-\left(\frac{2a^3}{3 r_{p'P}^4} + \frac{a}{r_{p'P}^2}\right)\frac{1}{(r_{p'P}^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2}{3 r_{p'P}^4}\right],$$

so daß wegen (53)

$$(54) \qquad V'(p) = \int_{(S)} f(p')\left(\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial\left(\log \frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\, ds$$

$$= \frac{3}{4}\int_{(S)} \left\{ \int_{-a}^{a} f(p)\left(\frac{\partial r_{pP}}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p}\, d\zeta \right\} ds -$$

$$-\frac{3}{2}\int_{(S)} f(p')\left(\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial r_{p'P}}{\partial n_{p'}}\left[\frac{2}{3 r_{p'P}} - \left(\frac{2a^3}{3 r_{p'P}} + a\, r_{p'P}\right)\frac{1}{(r_{p'P}^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\right] ds$$

sein muß.

Das erste rechts stehende Integral ist aber ein Integral von dem Typ, wie er in den vorhergehenden Abschnitten dieses Paragraphen untersucht wurde, so daß die darauf bezüglichen Sätze unmittelbar angewendet werden können. Es ist allerdings anzumerken, daß das herausgeschnittene Stück der Zylinderfläche keine geschlossene Fläche darstellt. Da uns aber das Verhalten eines solchen Integrals und seiner Tangentialableitungen lediglich in Flächenpunkten p interessiert, die gleichzeitig der Kurve S angehören, so können wir das Zylinderflächenstück einfach dadurch zu einer geschlossenen Fläche ergänzen, sofern das bei den Beweisen erforderlich ist, daß wir die von der Zylinderfläche herausgeschnittenen endlichen Flächenstücke in den Ebenen $\zeta = \pm a$ hinzunehmen.

Das zweite Integral rechts ist dagegen an jeder Stelle P der ξ, η-Ebene beliebig oft partiell nach ξ und η differenzierbar. Um das zu erkennen, bedarf es nur der Untersuchung einer auf S gelegenen Stelle, für die ja $r_{p'P} = 0$ sein kann. In der Umgebung einer solchen Stelle mit $r_{p'P} = 0$ gilt aber die Reihenentwicklung

$$\left(\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial r_{p'P}}{\partial n_{p'}} \left[\frac{2}{3 r_{p'P}} - \left(\frac{2a^3}{3 r_{p'P}} + a\, r_{p'P}\right) \frac{1}{(r_{p'P}^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$= \frac{(\xi' - \xi)^2}{r_{p'P}^2} \frac{\partial r_{p'P}}{\partial n_{p'}} \left[\frac{2}{3 r_{p'P}} - \left(\frac{2}{3 r_{p'P}} + \frac{r_{p'P}}{a^2}\right)\left(1 - \frac{3}{2}\left(\frac{r_{p'P}}{a}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{r_{p'P}}{a}\right)^4 - + \cdots\right)\right]$$

$$= \frac{(\xi' - \xi)^2}{r_{p'P}^2} \frac{\partial r_{p'P}}{\partial n_{p'}} \left[\frac{r_{p'P}}{a^2} - \frac{r_{p'P}}{a^2} - \frac{1}{4}\frac{r_{p'P}^3}{a^4} + \frac{3}{2}\frac{r_{p'P}^3}{a^4} + \cdots\right]$$

$$= \frac{(\xi' - \xi)^2}{r_{p'P}^2} \frac{\partial r_{p'P}}{\partial n_{p'}} \left[\frac{5}{4}\frac{r_{p'P}^3}{a^4} + \cdots\right],$$

wobei in der zuletzt angeschriebenen Reihe nur Potenzen mit einem ungeradzahligen Exponenten größer gleich 3 auftreten, so daß man schließlich mit geeigneten Koeffizienten $a_1, a_3, \ldots$

$$\left(\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial r_{p'P}}{\partial n_{p'}} \left[\frac{2}{3 r_{p'P}} - \left(\frac{2a^3}{3 r_{p'P}} + a\, r_{p'P}\right) \frac{1}{(r_{p'P}^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$= (\xi' - \xi)^2 \frac{\partial r_{p'P}}{\partial n_{p'}} [a_1 r_{p'P} + a_3 r_{p'P}^3 + a_5 r_{p'P}^5 + \cdots]$$

$$= (\xi' - \xi)^2 \frac{\partial}{\partial n_{p'}} \left[\frac{a_1}{2} r_{p'P}^2 + \frac{a_3}{4} r_{p'P}^4 + \cdots\right]$$

schreiben kann. Da hier aber in der eckigen Klammer eine Potenzreihe steht, die nach Potenzen von $(\xi' - \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2$ fortschreitet, so ist klar, daß der letztere Ausdruck an der Stelle $\xi = \xi'$, $\eta = \eta'$ und damit, wie behauptet, das zweite Integral auf der rechten Seite von (54) auch an einer auf S gelegenen Stelle beliebig oft nach ξ und η differenziert werden kann.

Für das Integral

$$W'(P) = \int\limits_{(S)} f(p') \frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi} \frac{\partial r_{p'P}}{\partial \eta} \frac{\partial \left(\log \frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}} ds$$

kann man eine zu (54) analoge Formel aufstellen und daraus dieselben Schlüsse ziehen.

Beachtet man, daß wegen der zu (38) analogen Relation

$$\int\limits_{(S)} \left| \frac{\cos(r_{p'P}, n_{p'})}{r_{p'P}} \right| ds \leqq K,$$

bei der K eine von der Lage des Punktes P unabhängige Konstante ist, die Abschätzungen

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int\limits_{(S)} \left| \frac{\cos^2(r_{p'P}, \xi) \cos(r_{p'P}, n_{p'})}{r_{p'P}} \right| ds, \\ \displaystyle\int\limits_{(S)} \left| \frac{\cos(r_{p'P}, \xi) \cos(r_{p'P}, \eta) \cos(r_{p'P}, n_{p'})}{r_{p'P}} \right| ds \end{array}\right\} \leqq K$$

bestehen, so ergeben sich die (39), (40), (41) und (42) entsprechenden Relationen

(55) $$V_i'(p) = V'(p) + \frac{\pi}{2} f(p),$$

(56) $$V_a'(p) = V'(p) - \frac{\pi}{2} f(p),$$

(57) $$W_i'(p) = W'(p),$$

(58) $$W_a'(p) = W'(p),$$

falls die Funktion $f(p)$ als stetig vorausgesetzt wird.

Besitzt die Funktion $f(p)$ eine erste partielle Ableitung, die einer gleichmäßigen H-Bedingung mit dem Kurvenexponenten λ genügt, und versteht man unter x, y ein in einem Punkte p von S lokales Koordinatensystem, bei dem die y-Achse in die Richtung der in das Innere von R weisenden Normalen zeigt, so folgt aus Hilfssatz 9 und 10 unmittelbar, daß die Grenzwerte

$$(59)\quad \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\partial V'(P_n^i)}{\partial x}, & \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\partial V'(P_n^a)}{\partial x}, \\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\partial V'(P_n^a)}{\partial y}, & \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\partial V'(P_n^a)}{\partial y}, \\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\partial W'(P_n^i)}{\partial x}, & \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\partial W'(P_n^a)}{\partial x}, \\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\partial W'(P_n^a)}{\partial y}, & \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\partial W'(P_n^a)}{\partial y} \end{cases}$$

existieren, wenn die Punktfolgen P_n^i bzw. P_n^a von innen bzw. von außen gegen p konvergieren, und daß insbesondere bei Beachtung von (54)

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\partial V'(P_n^i)}{\partial x} - \frac{\partial V'(P_n^a)}{\partial x}\right\} = \frac{3}{4}\,\frac{4\pi}{3} = \pi$$

und

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\partial W'(P_n^i)}{\partial x} - \frac{\partial W'(P_n^a)}{\partial x}\right\} = 0$$

ist. Unter derselben Voraussetzung über $f(p)$ gelten dann aber die folgenden später benötigten Limesrelationen

$$(60)\quad \lim_{n\to\infty}\left\{\left(2\frac{\partial V'(P_n^i)}{\partial x} - \left[\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{(S)} f(p')\,\frac{\partial\left[\log\dfrac{1}{r_{p'P}}\right]}{\partial n_{p'}}\,ds\right]_{P=P_n^i}\right) - \right.$$
$$\left. - \left(2\,\frac{\partial V'(P_n^a)}{\partial x} - \left[\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{(S)} f(p')\,\frac{\partial\left[\log\dfrac{1}{r_{p'P}}\right]}{\partial n_{p'}}\,ds\right]_{P=P_n^a}\right)\right\} = 2\pi - 2\pi = 0,$$

da

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{(S)} f(p')\,\frac{\partial\left[\log\dfrac{1}{r_{p'P}}\right]}{\partial n_{p'}}\,ds\right]_{P=P_n^i} - \right.$$
$$\left. - \left[\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{(S)} f(p')\,\frac{\partial\left[\log\dfrac{1}{r_{p'P}}\right]}{\partial n_{p'}}\,ds\right]_{P=P_n^a}\right\} = 2\pi$$

ist, und

$$(61)\quad \lim_{n\to\infty}\left\{\left(2\,\frac{\partial W'(P_n^i)}{\partial x}\pm\left[\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{(S)} f(p')\,\frac{\partial\left[\log\frac{1}{r_{p'P}}\right]}{\partial n_{p'}}\,d s\right]_{P=P_n^i}\right)-\right.$$
$$\left.-\left(2\,\frac{\partial W'(P_n^a)}{\partial x}\pm\left[\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{(S)} f(p')\,\frac{\partial\left[\log\frac{1}{r_{p'P}}\right]}{\partial n_{p'}}\,d s\right]_{P=P_n^a}\right)\right\}=0$$

wegen

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{(S)} f(p')\,\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\,d s\right]_{P=P_n^i}-\right.$$
$$\left.-\left[\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{(S)} f(p')\,\frac{\partial\left[\log\frac{1}{r_{p'P}}\right]}{\partial n_{p'}}\,d s\right]_{P=P_n^a}\right\}=0.$$

§ 4.

Das innere Problem im Raume.

1. Wir wollen in diesem Paragraphen für das innere räumliche Problem folgenden Existenz- und Eindeutigkeitssatz beweisen:

Hauptsatz I. *Genügt die Berandung S des einfach zusammenhängenden ganz im Endlichen gelegenen Gebietes R den im § 1 genannten Voraussetzungen, und besitzen die auf S definierten Funktionen ϱ, σ, τ dort partielle Ableitungen erster Ordnung, die einer gleichmäßigen H-Bedingung genügen, und sind sie die auf S angenommenen Werte der partiellen Ableitungen erster Ordnung einer in R zweimal stetig differenzierbaren Funktion $\Phi(\xi, \eta, \zeta)$, so gibt es (bis auf eine additive Konstante) genau eine in R biharmonische Funktion U, deren partielle Ableitungen erster Ordnung in $R+S$ stetig sind und auf S bzw. mit ϱ, σ, τ übereinstimmen.*

Nimmt man an, daß es eine biharmonische Funktion U mit den verlangten Eigenschaften gibt, und setzt man

$$u=\frac{\partial U}{\partial\xi},\quad v=\frac{\partial U}{\partial\eta},\quad w=\frac{\partial U}{\partial\zeta},\quad \vartheta=\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial v}{\partial\eta}+\frac{\partial w}{\partial\zeta}=\Delta U,$$

so genügen die Funktionen u, v, w, ϑ offenbar im Gebiet R den Differentialgleichungen

$$(62)\quad \Delta u-\frac{\partial\vartheta}{\partial\xi}=0,\quad \Delta v-\frac{\partial\vartheta}{\partial\eta}=0,\quad \Delta w-\frac{\partial\vartheta}{\partial\zeta}=0,\quad \Delta\vartheta=0,$$

sowie den (im Sinne von Grenzübergängen aus R auf S zu verstehenden) Randbedingungen

(63) $$[u]_S = \varrho, \quad [v]_S = \sigma, \quad [w]_S = \tau,$$

und umgekehrt gilt der gleich zu beweisende

Satz 1. *Sind die Funktionen ϱ, σ, τ die auf S angenommenen Werte der partiellen Ableitungen einer in R zweimal stetig differenzierbaren Funktion $\Phi(\xi, \eta, \zeta)$, und gibt es ein Lösungssystem u, v, w des Problems* (62), (63), *das in $R + S$ stetige partielle Ableitungen erster Ordnung besitzt, so existiert eine biharmonische Funktion U derart, daß*

$$u = \frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad v = \frac{\partial U}{\partial \eta}, \quad w = \frac{\partial U}{\partial \zeta}$$

ist.

Mit diesem Satz 1 ist aber zugleich der Hauptsatz I, jedenfalls was die Existenz einer Lösung anlangt, bewiesen, wenn man die folgenden in den Abschnitten 4 bis 11 zu beweisenden Sätze heranzieht:

Satz 2. *Bei beliebig vorgegebenen auf S stetigen Funktionen ϱ, σ, τ hat das Problem* (62), (63) *in R stets eine Lösung.*

Satz 3. *Besitzen die Funktionen ϱ, σ, τ auf S überdies partielle Ableitungen erster Ordnung, die einer gleichmäßigen H-Bedingung genügen, so sind die nach Satz 2 existierenden Lösungsfunktionen in $R + S$ einmal stetig partiell differenzierbar.*

Der Nachweis für die im Hauptsatz I behauptete Einzigkeit der Lösung bleibt einem besonderen Abschnitt vorbehalten, wo sie sogar unter allgemeineren Voraussetzungen aufgezeigt werden wird.

2. Dem Beweise des Satzes 1 schicken wir einen Hilfssatz voraus, der auch für die folgenden Schlüsse benötigt wird: *Genügt die Berandung S des einfach zusammenhängenden, ganz im Endlichen gelegenen Gebiet R den in* § 1 *genannten Voraussetzungen, so kann man eine unendliche Folge von ganz in R gelegenen, denselben Voraussetzungen genügenden, gegen S konvergierenden Flächen S_n konstruieren, die die Eigenschaft besitzen, daß für eine Folge von integrablen und gleichmäßig beschränkten Funktionen $f_n(p)$, die resp. auf S_n definiert sind, und die für $n \to \infty$ gegen eine auf S definierte integrable Funktion $f(p)$ konvergieren, die Limesrelation*

$$\lim_{n \to \infty} \iint_{(S_n)} f_n(p)\, d\sigma = \iint_{(S)} f(p)\, d\sigma$$

gilt.

Beweis. Die zu $R + S$ gehörige Greensche Funktion, die auf S verschwindet und in einem Punkte P von R einen Pol aufweist, werde mit G bezeichnet. Die Funktion G besitzt bei den getroffenen Regularitätsvoraussetzungen über S nach Sätzen von SCHAUDER[28]) und KELLOG[29]) in dem abgeschlossenen Bereich $R + S$ mit Ausnahme des Punktes P stetige partielle Ableitungen erster Ordnung. Für die Normalableitung $\left[\frac{\partial G}{\partial n}\right]_S$ muß, wie von L. LICHTENSTEIN[30]) bewiesen wurde,

$$\left[\frac{\partial G}{\partial n}\right]_S \neq 0$$

sein. Ist p ein beliebiger Punkt auf S, so bezeichne man mit Z_{ϱ_1} das Innere eines Kreiszylinders, dessen Grundkreisfläche den Radius ϱ_1 besitzt, der die Höhe $2\,\varrho_1$ hat, dessen Mittelpunkt mit p zusammenfällt und dessen Achse mit der Normale n_p im Punkte p identisch ist. Man kann dann sicher den Radius ϱ_1 so klein wählen, daß erstens ϱ_1 kleiner als ϱ_0 ist, wobei ϱ_0 die in der Einleitung angegebene Bedeutung hat, daß zweitens in der Durchschnittsmenge von $R + S$ und Z_{ϱ_1}

$$\frac{\partial G}{\partial n_p} \neq 0$$

ist, und daß drittens Z_{ϱ_1} den Punkt P nicht enthält. Versteht man weiter unter B den Bereich, der alle Punkte von R enthält, deren Entfernung von S größer oder gleich als $\delta > 0$ sei, wobei $\delta < \varrho_1$ ist, so wird die Funktion G in B ein positives Minimum M annehmen.

Es soll nun gezeigt werden, daß die durch

$$G = \frac{M}{n} \quad (n = \text{ganze Zahl} \geqq 2)$$

gegebenen Äquipotentialflächen eine Flächenschar S_n mit den gewünschten Eigenschaften ergeben.

Jeder Punkt des Bereiches B_1, der aus allen Punkten von $R + S$ besteht, deren Entfernung von S kleiner oder gleich δ ist, gehört nun einem Zylinder Z_{ϱ_1} an. Nach dem HEINE-BORELschen Überdeckungssatz läßt sich dann B_1 bereits mit endlich vielen Z_{ϱ_1} überdecken. Da jeder Punkt der Fläche S_n $(n \geqq 2)$ von S um weniger als δ entfernt ist, so gehört jede solche Fläche ganz dem Bereich B_1 an und wird also ebenfalls von den endlich vielen Zylindern Z_{ϱ_1} überdeckt.

Ist p der Mittelpunkt eines von diesen Zylindern, so wähle man in p das Tangential-Normalkoordinatensystem x, y, z. Enthält dieser Zylinder das

---

[28]) J. SCHAUDER, l. c., Anm. [14]).

[29]) O. D. KELLOG, l. c., Anm. [15]).

[30]) L. LICHTENSTEIN, Über eine Eigenschaft der klassischen GREENschen Funktion. Math. Zeitschr. 11 (1921), S. 319—320.

Flächenstück F_n von S_n, und ist (x_0, y_0, z_0) ein beliebiger darauf gelegener Punkt, so kann F_n nach dem Satz über implizite Funktionen in einer gewissen Umgebung dieses Punktes eindeutig und analytisch in der Form

$$z = \varphi_n(x, y)$$

dargestellt werden, da ja

$$\frac{\partial G(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} \neq 0$$

ist. Diese eindeutige Darstellung läßt sich aber auf das ganze Flächenstück F_n ausdehnen, denn wäre für zwei beliebige Punkte (x_0, y_0, z_0) und $(x_0, y_0, z_0 + l)$ von R, die gleichzeitig Z_{ϱ_1} angehören,

$$G(x_0, y_0, z_0) = G(x_0, y_0, z_0 + l),$$

so müßte nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$$l \frac{\partial G(x_0, y_0, z_0 + \vartheta l)}{\partial z} = 0 \qquad (0 < \vartheta < 1)$$

sein, wenn man noch beachtet, daß wegen der eindeutigen und stetigen Darstellbarkeit des Z_{ϱ_1} angehörenden Flächenstückes F von S in der Form

$$z = \varphi(x, y)$$

mit (x_0, y_0, z_0) und $(x_0, y_0, z_0 + l)$ auch alle Punkte $(x_0, y_0, z_0 + \vartheta l)$ für $0 < \vartheta < 1$ dem Gebiet $Z_{\varrho_1} \cdot R$ angehören.

Da aber

$$\frac{\partial G(x_0, y_0, z_0 + \vartheta l)}{\partial z} \neq 0$$

ist, so folgt notwendig

$$l = 0.$$

Man überlegt sich weiterhin, daß jede Fläche S_n die Berandung eines einfach zusammenhängenden Gebietes ist[31]).

Bezeichnet man die Projektion von F_n bzw. F auf die x-y-Ebene mit $\overline{F}_n$ bzw. $\overline{F}$, so wird zunächst

$$\iint_{(F_n)} f_n(p)\, d\sigma = \iint_{(\overline{F}_n)} f_n(x, y) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy.$$

Da hier die Ableitungen

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial x} = - \frac{\dfrac{\partial G(x, y, \varphi_n(x, y))}{\partial x}}{\dfrac{\partial G(x, y, \varphi_n(x, y))}{\partial z}}, \qquad \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} = - \frac{\dfrac{\partial G(x, y, \varphi_n(x, y))}{\partial y}}{\dfrac{\partial G(x, y, \varphi_n(x, y))}{\partial z}}$$

[31]) Vgl. hierzu O. D. KELLOG, l. c., Anm. [27]), insbes. S. 238—239.

für alle n ($n \geqq 2$) gleichmäßig beschränkt sind, und

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x, y) = \varphi(x, y),$$
$$\lim_{n\to\infty} \overline{F_n} = \overline{F}$$

ist, so folgt nach dem Satz von ARZÈLA-LEBESGUE

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{(F_n)} f_n(p)\, d\sigma = \iint_{(F)} f(p)\, d\sigma.$$

Beachtet man schließlich, daß die Flächen S und S_n durch die endlich vielen überdeckenden Zylinder Z_{ϱ_1} in endlich viele Stücke zerlegt werden, deren Randkurven stückweise stetige Tangenten besitzen[32]), und deren jedes auch, wenn es mehreren Z_{ϱ_1} gleichzeitig angehört, jeweils nur einem dieser Zylinder zugeordnet sei, so folgt durch Summation, wie behauptet,

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{(S_n)} f_n(p)\, d\sigma = \iint_{(S)} f(p)\, d\sigma.$$

3. Man bilde nun, um den Satz 1 zu beweisen, mit Hilfe der in $R+S$ einmal stetig partiell differenzierbaren Lösungsfunktionen u, v, w des Problems (62), (63) und der gegebenen in R zweimal stetig differenzierbaren Funktion Φ die neuen Funktionen

$$\text{(64)} \qquad \bar{u} = u - \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}, \quad \bar{v} = v - \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}, \quad \bar{w} = w - \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta},$$

für die offenbar

$$\text{(65)} \qquad [\bar{u}]_S = 0, \quad [\bar{v}]_S = 0, \quad [\bar{w}]_S = 0$$

ist.

Da alsdann

$$\text{(66)} \qquad \begin{gathered} w_1 = \frac{\partial \bar{w}}{\partial \eta} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \zeta} = \frac{\partial w}{\partial \eta} - \frac{\partial v}{\partial \zeta}, \quad w_2 = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \zeta} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial \zeta} - \frac{\partial w}{\partial \xi}, \\ w_3 = \frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{gathered}$$

sein muß, so folgt aus (62)

$$\text{(67)} \qquad \frac{\partial w_2}{\partial \zeta} - \frac{\partial w_3}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial w_3}{\partial \xi} - \frac{\partial w_1}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial w_1}{\partial \eta} - \frac{\partial w_2}{\partial \zeta} = 0.$$

---

[32]) Vgl. hierzu O. D. KELLOG, l. c., Anm. [27]), insbes. S. 97—107.

Auf den von den im zweiten Abschnitt konstruierten Flächen S_n begrenzten Bereich $R_n + S_n$ wende man den GAUSSschen Integralsatz in der Form

$$\iiint\limits_{(R_n)} \left\{\bar u\left(\frac{\partial w_2}{\partial\zeta} - \frac{\partial w_3}{\partial\eta}\right) + \bar v\left(\frac{\partial w_3}{\partial\xi} - \frac{\partial w_1}{\partial\zeta}\right) + \bar w\left(\frac{\partial w_1}{\partial\eta} - \frac{\partial w_2}{\partial\xi}\right)\right\} d\tau$$

$$\text{(68)} \quad = \iiint\limits_{(R_n)} \{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2\} d\tau + \iint\limits_{(S_n)} \{\bar u\,(w_2 \cos(n_{p'}, \zeta) - w_3 \cos(n_{p'}, \eta))$$

$$+ \bar v\,(w_2 \cos(n_{p'}, \xi) - w_1 \cos(n_{p'}, \zeta)) + \bar w\,(w_1 \cos(n_{p'}, \eta) - w_2 \cos(n_{p'}, \xi))\} d\sigma$$

an. Da bei Beachtung von (67) die linke Seite von (68) und wegen (65) auch der Limes des rechts stehenden Oberflächenintegrals für $n \to \infty$ auf Grund des im zweiten Abschnitt bewiesenen Hilfssatzes verschwindet, so folgt aus der damit resultierenden Relation

$$\iiint\limits_{(R)} \{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2\} d\tau = 0,$$

daß die Funktionen w_1, w_2 und w_3 in R identisch verschwinden. Gemäß (66) existiert aber alsdann in R tatsächlich eine Funktion $U(\xi, \eta, \zeta)$ derart, daß

$$u = \frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad v = \frac{\partial U}{\partial \eta}, \quad w = \frac{\partial U}{\partial \zeta}$$

ist, wobei nach (62) und (63)

$$\Delta\Delta U \equiv 0 \text{ in } R$$

und

$$\left[\frac{\partial U}{\partial \xi}\right]_S = \varrho, \quad \left[\frac{\partial U}{\partial \eta}\right]_S = \sigma, \quad \left[\frac{\partial U}{\partial \zeta}\right]_S = \tau$$

wird.

4. Bei dem Beweis des Satzes 2, zu dem wir nunmehr in den Abschnitten 4 bis 6 übergehen, benutzen wir ein von LAURICELLA[33]) ausgebautes elegantes Schlußverfahren FREDHOLMS[34]).

Neben der Problemstellung (62), (63) betrachte man zugleich die bereits im § 3, Abschnitt 1 herangezogenen Differentialgleichungen

$$\text{(69)} \quad \Delta u + k\frac{\partial\vartheta}{\partial\xi} = 0, \quad \Delta v + k\frac{\partial\vartheta}{\partial\eta} = 0, \quad \Delta w + k\frac{\partial\vartheta}{\partial\zeta} = 0, \quad \Delta\vartheta = 0$$

und Randbedingungen

$$\text{(70)} \qquad [u]_S = \varrho, \quad [v]_S = \sigma, \quad [w]_S = \tau$$

mit k als Parameter, wie sie beim Hauptproblem der Elastizitätstheorie auftreten.

---

33) G. LAURICELLA, l. c., Anm. [12]).

34) J. FREDHOLM, l. c., Anm. [13]).

Mit den abkürzenden Bezeichnungen

$$
(71)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\varkappa = \frac{k}{2+k},\\
&K_{\xi\xi}(P,p;\varkappa) = \frac{2}{2+k}\,\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p} + \frac{3k}{2+k}\left(\frac{\partial r_{pP}}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p}\\
&\qquad = \frac{\cos(r_{pP}, n_p)}{r_{pP}^2} + \varkappa\{3\cos^2(r_{pP},\xi) - 1\}\frac{\cos(r_{pP}, n_p)}{r_{pP}^2},\\
&K_{\xi\eta}(P,p;\varkappa) = \frac{3k}{2+k}\,\frac{\partial r_{pP}}{\partial\xi}\,\frac{\partial r_{pP}}{\partial\eta}\,\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p}\\
&\qquad = 3\varkappa\,\frac{\cos(r_{pP},\xi)\cos(r_{pP},\eta)\cos(r_{pP},n_p)}{r_{pP}^2},\\
&K_{\xi\zeta}(P,p;\varkappa) = \frac{3k}{2+k}\,\frac{\partial r_{pP}}{\partial\xi}\,\frac{\partial r_{pP}}{\partial\zeta}\,\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p}\\
&\qquad = 3\varkappa\,\frac{\cos(r_{pP},\xi)\cos(r_{pP},\zeta)\cos(r_{pP},n_p)}{r_{pP}^2},\\
&K_{\eta\xi}(P,p;\varkappa) = K_{\xi\eta}(P,p;\varkappa),\\
&K_{\eta\eta}(P,p;\varkappa) = \frac{2k}{2+k}\,\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p} + \frac{3k}{2+k}\left(\frac{\partial r_{pP}}{\partial \eta}\right)^2 \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p}\\
&\qquad = \frac{\cos(r_{pP}, n_p)}{r_{pP}^2} + \varkappa\{3\cos^2(r_{pP},\eta) - 1\}\frac{\cos(r_{pP}, n_p)}{r_{pP}^2},\\
&K_{\eta\zeta}(P,p;\varkappa) = \frac{3k}{2+k}\,\frac{\partial r_{pP}}{\partial\eta}\,\frac{\partial r_{pP}}{\partial\zeta}\,\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p}\\
&\qquad = 3\varkappa\,\frac{\cos(r_{pP},\eta)\cos(r_{pP},\zeta)\cos(r_{pP},n_p)}{r_{pP}^2},\\
&K_{\zeta\xi}(P,p;\varkappa) = K_{\xi\zeta}(P,p;\varkappa),\quad K_{\zeta\eta}(P,p;\varkappa) = K_{\eta\zeta}(P,p;\varkappa),\\
&K_{\zeta\zeta}(P,p;\varkappa) = \frac{2}{2+k}\,\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p} + \frac{3k}{2+k}\left(\frac{\partial r_{pP}}{\partial \zeta}\right)^2 \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p}\\
&\qquad = \frac{\cos(r_{pP}, n_p)}{r_{pP}^2} + \varkappa\{3\cos^2(r_{pP},\zeta) - 1\}\frac{\cos(r_{pP}, n_p)}{r_{pP}^2}
\end{aligned}
\right.
$$

werde zunächst das System der inhomogenen linearen Integralgleichungen zur Bestimmung der unbekannten Funktionen $f(p;\varkappa)$, $g(p;\varkappa)$ und $h(p;\varkappa)$

$$
(72)\quad
\begin{aligned}
f(p;\varkappa) + \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(S)} \{K_{\xi\xi}(p,p';\varkappa)\, f(p';\varkappa) + K_{\xi\eta}(p,p';\varkappa)\, g(p';\varkappa) + \\
+ K_{\xi\zeta}(p,p';\varkappa)\, h(p';\varkappa)\}\, d\sigma = \varrho(p), \\
g(p;\varkappa) + \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(S)} \{K_{\eta\xi}(p,p';\varkappa)\, f(p';\varkappa) + K_{\eta\eta}(p,p';\varkappa)\, g(p';\varkappa) + \\
+ K_{\eta\zeta}(p,p';\varkappa)\, h(p';\varkappa)\}\, d\sigma = \sigma(p), \\
h(p;\varkappa) + \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(S)} \{K_{\zeta\xi}(p,p';\varkappa)\, f(p';\varkappa) + K_{\zeta\eta}(p,p';\varkappa)\, g(p';\varkappa) + \\
+ K_{\zeta\zeta}(p,p';\varkappa)\, h(p';\varkappa)\}\, d\sigma = \tau(p),
\end{aligned}
$$

untersucht, wobei wir annehmen, daß $k \neq -2$ ist, und daß die inhomogenen Bestandteile ϱ, σ, τ auf S stetige Funktionen sind.

Ein solches System läßt sich stets auf eine einzige Integralgleichung zurückführen. Man wähle dazu statt des Integrationsgebietes S eine aus drei Exemplaren von S bestehende Fläche $\mathfrak{S}$, die um sie voneinander unterscheiden zu können, mit $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, $S^{(3)}$ bezeichnet seien. Ein Punkt p soll $\mathfrak{S}$ angehören, wenn er auf einer der Flächen $S^{(\mu)}$ $(\mu = 1, 2, 3)$ liegt. Unter Benutzung der für den Augenblick gebrauchten neuen Bezeichnungen

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3 \quad \text{statt} \quad \xi\ \eta,\ \zeta,$$

$$f_1(p;\varkappa),\ f_2(p;\varkappa),\ f_3(p;\varkappa) \quad \text{statt} \quad f(p;\varkappa),\ g(p;\varkappa),\ h(p;\varkappa)$$

und

$$\varrho_1(p),\ \varrho_2(p),\ \varrho_3(p) \quad \text{statt} \quad \varrho(p),\ \sigma(p),\ \tau(p)$$

definiere man auf $\mathfrak{S}$ die beiden Funktionen

$$f^*(p;\varkappa) = f_\mu(p;\varkappa), \qquad \text{falls } p \text{ auf } S^{(\mu)} \text{ liegt } (\mu = 1,\ 2,\ 3)$$

und

$$\varrho^*(p) = \varrho_\mu(p), \qquad \text{falls } p \text{ auf } S^{(\mu)} \text{ liegt } (\mu = 1,\ 2,\ 3)$$

und außerdem eine Funktion $K(p, q; \varkappa)$ der beiden auf $\mathfrak{S}$ variierenden Veränderlichen p und q durch

$$K(p,q;\varkappa) = K_{\xi_\mu \xi_\nu}(p,q;\varkappa), \text{ falls } p \text{ auf } S^{(\mu)} \text{ und } q \text{ auf } S^{(\nu)} \text{ liegt.}$$

Das System (72) kann alsdann durch die einzige Integralgleichung

$$(73)\qquad f^*(p;\varkappa) + \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(\mathfrak{S})} K(p,p';\varkappa)\, f^*(p';\varkappa)\, d\sigma = \varrho^*(p)$$

ersetzt werden, wenn man unter dem auf der linken Seite stehenden Integral naturgemäß

$$\iint\limits_{(\mathfrak{S})} \cdots d\sigma = \iint\limits_{(S^{(1)})} \cdots d\sigma + \iint\limits_{(S^{(2)})} \cdots d\sigma + \iint\limits_{(S^{(3)})} \cdots d\sigma$$

versteht.

Da die Kerne des Integralgleichungssystems (72) wegen (9) für $p' = p$ wie $\frac{1}{r_{p'p}^{2-\lambda}}$ unendlich werden, so erkennt man genau wie in der Potentialtheorie durch Übergang zu den iterierten Kernen, daß man auf (73) die Fredholmsche Theorie anwenden kann. Ist die natürliche Zahl m hinreichend groß, so erweisen sich die m-ten iterierten Kerne als auf S stetige Funktionen[35]). Wir können für m insbesondere eine ungerade Zahl wählen.

Wir behaupten nunmehr, daß die Fredholmsche Nennerdeterminante $D^{(m)}(\varkappa)$, die in üblicher Weise mit Hilfe der m-ten iterierten Kerne gebildet wird, für $\varkappa = 0$ nicht verschwinden kann, so daß die ganze transzendente Funktion $D^{(m)}(\varkappa)$ sicherlich nicht identisch verschwindet. Da nämlich für $\varrho, \sigma, \tau \equiv 0, 0, 0$ und $\varkappa = 0$ (d. h. $k = 0$) das System (72) in das System der homogenen Integralgleichungen

$$f(p) + \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{(S)} \frac{\cos(r_{p'p}, n_{p'})}{r_{p'p}^2} f(p')\, d\sigma = 0,$$

$$g(p) + \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{(S)} \frac{\cos(r_{p'p}, n_{p'})}{r_{p'p}^2} g(p')\, d\sigma = 0,$$

$$h(p) + \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{(S)} \frac{\cos(r_{p'p}, n_{p'})}{r_{p'p}^2} h(p')\, d\sigma = 0$$

übergeht, so hätte für $D^{(m)}(0) = 0$ die aus einer solchen homogenen Integralgleichung durch m-fache Iteration hervorgehende Integralgleichung eine nicht identisch verschwindende Lösung. Dann muß es aber eine m-te Einheitswurzel ε_μ ($\varepsilon_\mu^m = 1$) und eine nicht identisch verschwindende Funktion $f_1(p)$ derart geben, daß

$$f_1(p) + \frac{\varepsilon_\mu}{2\pi} \iint\limits_{(S)} \frac{\cos(r_{p'p}, n_{p'})}{r_{p'p}^2} f_1(p')\, d\sigma = 0$$

ist[36]), woraus wieder die Existenz einer nicht identisch verschwindenden Funktion $f_2(p)$ folgt, die der Integralgleichung

$$f_2(p) + \frac{\varepsilon_\mu}{2\pi} \iint\limits_{(S)} \frac{\cos(r_{p'p}, n_{p})}{r_{p'p}^2} f_2(p')\, d\sigma = 0$$

genügt.

---

[35]) Vgl. hierzu E. Goursat, Cours d'analyse III, 3. Aufl., Paris 1923, insbes. S. 362—364 und O. D. Kellog, l. c., Anm. [27]), insbes. S. 299—309.

[36]) Vgl. etwa A. Kneser, Die Integralgleichungen und ihre Anwendungen in der mathematischen Physik. Braunschweig 1911. Insbes. S. 213—214.

Für diese Integralgleichung kann man aber unter Benutzung von Sätzen über Potentiale der einfachen Schicht, wie sie bei unseren Voraussetzungen über die Berandung S von SCHAUDER[37]) bewiesen wurden, mit Schlußweisen, die im Rahmen der Potentialtheorie geläufig sind, im Gegensatz zu dem eben Festgestellten zeigen, daß sie weder für $\varepsilon_\mu = 1$ noch für eine beliebige komplexe m-te Einheitswurzel ε_μ eine nichttriviale Lösung besitzen kann[38]), so daß tatsächlich $D^{(m)}(0) \neq 0$ sein muß.

Ist $\varkappa$ keine Nullstelle von $D^{(m)}(\varkappa)$, so lautet unter Benutzung der für nichtbeschränkte Kerne, deren m-te Iterierte stetig sind, gültigen Form der Resolvente[39]) die eindeutig bestimmte Lösung von (72)

$$(74)\qquad f(p;\varkappa) = \frac{F(p;\varkappa)}{D^{(m)}(\varkappa)}, \quad g(p;\varkappa) = \frac{G(p;\varkappa)}{D^{(m)}(\varkappa)}, \quad h(p;\varkappa) = \frac{H(p;\varkappa)}{D^{(m)}(\varkappa)},$$

wobei die in $\varkappa$ ganzen transzendenten und in p stetigen Funktionen F, G, H den Integralgleichungen

$$(75)\qquad \begin{aligned} F(p;\varkappa) + \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)} \{K_{\xi\xi}(p,p';\varkappa)\,F(p';\varkappa) + K_{\xi\eta}(p,p';\varkappa)\,G(p';\varkappa) + \\ + K_{\xi\zeta}(p,p';\varkappa)\,H(p';\varkappa)\}\,d\sigma = D^{(m)}(\varkappa)\,\varrho(p), \\ G(p;\varkappa) + \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)} \{K_{\eta\xi}(p,p';\varkappa)\,F(p';\varkappa) + K_{\eta\eta}(p,p';\varkappa)\,G(p';\varkappa) + \\ + K_{\eta\zeta}(p,p';\varkappa)\,H(p';\varkappa)\}\,d\sigma = D^{(m)}(\varkappa)\,\sigma(p), \\ H(p;\varkappa) + \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)} \{K_{\zeta\xi}(p,p';\varkappa)\,F(p';\varkappa) + K_{\zeta\eta}(p,p';\varkappa)\,G(p';\varkappa) + \\ + K_{\zeta\zeta}(p,p';\varkappa)\,H(p';\varkappa)\}\,d\sigma = D^{(m)}(\varkappa)\,\tau(p) \end{aligned}$$

genügen.

Man kann sich nun davon überzeugen, daß die mit Hilfe von F, G, H für die Punkte $P = (\xi, \eta, \zeta)$ von R gebildeten Funktionen

$$(76)\qquad \begin{aligned} u^*(P;\varkappa) = \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)} \{K_{\xi\xi}(P,p';\varkappa)\,F(p';\varkappa) + K_{\xi\eta}(P,p';\varkappa)\,G(p';\varkappa) + \\ + K_{\xi\zeta}(P,p';\varkappa)\,H(p';\varkappa)\}\,d\sigma, \\ v^*(P;\varkappa) = \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)} \{K_{\eta\xi}(P,p';\varkappa)\,F(p';\varkappa) + K_{\eta\eta}(P,p';\varkappa)\,G(p';\varkappa) + \\ + K_{\eta\zeta}(P,p';\varkappa)\,H(p';\varkappa)\}\,d\sigma, \\ w^*(P;\varkappa) = \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)} \{K_{\zeta\xi}(P,p';\varkappa)\,F(p';\varkappa) + K_{\zeta\eta}(P,p';\varkappa)\,G(p';\varkappa) + \\ + K_{\zeta\zeta}(P,p';\varkappa)\,H(p;\varkappa)\}\,d\sigma \end{aligned}$$

[37]) J. SCHAUDER, l. c., Anm. [14]), insbes. S. 635—640.

[38]) Vgl. hierzu A. KNESER, l. c., Anm. [36]), insbes. S. 203—204 und S. 219—222 und O. D. KELLOG, l. c., Anm. [27]), insbes. S. 309—310.

[39]) Vgl. etwa E. GOURSAT, l. c., Anm. [35]), insbes. S. 382—384.

in R den Gleichungen

$$(77)\quad \begin{gathered} \Delta u^* + k \frac{\partial \vartheta^*}{\partial \xi} = 0, \quad \Delta v^* + k \frac{\partial \vartheta^*}{\partial \eta} = 0, \quad \Delta w^* + k \frac{\partial \vartheta^*}{\partial \zeta} = 0, \\ \vartheta^* = \frac{\partial u^*}{\partial \xi} + \frac{\partial v^*}{\partial \eta} + \frac{\partial w^*}{\partial \zeta} \end{gathered}$$

genügen und auf S wegen (39), (41) und wegen der bekannten Sprungrelationen für das Potential der Doppelschicht gemäß (75) die Randwerte

$$(78)\qquad [u^*]_S = D^{(m)}(\varkappa)\,\varrho, \quad [v^*]_S = D^{(m)}(\varkappa)\,\sigma, \quad [w^*]_S = D^{(m)}(\varkappa)\,\tau$$

annehmen. Mit den Funktionen

$$u_1 = (1+k)\frac{1}{r_{pP}} - \frac{k}{2}\frac{\partial^2 r_{pP}}{\partial \xi^2}, \quad v_1 = -\frac{k}{2}\frac{\partial^2 r_{pP}}{\partial \xi\, \partial \eta}, \quad w_1 = -\frac{k}{2}\frac{\partial^2 r_{pP}}{\partial \xi\, \partial \zeta}$$

bilden nämlich auch folgende Funktionen ein Lösungstripel von (77):

$$\begin{aligned} u_1' = \frac{\partial u_1}{\partial n_p} &= (1+k)\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p} - \frac{k}{2}\left\{\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p} - 2\frac{\xi-\xi_p}{r_{pP}^3}\frac{\partial \xi}{\partial n_p} - 3\frac{(\xi-\xi_p)^2}{r_{pP}^2}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p}\right\} \\ &= \left(1+\frac{k}{2}\right)\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p} - k\,\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial n_p} + \frac{3k}{2}\left(\frac{\partial r_{pP}}{\partial \xi}\right)^2\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_1' = \frac{\partial v_1}{\partial n_p} &= -\frac{k}{2}\left\{-\frac{\xi-\xi_p}{r_{pP}^3}\frac{\partial \eta}{\partial n_p} - \frac{\eta-\eta_p}{r_{pP}^3}\frac{\partial \xi}{\partial n_p} - 3\frac{\xi-\xi_p}{r_{pP}}\frac{\eta-\eta_p}{r_{pP}}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p}\right\} \\ &= -\frac{k}{2}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial \xi}\frac{\partial \eta}{\partial n_p} - \frac{k}{2}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial n_p} + \frac{3k}{2}\frac{\partial r_{pP}}{\partial \xi}\frac{\partial r_{pP}}{\partial \eta}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_1' = \frac{\partial w_1}{\partial n_p} &= -\frac{k}{2}\left\{-\frac{\xi-\xi_p}{r_{pP}^3}\frac{\partial \zeta}{\partial n_p} - \frac{\zeta-\zeta_p}{r_{pP}^3}\frac{\partial \xi}{\partial n_p} - 3\frac{\xi-\xi_p}{r_{pP}}\frac{\zeta-\zeta_p}{r_{pP}}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p}\right\} \\ &= -\frac{k}{2}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial \xi}\frac{\partial \zeta}{\partial n_p} - \frac{k}{2}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial \zeta}\frac{\partial \xi}{\partial n_p} + \frac{3k}{2}\frac{\partial r_{pP}}{\partial \xi}\frac{\partial r_{pP}}{\partial \zeta}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p} \end{aligned}$$

und zugleich mit

$$u_2 = \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial \xi}, \quad v_2 = \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial \eta}, \quad w_2 = \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial \zeta}$$

ist das auch für die Funktionen

$$u_2' = \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial n_p}, \quad v_2' = \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial n_p}, \quad w_2' = \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial \zeta}\frac{\partial \xi}{\partial n_p}$$

der Fall. Da auch die Funktionen

$$u_3 = \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p} - \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial n_p}, \quad v_3 = -\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial \xi}\frac{\partial \eta}{\partial n_p}, \quad w_3 = -\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial n_p}$$

ein Lösungssystem darstellen, so gilt das schließlich, wie behauptet, für die Funktionen

$$\begin{aligned}
&u_1' + \frac{k}{2}u_2' - \frac{k}{2}u_3 = \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p} + \frac{3k}{2}\left(\frac{\partial r_{pP}}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p},\\
(79)\qquad &v_1' + \frac{k}{2}v_2' - \frac{k}{2}v_3 = \frac{3k}{2}\frac{\partial r_{pP}}{\partial \xi}\frac{\partial r_{pP}}{\partial \eta}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p},\\
&w_1' + \frac{k}{2}w_2' - \frac{k}{2}w_3 = \frac{3k}{2}\frac{\partial r_{pP}}{\partial \xi}\frac{\partial r_{pP}}{\partial \zeta}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p}.
\end{aligned}$$

Die restlichen Relationen ergeben sich durch zyklische Vertauschung.

Für die durch (76) gegebene Lösung ist

$$\begin{aligned}
\vartheta^* &= \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(S)}\frac{2}{2+k}\left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}F(p';\varkappa) + \frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}G(p';\varkappa) + \right.\\
&\qquad\qquad\left. + \frac{\partial}{\partial \zeta}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}H(p';\varkappa)\right\}d\sigma\\
(80)\qquad\\
&= \frac{1-\varkappa}{2\pi}\iint\limits_{(S)}\left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}F(p';\varkappa) + \frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}G(p';\varkappa) + \right.\\
&\qquad\qquad\left. + \frac{\partial}{\partial \zeta}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}H(p';\varkappa)\right\}d\sigma.
\end{aligned}$$

5. Innerhalb von R sind u^*, v^*, w^* beliebig oft nach ξ, η, ζ, $\varkappa$ differenzierbar, so daß die Reihenfolge von aufeinanderfolgenden Differentiationen vertauscht werden kann. Durch i-malige Differentiation von (77) nach $\varkappa$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\Delta\frac{\partial^i u^*}{\partial \varkappa^i} + k\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial^i \vartheta^*}{\partial \varkappa^i} + i\,\frac{(2+k)^2}{2}\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial^{i-1}\vartheta^*}{\partial \varkappa^{i-1}} + \cdots = 0,\\
&\Delta\frac{\partial^i v^*}{\partial \varkappa^i} + k\frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\partial^i \vartheta^*}{\partial \varkappa^i} + i\,\frac{(2+k)^2}{2}\frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\partial^{i-1}\vartheta^*}{\partial \varkappa^{i-1}} + \cdots = 0,\\
(81)\qquad\\
&\Delta\frac{\partial^i w^*}{\partial \varkappa^i} + k\frac{\partial}{\partial \zeta}\frac{\partial^i \vartheta^*}{\partial \varkappa^i} + i\,\frac{(2+k)^2}{2}\frac{\partial}{\partial \zeta}\frac{\partial^{i-1}\vartheta^*}{\partial \varkappa^{i-1}} + \cdots = 0,\\
&\Delta\frac{\partial^i \vartheta^*}{\partial \varkappa^i} = 0,
\end{aligned}$$

wobei durch die Punkte Glieder gekennzeichnet sind, die Ableitungen von ϑ^* nach $\varkappa$ von niederer als der $(i-1)$-ten Ordnung enthalten.

Für die Randwerte der i-ten Ableitungen von u^*, v^*, w^* findet man

$$(82)\quad \left[\frac{\partial^i u^*}{\partial \varkappa^i}\right]_S = \frac{d^i D^{(m)}(\varkappa)}{d\varkappa^i}\,\varrho, \qquad \left[\frac{\partial^i v^*}{\partial \varkappa^i}\right]_S = \frac{d^i D^{(m)}(\varkappa)}{d\varkappa^i}\,\sigma, \qquad \left[\frac{\partial^i w^*}{\partial \varkappa^i}\right]_S = \frac{d^i D^{(m)}(\varkappa)}{d\varkappa^i}\,\tau.$$

Denn es ist z. B. innerhalb von R

$$(83)\quad \begin{aligned} \frac{\partial^i u^*(P;\varkappa)}{\partial \varkappa^i} = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(S)} \Bigg\{ &\left(\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}} + \varkappa\left(3\left(\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\right)^2 - 1\right)\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\right)\frac{\partial^i F(p';\varkappa)}{\partial \varkappa^i} + \\ &+ i\left(3\left(\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\right)^2 - 1\right)\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\,\frac{\partial^{i-1} F(p';\varkappa)}{\partial \varkappa^{i-1}} + \\ &+ 3\varkappa\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\,\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \eta}\,\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\,\frac{\partial^i G(p';\varkappa)}{\partial \varkappa^i} + \\ &+ 3i\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\,\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \eta}\,\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\,\frac{\partial^{i-1} G(p';\varkappa)}{\partial \varkappa^{i-1}} + \\ &+ 3\varkappa\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\,\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \zeta}\,\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\,\frac{\partial^i H(p';\varkappa)}{\partial \varkappa^i} + \\ &+ 3i\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\,\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \zeta}\,\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\,\frac{\partial^{i-1} H(p';\varkappa)}{\partial \varkappa^{i-1}}\Bigg\}\,d\sigma, \end{aligned}$$

so daß auf Grund von (39), (40), (41) und (42) und dem Randverhalten des Potentials der Doppelschicht bei Annäherung von P an S

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^i u^*(P;\varkappa)}{\partial \varkappa^i}\right]_S = &\frac{\partial^i F(p;\varkappa)}{\partial \varkappa^i} \\ &+ \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(S)}\Bigg\{K_{\xi\xi}(p,p';\varkappa)\,\frac{\partial^i F(p';\varkappa)}{\partial \varkappa^i} + i\,\frac{\partial K_{\xi\xi}(p,p';\varkappa)}{\partial\varkappa}\,\frac{\partial^{i-1} F(p';\varkappa)}{\partial \varkappa^{i-1}} + \\ &+ K_{\xi\eta}(p,p';\varkappa)\,\frac{\partial^i G(p';\varkappa)}{\partial \varkappa^i} + i\,\frac{\partial K_{\xi\eta}(p,p';\varkappa)}{\partial\varkappa}\,\frac{\partial^{i-1} G(p';\varkappa)}{\partial \varkappa^{i-1}} + \\ &+ K_{\xi\zeta}(p,p';\varkappa)\,\frac{\partial^i H(p';\varkappa)}{\partial \varkappa^i} + i\,\frac{\partial K_{\xi\zeta}(p,p';\varkappa)}{\partial\varkappa}\,\frac{\partial^{i-1} H(p';\varkappa)}{\partial \varkappa^{i-1}}\Bigg\}\,d\sigma \\ = &\frac{\partial^i F(p;\varkappa)}{\partial \varkappa^i} + \frac{1}{2\pi}\,\frac{\partial^i}{\partial\varkappa^i}\iint\limits_{(S)}\{K_{\xi\xi}(p,p';\varkappa)\,F(p';\varkappa) \\ &+ K_{\xi\eta}(p,p';\varkappa)\,G(p';\varkappa) + K_{\xi\zeta}(p,p';\varkappa)\,H(p';\varkappa)\}\,d\sigma = \frac{d^i D^{(m)}(\varkappa)}{d\varkappa^i}\,\varrho(p) \end{aligned}$$

sein muß.

6. Nehmen wir nun an, daß der Wert $\varkappa_0 = -1$ $(k = -1)$ eine $(t+1)$-fache Nullstelle von $D^{(m)}(\varkappa)$ darstellt, so daß

$$(84)\quad D^{(m)}(\varkappa_0) = \frac{d\,D^{(m)}(\varkappa_0)}{d\,\varkappa} = \cdots = \frac{d^t\,D^{(m)}(\varkappa_0)}{d\,\varkappa^t} = 0, \quad \frac{d^{t+1}\,D^{(m)}(\varkappa_0)}{d\,\varkappa^{t+1}} \neq 0$$

ist und also

$$(85)\qquad D^{(m)}(\varkappa) = (\varkappa - \varkappa_0)^{t+1}\,d(\varkappa) \text{ mit } d(\varkappa_0) \neq 0$$

gilt.

Da alsdann (76), (77) und (78)

$$\Delta\,u^*(P;\,-1) - \frac{\partial\,\vartheta^*(P;\,-1)}{\partial\,\xi} = 0, \quad \Delta\,v^*(P;\,-1) - \frac{\partial\,\vartheta^*(P;\,-1)}{\partial\,\eta} = 0,$$
$$\Delta\,w^*(P;\,-1) - \frac{\partial\,\vartheta^*(P;\,-1)}{\partial\,\zeta} = 0$$

und

$$[u^*]_S = 0, \quad [v^*]_S = 0, \quad [w^*]_S = 0$$

ergeben, so behaupten wir, daß in R

$$u^*(P;\,-1) \equiv 0, \quad v^*(P;\,-1) \equiv 0, \quad w^*(P;\,-1) \equiv 0$$

sein muß. Zum Beweise dieser Tatsache zeigen wir zunächst, daß die ersten partiellen Ableitungen von u^*, v^*, w^* bei Annäherung des Punktes P an S existieren und stetig sind.

Auf Grund des Hilfssatzes 2 von § 3 und des entsprechenden von Schauder bewiesenen Satzes über das Potential der Doppelschicht (eine Bemerkung, die auch auf die weiteren von § 3 benutzten Hilfssätze zu übertragen ist) genügen die Funktionen $F(p;\,-1)$, $G(p;\,-1)$, $H(p;\,-1)$ wegen (75) einer H-Bedingung mit dem Flächenexponenten λ. Wir wollen annehmen, was man ohne weiteres tun kann, daß kein Vielfaches von $\lambda = 1$ ist. Dann folgt ebenfalls aus (75) nach dem Hilfssatz 3 von § 3, daß dieselben Funktionen für $2\lambda < 1$ einer H-Bedingung mit dem Exponenten 2λ und für $2\lambda > 1$ einer H-Bedingung mit dem Exponenten 1 genügen. Im Falle $2\lambda < 1$ fahre man so fort. Die betrachteten drei Funktionen genügen also stets einer H-Bedingung mit dem Exponenten 1. Auf Grund der Hilfssätze 4 und 5 von § 3 existieren dann auf S die Tangentialableitungen

$$\frac{\partial\,F(p;\,-1)}{\partial\,t}, \qquad \frac{\partial\,G(p;\,-1)}{\partial\,t}, \qquad \frac{\partial\,H(p;\,-1)}{\partial\,t}$$

und erfüllen eine H-Bedingung mit dem Exponenten $\lambda + \mu - 1 = \varepsilon$, wobei man für μ eine beliebige Zahl mit $0 < \mu < 1$ wählen kann, für die $\lambda + \mu > 1$ ist. Nach dem Hilfssatz 6 desselben Paragraphen genügen dann die drei Tangentialableitungen einer H-Bedingung mit dem Exponenten λ. Die Hilfssätze 9 und 10 zeigen schließlich, daß die ersten partiellen Ableitungen von $u^*(P;\,-1)$, $v^*(P;\,-1)$, $w^*(P;\,-1)$ bei normaler Annäherung an S gegen wohlbestimmte Grenzwerte konvergieren. Da diese Konvergenz gleichmäßig ist, so erkennt man, daß die Ableitungen auch in $R+S$ stetig sind[40]).

Nach Satz 1 gibt es dann eine biharmonische Funktion U^* derart, daß

$$u^*(P;-1) = \frac{\partial U^*}{\partial \xi}, \qquad v^*(P;-1) = \frac{\partial U^*}{\partial \eta} \qquad w^*(P;-1) = \frac{\partial U^*}{\partial \zeta}$$

ist.

Versteht man nun unter S_n eine der Flächen, die im Abschnitt 2 dieses Paragraphen definiert wurde, so kann man auf ihr Inneres R_n eine GREENsche Formel in der Gestalt

$$(86) \qquad \iiint\limits_{(R_n)} (\varDelta U^*)^2\, d\tau = \iint\limits_{(S_n)} \left\{ U^* \frac{\partial \varDelta U^*}{\partial n} - \varDelta U^* \frac{\partial U^*}{\partial n} \right\} d\sigma$$

anwenden. Bildet man hierin den Limes für $n \to \infty$, so geht $\iint\limits_{(S_n)} \varDelta U^* \frac{\partial U^*}{\partial n}\, d\sigma$ gegen Null, da $\varDelta U^*$ beschränkt bleibt, während $\frac{\partial U^*}{\partial n}$ gegen Null konvergiert. Bei dem ersten Bestandteil auf der rechten Seite beachte man aber, daß für alle Punkte P auf S_n, deren Abstand von S mit h bezeichnet sei,

$$|[U^*]_{S_n}| < \tfrac{1}{2} C h^2 \text{ mit } |D^2 U^*| < C \text{ in } R+S$$

sein muß, da U^* mit seinen partiellen Ableitungen erster Ordnung auf S verschwindet, und die Ableitungen zweiter Ordnung in $R+S$ beschränkt sind. Berücksichtigt man aber, daß $\varDelta U^*$ eine in $R+S$ stetige harmonische Funktion ist, so hat man nach einem Satz aus der Potentialtheorie[41]) für alle Punkte P von S_n:

$$\left|\left[\frac{\partial \varDelta U^*}{\partial n}\right]_{S_n}\right| < 3 \cdot \frac{3}{2} C \frac{1}{h},$$

so daß schließlich

$$\left| \iint\limits_{(S_n)} U^* \frac{\partial \varDelta U^*}{\partial n}\, d\sigma \right| < \frac{9}{4} C^2 F_n h_n$$

ist, wenn F_n den Flächeninhalt von S_n und h_n den maximalen Abstand eines auf S_n gelegenen Punktes P_n von S bedeuten.

Da also auch dieser Bestandteil für $n \to \infty$, d. h. $h_n \to 0$ gegen Null geht, so gilt in $R+S$

$$\varDelta U^* \equiv 0$$

und da U^* auf S verschwindet, so muß in $R+S$

$$U^* \equiv 0$$

---

40) Für den Beweis dieser Tatsache sei auf M. SULLIVAN, On the derivatives of Newtonian and logarithmic potentials near the acting masses. Transactions of the Am. math. soc. 34 (1932), S. 137—171, insbes. S. 146—147, verwiesen.

41) Vgl. O. D. KELLOG, l. c., Anm. 27), insbes. S. 227.

und damit auch, wie behauptet,

$$u^*(P; -1) \equiv 0, \quad v^*(P; -1) \equiv 0, \quad w^*(P; -1) \equiv 0$$

sein.

Aus (81) folgt nun für $i = 1$ wegen $\vartheta^*(P; -1) \equiv 0$

$$\Delta \frac{\partial u^*}{\partial \varkappa} + k \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial \vartheta^*}{\partial \varkappa}\right) = 0, \quad \Delta \frac{\partial v^*}{\partial \varkappa} + k \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial \vartheta^*}{\partial \varkappa}\right) = 0,$$

$$\Delta \frac{\partial w^*}{\partial \varkappa} + k \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{\partial \vartheta^*}{\partial \varkappa}\right) = 0$$

während nach (82) und (84)

$$\left[\frac{\partial u^*}{\partial \varkappa}\right]_S = 0, \quad \left[\frac{\partial v^*}{\partial \varkappa}\right]_S = 0, \quad \left[\frac{\partial w^*}{\partial \varkappa}\right]_S = 0$$

ist. Mit derselben Methode, mit der eben das Verschwinden von u^*, v^*, w^* bewiesen wurde, läßt sich dann zeigen, daß in R

$$\frac{\partial u^*(P; -1)}{\partial \varkappa} \equiv 0, \quad \frac{\partial v^*(P; -1)}{\partial \varkappa} \equiv 0, \quad \frac{\partial w^*(P; -1)}{\partial \varkappa} \equiv 0$$

sein muß. Es ist dazu nur nachzuweisen, daß die partiellen Ableitungen der Funktionen

$$\frac{\partial u^*(P; -1)}{\partial \varkappa}, \quad \frac{\partial v^*(P; -1)}{\partial \varkappa}, \quad \frac{\partial w^*(P; -1)}{\partial \varkappa}$$

nach ξ, η, ζ in $R + S$ stetige Funktionen sind, was ohne weiteres gelingt, wenn man beachtet, daß man neben (83) und entsprechenden Gleichungen für $\frac{\partial^i v^*(P; \varkappa)}{\partial \varkappa^i}$ und $\frac{\partial^i w^*(P; \varkappa)}{\partial \varkappa^i}$ für $\frac{\partial^i F(p; \varkappa)}{\partial \varkappa^i}$ die Funktionalrelation

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^i F(p; \varkappa)}{\partial \varkappa^i} &+ \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{(S)} \Bigg\{ \Bigg(\frac{\partial \left(\frac{1}{r_{p'p}}\right)}{\partial n_{p'}} + \varkappa\left(3\left(\frac{\partial r_{p'p}}{\partial \xi}\right)^2 - 1\right) \frac{\partial \left(\frac{1}{r_{p'p}}\right)}{\partial n_{p'}} \Bigg) \frac{\partial^i F(p'; \varkappa)}{\partial \varkappa^i} + \\
&+ i\left(3\left(\frac{\partial r_{p'p}}{\partial \xi}\right)^2 - 1\right) \frac{\partial \left(\frac{1}{r_{p'p}}\right)}{\partial n_{p'}} \frac{\partial^{i-1} F(p'; \varkappa)}{\partial \varkappa^{i-1}} + 3\varkappa \frac{\partial r_{p'p}}{\partial \xi} \frac{\partial r_{p'p}}{\partial \eta} \frac{\partial \left(\frac{1}{r_{p'p}}\right)}{\partial n_{p'}} \frac{\partial^i G(p'; \varkappa)}{\partial \varkappa^i} + \\
&+ 3i \frac{\partial r_{p'p}}{\partial \xi} \frac{\partial r_{p'p}}{\partial \eta} \frac{\partial \left(\frac{1}{r_{p'p}}\right)}{\partial n_{p'}} \frac{\partial^{i-1} G(p'; \varkappa)}{\partial \varkappa^{i-1}} + 3\varkappa \frac{\partial r_{p'p}}{\partial \xi} \frac{\partial r_{p'p}}{\partial \zeta} \frac{\partial \left(\frac{1}{r_{p'p}}\right)}{\partial n_{p'}} \frac{\partial^i H(p'; \varkappa)}{\partial \varkappa^i} + \\
&+ 3i \frac{\partial r_{p'p}}{\partial \xi} \frac{\partial r_{p'p}}{\partial \zeta} \frac{\partial \left(\frac{1}{r_{p'p}}\right)}{\partial n_{p'}} \frac{\partial^{i-1} H(p'; \varkappa)}{\partial \varkappa^{i-1}} \Bigg\} d\sigma = \frac{\partial^i D^{(m)}(\varkappa)}{d\varkappa^i}\, \varrho(p)
\end{aligned}$$

und entsprechende Relationen für $\frac{\partial^i G(p; \varkappa)}{\partial \varkappa^i}$ und $\frac{\partial^i H(p; \varkappa)}{\partial \varkappa^i}$ hat. In dieser Weise erkennt man der Reihe nach für $i = 0, 1, 2, \ldots, t$, daß in R

$$\frac{\partial^i u^*(P; -1)}{\partial \varkappa^i} \equiv 0, \quad \frac{\partial^i v^*(P; -1)}{\partial \varkappa^{i-1}} \equiv 0, \quad \frac{\partial^i w^*(P; -1)}{\partial \varkappa^i} \equiv 0$$

gilt. Daher kann geschrieben werden

$$u^*(P;\varkappa) = (\varkappa+1)^{t+1} u'(P;\varkappa), \quad v^*(P;\varkappa) = (\varkappa+1)^{t+1} v'(P;\varkappa),$$
$$w^*(P;\varkappa) = (\varkappa+1)^{t+1} w'(P;\varkappa).$$

Hierbei besitzen die Funktionen u', v', w' dieselben Differenzierbarkeitseigenschaften wie die Funktionen u^*, v^*, w^* und genügen nach (77), (78) und (85) den Gleichungen

$$\Delta u' + k\frac{\partial \vartheta'}{\partial \xi} = 0, \quad \Delta v' + k\frac{\partial \vartheta'}{\partial \eta} = 0, \quad \Delta w' + k\frac{\partial \vartheta'}{\partial \zeta} = 0,$$
$$\vartheta' = \frac{\partial u'}{\partial \xi} + \frac{\partial v'}{\partial \eta} + \frac{\partial w'}{\partial \zeta},$$
$$[u']_S = d(\varkappa)\varrho, \quad [v']_S = d(\varkappa)\sigma, \quad [w']_S = d(\varkappa)\tau.$$

Daher stellen die Funktionen

$$(87)\quad \begin{gathered} u(P;-1) = \frac{u^*(P;-1)}{D^{(m)}(-1)}, \quad v(P;-1) = \frac{v^*(P;-1)}{D^{(m)}(-1)}, \\ w(P;-1) = \frac{w^*(P;-1)}{D^{(m)}(-1)} \end{gathered}$$

stets bei beliebigen stetigen Randfunktionen ϱ, σ, τ eine Lösung von (62), (63) dar, ganz gleich, ob $D^{(m)}(-1)$ ungleich Null ist oder verschwindet. Damit ist also Satz 2 bewiesen.

7. Als Vorbereitung für den Beweis des im Abschnitt 1 dieses Paragraphen genannten Satzes 3, des ebendort erwähnten Eindeutigkeitssatzes, sowie einiger weiterer Sätze bedürfen wir einiger Hilfssätze, von denen wir zunächst den folgenden beweisen: *Genügen in dem Integralgleichungssystem* (75) *mit* $D^{(m)}(\varkappa) \neq 0$ *die Funktionen* $\varrho(p)$, $\sigma(p)$, $\tau(p)$ *einer H-Bedingung mit dem Exponenten* μ, *so erfüllen auch die Lösungsfunktionen* $F(p;\varkappa)$, $G(p;\varkappa)$, $H(p;\varkappa)$ *eine H-Bedingung mit dem Exponenten* μ.

Beweis[42]). Wir nehmen zunächst an, daß kein Vielfaches von λ gleich 1 ist. Da nach (75) die Lösungsfunktionen stetig sind, so genügen die in diesen Gleichungen auftretenden Integrale nach Hilfssatz 2 von § 3 einer H-Bedingung mit dem Exponenten λ, so daß wiederum nach (75) die Lösungsfunktionen eine H-Bedingung mit dem Exponenten Min (λ, μ) erfüllen. Für $\mu \leqq \lambda$ ist also der Hilfssatz bewiesen. Ist aber $\mu > \lambda$, so genügen die Lösungsfunktionen zunächst einer H-Bedingung mit dem Exponenten λ und demgemäß die Integrale in (75) nach Hilfssatz 3 von § 3 einer H-Bedingung mit dem Exponenten

$$2\lambda, \quad \text{falls} \quad 2\lambda < 1$$
$$1, \quad \text{falls} \quad 2\lambda > 1$$

ist (der Fall $2\lambda = 1$ ist ja ausgeschlossen worden).

---

[42]) Er verläuft wörtlich genau, wie der Beweis des entsprechenden Satzes in der Potentialtheorie bei J. SCHAUDER, l. c., Anm. [14]).

Für $2\lambda > 1$ folgt also aus (75), daß die Lösungsfunktionen einer H-Bedingung mit dem Exponenten μ genügen. Im Falle $2\lambda < 1$ ist die Behauptung ebenso für $\mu \leqq 2\lambda$ erwiesen. Ist aber $\mu > 2\lambda$, so gehe man entsprechend einen Schritt weiter. Man muß nach mindestens n Schritten zum Ziele kommen, wenn n eine ganze Zahl bezeichnet, für die $n \cdot \lambda > 1$ ist.

8. Aus dem eben bewiesenen Hilfssatz ergibt sich unmittelbar der folgende

Hilfssatz: *Genügen die Randfunktionen* $\varrho(p)$, $\sigma(p)$, $\tau(p)$ *einer H-Bedingung mit dem Exponenten* μ, *und ist* $D^{(m)}(\varkappa) \neq 0$, *so erfüllen die gemäß* (75) *und* (76) *dazugehörigen Lösungsfunktionen*

$$u(P;\varkappa) = \frac{u^*(P;\varkappa)}{D^{(m)}(\varkappa)}, \quad v(P;\varkappa) = \frac{v^*(P;\varkappa)}{D^{(m)}(\varkappa)}, \quad w(P;\varkappa) = \frac{w^*(P;\varkappa)}{D^{(m)}(\varkappa)}$$

von (69), (70) *in* $R + S$ *eine H-Bedingung mit demselben Exponenten* μ.

Beweis. Auf Grund des eben bewiesenen Hilfssatzes genügen nämlich die durch (75) gegebenen Belegungsfunktionen $F(p;\varkappa)$, $G(p;\varkappa)$, $H(p;\varkappa)$ einer H-Bedingung mit dem Exponenten μ. Dann folgt aber unmittelbar nach Hilfssatz 11 von § 3, daß die durch (76) gegebenen Funktionen $u^*(P;\varkappa)$, $v^*(P;\varkappa)$, $w^*(P;\varkappa)$ und damit auch die Funktionen $u(P;\varkappa)$, $v(P;\varkappa)$, $w(P;\varkappa)$ in $R + S$ eine H-Bedingung mit dem Exponenten μ erfüllen.

9. Weiter wollen wir den Hilfssatz beweisen: *Genügen die Randfunktionen* $\varrho(p)$, $\sigma(p)$, $\tau(p)$ *einer H-Bedingung mit dem Exponenten* μ, *so erfüllen die durch* (87) *gegebenen Lösungsfunktionen*

$$u(P;-1) = \frac{u^*(P;-1)}{D^{(m)}(-1)}, \quad v(P;-1) = \frac{v^*(P;-1)}{D^{(m)}(-1)},$$

$$w(P;-1) = \frac{w^*(P;-1)}{D^{(m)}(-1)}$$

von (62), (63) *in* $R + S$ *eine H-Bedingung mit dem Exponenten* μ.

Beweis. Für $D^{(m)}(-1) \neq 0$ liegt nur der eben bewiesene Hilfssatz für $\varkappa = -1$ vor. Sei also $D^{(m)}(-1)$ gleich Null. Bezeichnet P einen beliebigen Punkt von R, so ist

$$u(P;\varkappa) = \frac{u^*(P;\varkappa)}{D^{(m)}(\varkappa)}$$

in einer gewissen in der komplexen $\varkappa$-Ebene gelegenen Umgebung von $\varkappa = -1$ analytisch. Als eine solche Umgebung kann gleichmäßig für alle P aus R die Kreisscheibe

$$|\varkappa + 1| < r$$

gewählt werden, bei der r die Entfernung der nächsten an $\varkappa = -1$ gelegenen komplexwertigen Nullstelle von $D^{(m)}(\varkappa)$ ist. Sind P_1 und P_2 zwei beliebige Punkte aus R, so besitzt die Funktion

$$u_{12}(\varkappa) = u(P_1;\varkappa) - u(P_2;\varkappa)$$

dieselbe Regularitätseigenschaft. In der Kreisscheibe

$$|\varkappa + 1| \leqq \varrho = \frac{r}{2}$$

der komplexen $\varkappa$-Ebene ist alsdann die Funktion $u_{12}(\varkappa)$ regulär analytisch und $D^{(m)}(\varkappa)$ verschwindet nur bei $\varkappa = -1$. Es läßt sich also für $u_{12}(-1)$ nach der CAUCHYschen Integralformel

$$u_{12}(-1) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{u_{12}(\varkappa)}{\varkappa + 1} d\varkappa$$

schreiben, wobei das Integral über den Kreis $|\varkappa + 1| = \varrho$ der $\varkappa$-Ebene erstreckt wird. Versteht man unter M das Maximum von $|u_{12}(\varkappa)|$ auf diesem Kreise, so gilt also die Abschätzung

$$|u_{12}(-1)| = |u(P_1; -1) - u(P_2; -1)| \leqq \frac{1}{2\pi} 2\pi\varrho \frac{1}{\varrho} M = M.$$

Dehnt man nunmehr die Überlegungen, die zum Hilfssatz 8 geführt haben, auf die komplexen $\varkappa$-Werte mit $|\varkappa + 1| = \varrho$ aus, für die ja $D^{(m)}(\varkappa) \neq 0$ ist, so muß

$$\operatorname{Max}\{|u(P_1;\varkappa) - u(P_2;\varkappa)|\} \leqq K B r^{\mu}_{P_1 P_1}$$
$$(|\varkappa + 1| = \varrho)$$

sein. Die Konstante B ist hierbei zugleich mit ϱ von der Lage der Punkte P_1, P_2 unabhängig. Aus dem letzten Ergebnis folgt dann aber, wie behauptet,

$$|u(P_1; -1) - u(P_2; -1)| \leqq K B r^{\mu}_{P_1 P_2}.$$

10. Weiter gilt folgender Hilfssatz. *Besitzen in dem Integralgleichungssystem* (75) *mit* $D^{(m)}(\varkappa) \neq 0$ *die Funktionen* $\varrho(p)$, $\sigma(p)$, $\tau(p)$ *Tangentialableitungen, die einer H-Bedingung mit dem Exponenten* $\mu \leqq \lambda$ *genügen, so besitzen die eindeutig bestimmten Lösungsfunktionen* $F(p;\varkappa)$, $G(p;\varkappa)$, $H(p;\varkappa)$ *Tangentialableitungen, die der gleichen H-Bedingung genügen.*

Beweis[43]). Da ϱ, σ, τ Tangentialableitungen besitzen, so erfüllen sie eine H-Bedingung mit einem beliebigen Exponenten $\mu_0 < 1$. Nach dem Hilfssatz 7 dieses Paragraphen genügen dann auch wegen (75) die Funktionen $F(P;\varkappa)$, $G(p;\varkappa)$, $H(p;\varkappa)$ ebenfalls einer H-Bedingung mit dem Exponenten μ_0. Man wähle μ_0 so groß, daß $\mu_0 + \lambda > 1$ ist. Nach Hilfssatz 4 und 5 von § 3 existieren dann die Tangentialableitungen der in (75) vorkommenden Integrale und genügen einer H-Bedingung mit dem Exponenten $\lambda + \mu_0 - 1$. Aus (75) folgt dann aber wieder, daß die Tangentialableitungen von $F(p;\varkappa)$, $G(p;\varkappa)$, $H(p;\varkappa)$ einer H-Bedingung mit dem Exponenten $\varepsilon = \operatorname{Min}(\mu, \lambda + \mu_0 - 1)$ genügen. Nach dem Hilfssatz 6 von § 3 erfüllen dann aber die Tangential-

[43]) Er verläuft wörtlich genau wie der Beweis des entsprechenden Satzes in der Potentialtheorie bei J. SCHAUDER, l. c., Anm. [14]).

ableitungen der Integrale in (75) eine H-Bedingung mit dem Exponenten λ. Damit folgt dann schließlich aus (75), daß $F(p;\varkappa)$, $G(p;\varkappa)$, $H(p;\varkappa)$ Tangentialableitungen besitzen, die einer H-Bedingung mit dem Exponenten $\mu = \mathrm{Min}(\mu, \lambda)$ genügen.

11. Mit dem eben erhaltenen Ergebnis können wir alsdann den im ersten Abschnitt dieses Paragraphen angegebenen Satz 3 beweisen, nach dem die durch (87) gegebenen Lösungsfunktionen

$$u(P;-1) = \frac{u^*(P;-1)}{D^{(m)}(-1)}, \quad v(P;-1) = \frac{v^*(P;-1)}{D^{(m)}(-1)},$$
$$w(P;-1) = \frac{w^*(P;-1)}{D^{(m)}(-1)}$$

von (62), (63) in $R+S$ stetige partielle Ableitungen erster Ordnung haben, falls die Randfunktionen $\varrho(p)$, $\sigma(p)$, $\tau(p)$ partielle Ableitungen erster Ordnung besitzen, die einer gleichmäßigen H-Bedingung genügen.

Da nämlich alsdann die Randfunktionen nach der Bemerkung am Ende von § 1 auch Tangentialableitungen besitzen, die einer gleichmäßigen H-Bedingung genügen, so ist dieser Satz für $D^{(m)}(-1) \neq 0$ eine unmittelbare Folge des Hilfssatzes 10 dieses Paragraphen und der Hilfssätze 9 und 10 von § 3. Schreibt man aber im Falle $D^{(m)}(-1) = 0$ ähnlich wie im Abschnitt 9 dieses Paragraphen,

$$u(P;-1) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{u(P;\varkappa)}{\varkappa+1}\, d\varkappa,$$

wobei das Integral über einen von P unabhängigen Kreis in der komplexen $\varkappa$-Ebene, auf dem $D^{(m)}(\varkappa) \neq 0$ ist, erstreckt wird [und entsprechend für $v(P;-1)$, $w(P;-1)$], so erkennt man auf Grund derselben Hilfssätze, daß auch in diesem Fall die ersten partiellen Ableitungen der angegebenen Lösungsfunktionen in $R+S$ stetig sind.

12. Wir sind nunmehr in der Lage, den bereits im ersten Abschnitt angekündigten Eindeutigkeitssatz unter folgenden allgemeinen Voraussetzungen zu beweisen:

Satz 4. *Werden die Funktionen $\varrho(p)$, $\sigma(p)$, $\tau(p)$ auf S lediglich als stetig vorausgesetzt, so kann es (bis auf eine additive Konstante) höchstens eine in R biharmonische Funktion U geben, deren partielle Ableitungen erster Ordnung in $R+S$ stetig sind und bei Annäherung an S bzw. gegen die Funktionen ϱ, σ, τ konvergieren.*

Beweis. Sei U eine beliebige derartige biharmonische Funktion. Ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung besitzen auf den im Abschnitt 2 dieses Paragraphen konstruierten Flächen S_n stetig variierende Randfunktionen $\varrho_{(n)}$, $\sigma_{(n)}$, $\tau_{(n)}$, die außerdem sicherlich Tangentialableitungen aufweisen, die einer H-Bedingung mit einem beliebigen Exponenten $\mu < 1$ genügen.

Zu diesen Randfunktionen konstruiere man nun die zu (87) analogen Funktionen

$$(88)\qquad \begin{gathered} u_{(n)}(P;-1)=\frac{u^*_{(n)}(P;-1)}{D^{(m)}_{(n)}(-1)},\qquad v_{(n)}(P;-1)=\frac{v^*_{(n)}(P;-1)}{D^{(m)}_{(n)}(-1)},\\ w_{(n)}(P;-1)=\frac{w^*_{(n)}(P;-1)}{D^{(m)}_{(n)}(-1)}, \end{gathered}$$

die nach den Aussagen von Satz 1 bis 3 die Lösung der biharmonischen Randwertaufgabe für R_n+S_n darstellen. Da nach Satz 3 die ersten partiellen Ableitungen dieser Funktionen in R_n+S_n als stetige Funktionen existieren, so folgt aus Überlegungen, wie sie im Abschnitt 6 dieses Paragraphen angestellt wurden, daß in R_n

$$\frac{\partial U}{\partial \xi}\equiv u_{(n)}(P;-1),\qquad \frac{\partial U}{\partial \eta}\equiv v_{(n)}(P;-1),\qquad \frac{\partial U}{\partial \zeta}\equiv w_{(n)}(P;-1)$$

sein muß.

Beachtet man nun, daß sich für die die Fredholmschen Determinanten darstellenden unendlichen Reihen bei Benutzung des Hadamardschen Determinantensatzes konvergente von n unabhängige Majoranten angeben lassen, so bestehen für $n\to\infty$ die folgenden Limesrelationen

$$\begin{gathered} \lim_{n\to\infty} D^{(m)}_{(n)}(\varkappa)=D^{(m)}(\varkappa),\\ \lim_{n\to\infty} F_{(n)}(P;\varkappa)=F(P;\varkappa),\qquad \lim_{n\to\infty} G_{(n)}(P;\varkappa)=G(P;\varkappa),\\ \lim_{n\to\infty} H_{(n)}(P;\varkappa)=H(P;\varkappa). \end{gathered}$$

Ist nun $D^{(m)}(-1)\neq 0$, so ist von einem gewissen n ab auch $D^{(m)}_{(n)}(-1)\neq 0$, und es ergibt sich

$$(89)\qquad \begin{gathered} \lim_{n\to\infty} u_{(n)}(P;-1)=\frac{u^*(P;-1)}{D^{(m)}(-1)},\qquad \lim_{n\to\infty} v_{(n)}(P;-1)=\frac{v^*(P;-1)}{D^{(m)}(-1)},\\ \lim_{n\to\infty} w_{(n)}(P;-1)=\frac{w^*(P;-1)}{D^{(m)}(-1)}. \end{gathered}$$

Im Falle $D^{(m)}(-1)=0$ gehe man von dem Satz aus, daß die Folge $D^{(m)}_{(n)}(\varkappa)$ in jedem ganz im Endlichen gelegenen Gebiet der komplexen $\varkappa$-Ebene gleichmäßig gegen $D^{(m)}(\varkappa)$ konvergiert. Es ist nämlich $D^{(m)}_{(n)}(\varkappa)$ als Fredholmsche Determinante eine unendliche Reihe der Gestalt

$$D^{(m)}_{(n)}(\varkappa)=\sum_{\varrho=1}^{\infty} d_{n\varrho}(\varkappa)\qquad (n=1,2,\ldots),$$

deren Elemente bei Benutzung des Hadamardschen Determinantensatzes sich in der Form

$$|d_{n\varrho}(\varkappa)|\leqq c_\varrho$$

abschätzen lassen, wobei c_ϱ von n und dem in dem endlichen Gebiet der $\varkappa$-Ebene gelegenen $\varkappa$ unabhängig ist, und die Reihe $\sum_{\varrho=1}^{\infty} c_\varrho$ konvergiert. Wählt man alsdann bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl n_1 und die natürliche Zahl n so groß, daß

$$1. \qquad \sum_{\varrho=n_1+1}^{\infty} c_\varrho < \frac{\varepsilon}{3}$$

ist, womit also n_1 festgelegt wird, und daß

$$2. \qquad \sum_{\varrho=1}^{n_1} |d_{n\varrho}(\varkappa) - d_\varrho(\varkappa)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

mit

$$d_\varrho(\varkappa) = \lim_{n \to \infty} d_{n\varrho}(\varkappa)$$

gilt, so gewinnt man die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&|D_{(n)}^{(m)}(\varkappa) - D^{(m)}(\varkappa)| \\
&\leqq |D_{(n)}^{(m)}(\varkappa) - \sum_{\varrho=1}^{n_1} d_{n\varrho}(\varkappa)| + |\sum_{\varrho=1}^{n_1} d_{n\varrho}(\varkappa) - \sum_{\varrho=1}^{n_1} d_\varrho(\varkappa)| + |\sum_{\varrho=1}^{n_1} d_\varrho(\varkappa) - D^{(m)}(\varkappa)| \\
&\leqq \sum_{\varrho=n_1+1}^{\infty} |d_{n\varrho}(\varkappa)| + \sum_{\varrho=1}^{n_1} |d_{n\varrho}(\varkappa) - d_\varrho(\varkappa)| + \sum_{\varrho=n_1+1}^{\infty} |d_\varrho(\varkappa)| \\
&\leqq 2 \sum_{\varrho=n_1+1}^{\infty} c_\varrho + \sum_{\varrho=1}^{n_1} |d_{n\varrho}(\varkappa) - d_\varrho(\varkappa)| < \varepsilon,
\end{aligned}$$

die die Behauptung beweist. Ist dann auf der Berandung eines in der $\varkappa$-Ebene gelegenen Kreises um den Punkt $\varkappa = -1$ durchweg $D^{(m)}(\varkappa) \neq 0$, so gilt das wegen der Gleichmäßigkeit der Konvergenz auch von einem gewissen n ab für die Funktionen $D_{(n)}^{(m)}(\varkappa)$. Schreibt man also mit einem über einen solchen Kreis erstreckten Integral

$$u_{(n)}(P; -1) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{u_{(n)}(P; \varkappa)}{\varkappa + 1} d\varkappa$$

und entsprechende Ausdrücke für $v_n(P; -1)$, $w_n(P; -1)$, so erkennt man, daß die Limesrelationen (89) auch im Falle $D^{(m)}(-1) = 0$ gelten.

Damit ist also gezeigt, daß jede Lösung die Gestalt (87) haben muß, so daß es höchstens eine Lösung geben kann.

13. Mit Hilfe des eben bewiesenen Eindeutigkeitssatzes können wir nunmehr folgenden Satz aussprechen, der für eine anschließende, bereits in der Einleitung erwähnte Arbeit des Verfassers von Wichtigkeit sein wird.

Satz 5. *Nehmen die ersten partiellen Ableitungen der in R biharmonischen Funktion U bei Annäherung an S die Randfunktionen $\varrho(p)$, $\sigma(p)$, $\tau(p)$ an, die* *einer H-Bedingung mit dem Exponenten μ genügen, so erfüllen auch die partiellen Ableitungen*

$$\frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial U}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial U}{\partial \zeta}$$

in $R + S$ eine H-Bedingung mit dem Exponenten μ.

Der Beweis folgt unmittelbar aus Satz 4 und dem in Abschnitt 9 bewiesenen Hilfssatz.

14. Unter einem regulären Oberflächenelement E verstehe man bei Zugrundelegung eines rechtwinklig kartesischen Bezugssystems eine räumliche Punktmenge von Punkten (x, y, z), für deren z-Koordinate bei geeigneter Orientierung der Koordinatenachsen

$$z = \varphi(x, y)$$

gilt, wobei $\varphi(x, y)$ eindeutig ist und stetige partielle Ableitungen erster Ordnung in einem ebenen Gebiet G der x, y-Ebene besitzt, das von einer endlichen Anzahl von aneinander schließenden, durch eine einmal stetig differenzierbare Parameterdarstellung gegebenen doppelpunktfreien Kurvenbogen begrenzt wird. Unter Benutzung dieser Definition beschließen wir diesen Paragraphen mit dem folgenden

Satz 6. *R sei ein beschränktes, offenes Kontinuum, dessen Berandung S ein reguläres Oberflächenelement E mit den folgenden Eigenschaften enthalte:*

(a) *Der Winkel, den zwei Normalen von E miteinander einschließen, sei stets kleiner als* 60^0.

(b) *In einem Koordinatensystem, dessen Achsen in einem beliebigen Punkte p von E tangential bzw. normal zu E seien, lasse sich E durch eine Funktion*

$$z = \varphi(x, y)$$

darstellen, die eindeutig ist und stetige partielle Ableitungen zweiter Ordnung hinsichtlich x und y besitzt, die einer in p gleichmäßigen H-Bedingung (Exponent λ) genügen.

(c) *Zu jedem regulären Oberflächenelement E', das im Innern von E enthalten ist, gebe es eine positive Zahl a_1 derart, daß eine Kugel mit dem Radius a_1 um irgendeinen Punkt von E' von S nur Punkte enthält, die gleichzeitig E angehören (diese Voraussetzung soll mehrfache Randpunkte ausschließen). Die Funktion $U(\xi, \eta, \zeta)$ sei in R eindeutig und biharmonisch, in $R + S$ sei sie mit ihren ersten partiellen Ableitungen stetig, wobei die letzteren bei Annäherung an S gegen Randfunktionen $\varrho(p)$, $\sigma(p)$, $\tau(p)$ konvergieren, die auf E einer gleichmäßigen H-Bedingung (Exponent μ) genügen.*

Es wird dann behauptet, daß es ein Gebiet R' gibt, welches alle Punkte von R in einer gewissen Nachbarschaft von E' enthält, so daß in $R' + E'$ die Funktionen $\frac{\partial U}{\partial \xi}, \frac{\partial U}{\partial \eta}, \frac{\partial U}{\partial \zeta}$ *einer gleichmäßigen H-Bedingung mit dem Exponenten* μ *genügen.*

Dem Beweise dieses Satzes schicken wir zunächst einen Hilfssatz voraus.

15. *Es gibt ein reguläres Oberflächenelement E'', das ganz in E enthalten ist, und das E' in seinem Innern enthält, von der Eigenschaft, daß es durch ein ganz in R liegendes Flächenstück zu einer einfachen geschlossenen Fläche $\overline{S}$ ergänzt werden kann, die durchweg den in § 1 genannten Voraussetzungen genügt.*

Beweis. Die Einheitsvektoren des x, y, z-Systems in einem Punkte p von E seien mit $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$ bezeichnet. Man wähle eine einfache geschlossene, im Innern von E, aber im Äußeren von E' gelegene Kurve C, die etwa durch den auf p bezogenen Ortsvektor in der Form

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s) = x(s)\,\mathfrak{e}_1 + y(s)\,\mathfrak{e}_2 + z(s)\,\mathfrak{e}_3 \qquad (0 \leqq s \leqq s_0)$$

gegeben sei, wobei angenommen werden soll, daß die drei Funktionen $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$ zweimal stetig nach s differenzierbar sind, und die zweiten Ableitungen außerdem einer in s gleichmäßigen H-Bedingung mit dem Exponenten λ genügen. Solche Kurven gibt es sicherlich auf E[44]. Das von C begrenzte reguläre Oberflächenelement heiße E''.

Zu E'' konstruiere man nun das Parallelflächenstück E''_h im Abstand h, das durch

$$\begin{aligned} x_h &= x + h\cos(n, x) = x - \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\omega} h, \\ y_h &= y + h\cos(n, y) = y - \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\omega} h, \qquad \left(\omega = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}\right) \\ z_h &= z + h\cos(n, z) = z + \frac{1}{\omega} h, \end{aligned}$$

gegeben ist, wenn der Punkt (x, y, z) auf E'' liegt. Wir nehmen h so klein (h wird im folgenden noch weiter eingeschränkt werden), daß sich die Normalenstücke zwischen $E'' + C$ und $E''_h + C_h$ nicht schneiden, und daß E''_h ganz in R liegt, was bei Beachtung der Voraussetzung (c) über E stets möglich ist. Wegen der Voraussetzungen über S besitzt E''_h, wenn es als Teilstück von $\overline{S}$ gewählt wird, offenbar die verlangten Eigenschaften.

Die beiden Flächenstücke E'' und E''_h ergänze man nun in folgender Weise zu einer geschlossenen Fläche. In einem beliebigen Punkte von C, dem etwa

---

[44]) Vgl. hierzu O. D. Kellog, l. c., Anm. [27]), insbes. S. 318–319.

der Parameter s entspreche, und der kurz als der Punkt s auf C bezeichnet werde, wähle man das durch die Einheitsvektoren $\mathfrak{e}_1(s)$, $\mathfrak{e}_2(s)$, $\mathfrak{e}_3(s)$ charakterisierte Tangential-Normalkoordinatensystem (die diesbezüglichen Koordinaten seien mit $\xi^{(s)}$, $\eta^{(s)}$), $\zeta^{(s)}$ bezeichnet), bei dem $\mathfrak{e}_3(s)$ mit dem Flächennormalenvektor $\mathfrak{n}(s)$ ($|\mathfrak{n}(s)| = 1$) und $\mathfrak{e}_2(s)$ mit dem Tangentenvektor $\mathfrak{t}(s)$ ($|\mathfrak{t}(s)| = 1$) an C identisch sind. Den Punkt s auf C und den auf der Flächennormalen in s gelegenen Punkt mit den Koordinaten

$$\xi^{(s)} = 0, \quad \eta^{(s)} = 0, \quad \zeta^{(s)} = h$$

verbinde man durch den in der von $\mathfrak{e}_1(s)$ und $\mathfrak{e}_3(s)$ aufgespannten Ebene gelegenen Kurvenbogen $C^{(s)}$, der die Parameterdarstellung

$$\xi^{(s)}(\alpha) = \tau\,\frac{h}{2}\cos\left(\frac{\alpha}{h}\right), \qquad \zeta^{(s)}(\alpha) = \frac{h}{2}\left(\sin\left(\frac{\alpha}{h}\right) + 1\right), \tag{90}$$

$$-\frac{\pi}{2}h \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2}h$$

besitzt, wobei τ eine positive Zahl sei, über die noch verfügt wird. Die Fläche, die aus allen $C^{(s)}$ $(0 \leqq s \leqq s_0)$ besteht, werde mit $F_{h,\tau}$ bezeichnet. Wir behaupten, daß bei hinreichend kleinem h und τ die Fläche $E'' + F_{h,\tau} + E_h''$ einfach geschlossen ist und den in § 1 genannten Voraussetzungen genügt, wobei $F_{h,\tau} + E_h''$ abgesehen von der Randkurve C ganz in R liegt.

Es ist dazu nur noch zu zeigen, daß $F_{h,\tau}$ bei hinreichend kleinem h und τ einfach ist, den in § 1 genannten Voraussetzungen genügt und abgesehen von C ganz in R liegt. $F_{h,\tau}$ ist in Vektoren durch die Parameterdarstellung

$$\begin{aligned}\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s,\alpha) &= x(s,\alpha)\,\mathfrak{e}_1 + y(s,\alpha)\,\mathfrak{e}_2 + z(s,\alpha)\,\mathfrak{e}_3\\ &= \mathfrak{x}(s) + \xi^{(s)}(\alpha)\,\mathfrak{e}_1(s) + \zeta^{(s)}(\alpha)\,\mathfrak{e}_3(s)\\ &= x(s)\,\mathfrak{e}_1 + y(s)\,\mathfrak{e}_2 + z(s)\,\mathfrak{e}_3 +\\ &\quad + \xi^{(s)}(\alpha)\,\mathfrak{e}_1(s) + \zeta^{(s)}(\alpha)\,\mathfrak{e}_3(s)\end{aligned} \tag{91}$$

oder in Koordinaten durch

$$\begin{aligned} x &= x(s,\alpha) = x(s) + \xi^{(s)}(\alpha)\cos(\mathfrak{e}_1(s), \mathfrak{e}_1) + \zeta^{(s)}(\alpha)\cos(\mathfrak{e}_3(s), \mathfrak{e}_1),\\ y &= y(s,\alpha) = y(s) + \xi^{(s)}(\alpha)\cos(\mathfrak{e}_1(s), \mathfrak{e}_2) + \zeta^{(s)}(\alpha)\cos(\mathfrak{e}_3(s), \mathfrak{e}_2),\\ z &= z(s,\alpha) = z(s) + \xi^{(s)}(\alpha)\cos(\mathfrak{e}_1(s), \mathfrak{e}_3) + \zeta^{(s)}(\alpha)\cos(\mathfrak{e}_3(s), \mathfrak{e}_3)\end{aligned} \tag{92}$$

gegeben. Beachtet man nun, daß

$$\begin{aligned}\mathfrak{e}_1(s) &= \mathfrak{t}(s) \times \mathfrak{n}(s),\\ \mathfrak{e}_3(s) &= \mathfrak{n}(s),\\ \mathfrak{t}(s) &= \mathfrak{x}'(s) = x'(s)\mathfrak{e}_1 + y'(s)\mathfrak{e}_2 + z'(s)\mathfrak{e}_3\end{aligned}$$

und

$$\mathfrak{n}(s) = -\frac{\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]_s}{\omega(s)}\,\mathfrak{e}_1 - \frac{\left[\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]_s}{\omega(s)}\,\mathfrak{e}_2 + \frac{1}{\omega(s)}\,\mathfrak{e}_3$$

ist, so kann für (91) und (92) bei Beachtung von (90) ausführlicher

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s,\alpha) = \mathfrak{x}(s) + \tau \frac{h}{2} \cos\left(\frac{\alpha}{h}\right) \mathfrak{t}(s) \times \mathfrak{n}(s) + \frac{h}{2}\left(\sin\left(\frac{\alpha}{h}\right) + 1\right) \mathfrak{n}(s)$$

und

$$x = x(s,\alpha) = x(s) + \tau \frac{h}{2} \cos\left(\frac{\alpha}{h}\right) \frac{1}{\omega(s)} \begin{vmatrix} y'(s), & z'(s) \\ -\left[\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right]_s, & 1 \end{vmatrix} - \frac{h}{2}\left(\sin\left(\frac{\alpha}{h}\right) + 1\right) \frac{\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right]_s}{\omega(s)},$$

$$y = y(s,\alpha) = y(s) - \tau \frac{h}{2} \cos\left(\frac{\alpha}{h}\right) \frac{1}{\omega(s)} \begin{vmatrix} x'(s), & z'(s) \\ -\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right]_s, & 1 \end{vmatrix} - \frac{h}{2}\left(\sin\left(\frac{\alpha}{h}\right) + 1\right) \frac{\left[\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right]_s}{\omega(s)},$$

$$z = z(s,\alpha) = z(s) + \tau \frac{h}{2} \cos\left(\frac{\alpha}{h}\right) \frac{1}{\omega(s)} \begin{vmatrix} x'(s), & y'(s) \\ -\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right]_s, & -\left[\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right]_s \end{vmatrix} + \frac{h}{2}\left(\sin\left(\frac{\alpha}{h}\right) + 1\right) \frac{1}{\omega(s)}$$

geschrieben werden. Man sieht, daß die drei Funktionen $x(s,\alpha)$, $y(s,\alpha)$, $z(s,\alpha)$ als Funktionen von s und α einmal stetig differenzierbar sind und die partiellen Ableitungen einer in s $(0 \leqq s \leqq s_0)$ und α $\left(-\frac{\pi}{2} h \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2} h\right)$ gleichmäßigen H-Bedingung mit dem Exponenten λ genügen.

Die Fläche $F_{h,\tau}$ läßt sich dann für jedes in einem Punkte (s,α) gelegene Tangential-Normalkoordinatensystem x, y, z im Kleinen durch eine Funktion $z = \varphi(x, y)$ mit den gewünschten Eigenschaften eindeutig darstellen, wenn gezeigt werden kann, daß die Vektoren $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial s}$ und $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \alpha}$ stets linear unabhängig sind. Nun ist

$$\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial s} = \mathfrak{t}(s) + \tau \frac{h}{2} \cos\left(\frac{\alpha}{h}\right) \frac{d}{ds}\left(\mathfrak{t}(s) \times \mathfrak{n}(s)\right) + \frac{h}{2}\left(\sin\left(\frac{\alpha}{h}\right) + 1\right) \frac{d\,\mathfrak{n}(s)}{ds},$$

$$\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \alpha} = -\frac{\tau}{2} \sin\left(\frac{\alpha}{h}\right) \mathfrak{t}(s) \times \mathfrak{n}(s) + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\alpha}{h}\right) \mathfrak{n}(s).$$

Für keinen Parameterwert s mit $0 \leqq s \leqq s_0$ und α mit

$$-\frac{\pi}{2} h \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2} h$$

ist der Vektor $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \alpha}$ für $\tau > 0$ gleich dem Nullvektor. Die Vektoren $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial s}$ und $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \alpha}$ sind sodann sicher linear unabhängig, wenn h so klein gewählt wird, daß erstens $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial s}$ $(0 \leqq s \leqq s_0)$ nicht gleich dem Nullvektor ist — das ist ja wegen

$$\left|\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial s}\right| \geqq 1 - h \left|\frac{\tau}{2} \cos\left(\frac{\alpha}{h}\right) \frac{d}{ds} (\mathfrak{t}(s) \times \mathfrak{n}(s)) + \frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{\alpha}{h}\right) + 1\right) \frac{d\,\mathfrak{n}(s)}{ds}\right|$$

stets möglich — und daß zweitens $\left|\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial s} - \mathfrak{t}(s)\right|$ so klein ist, daß $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial s}$ $(0 \leqq s \leqq s_0)$ niemals der von $\mathfrak{n}(s)$ und $\mathfrak{t}(s) \times \mathfrak{n}(s)$ aufgespannten Ebene angehört.

Wird die Bogenlänge auf den Kurven $\alpha =$ konst. mit s_α und die Bogenlänge auf den Kurven $s =$ konst. mit σ_s bezeichnet, wobei also

$$\frac{d s_\alpha}{d s} = \sqrt{\left(\mathfrak{t}(s) + \tau \frac{h}{2} \cos\left(\frac{\alpha}{h}\right) \frac{d}{ds} (\mathfrak{t}(s) \times \mathfrak{n}(s)) + \frac{h}{2} \left(\sin\left(\frac{\alpha}{h}\right) + 1\right) \frac{d\,\mathfrak{n}(s)}{ds}\right)^2}$$

und

$$\frac{d\sigma_s}{d\alpha} = \frac{1}{2} \sqrt{\tau^2 \sin^2\left(\frac{\alpha}{h}\right) + \cos^2\left(\frac{\alpha}{h}\right)}$$

gilt, so zeigt sich weiter, daß die ersten partiellen Ableitungen $\frac{\partial \mathfrak{x}(s,\alpha)}{\partial s_\alpha}$, $\frac{\partial \mathfrak{x}(s,\alpha)}{\partial \sigma_s}$ die jeweils für $\alpha =$ konst. bzw. $s =$ konst. zu bilden sind, bei Annäherung des Punktes (s, α) an einen Punkt $\left(s, -\frac{\pi}{2} h\right)$ bzw. $\left(s, \frac{\pi}{2} h\right)$ der Randkurve C von E'' bzw. der Randkurve C_h von E_h'' gegen die entsprechenden Werte der Ableitungen konvergieren, die sich bei Annäherung an dieselben Randpunkte auf E'' bzw. E_h'' ergeben. Dazu beachte man, daß $\mathfrak{n}(s)$ auch Normalvektor von E_h'' ist, und daß

$$\left[\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial s_\alpha}\right]_{\alpha = -\frac{\pi}{2} h} = \left[\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial s} \frac{ds}{ds_\alpha}\right]_{\alpha = -\frac{\pi}{2} h} = \mathfrak{t}(s),$$

$$\left[\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial s_\alpha}\right]_{\alpha = \frac{\pi}{2} h} = \left[\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial s} \frac{ds}{ds_\alpha}\right]_{\alpha = \frac{\pi}{2} h} = \frac{\mathfrak{t}(s) + h \frac{d\,\mathfrak{n}(s)}{ds}}{\sqrt{\left(\mathfrak{t}(s) + h \frac{d\,\mathfrak{n}(s)}{ds}\right)^2}},$$

$$\left[\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \sigma_s}\right]_{\alpha = -\frac{\pi}{2} h} = \left[\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{d\sigma_s}\right]_{\alpha = -\frac{\pi}{2} h} = \mathfrak{t}(s) \times \mathfrak{n}(s),$$

$$\left[\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \sigma_s}\right]_{\alpha = \frac{\pi}{2} h} = \left[\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{d\sigma_s}\right]_{\alpha = \frac{\pi}{2} h} = -\,\mathfrak{t}(s) \times \mathfrak{n}(s)$$

ist.

Weiter werde gezeigt, daß sich dieses Flächenstück, wenn nur h und τ klein genug gewählt werden, nicht selbst überschneiden kann. Zum Beweise gehen wir von der Bemerkung aus, daß die durch

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s, n, r) = \mathfrak{x}(s) + n\,\mathfrak{n}(s) + r\,\mathfrak{t}(s) \times \mathfrak{n}(s)$$

gegebene, einmal stetig nach s, n, r partiell differenzierbare, dreiparametrige Vektormannigfaltigkeit im kleinen eineindeutig auf die Parameter s, n, r

bezogen ist, da die Kolonnen der Funktionalmatrix aus den Komponenten der Vektoren

$$\mathfrak{t}(s) + n\frac{d\,\mathfrak{n}(s)}{d\,s} + r\frac{d}{d\,s}(\mathfrak{t}(s) \times \mathfrak{n}(s)),\ \mathfrak{n}(s),\ \mathfrak{t}(s) \times \mathfrak{n}(s)$$

bestehen und diese Vektoren bei hinreichend kleinem h und r_0 für alle s, n, r mit $0 \leqq s \leqq s_0$, $0 \leqq n \leqq h$, $0 \leqq r \leqq r_0$ linear unabhängig sind. Wir denken uns h, das den bereits genannten Einschränkungen genügt, und r_0 so gewählt, daß die letztere Voraussetzung zutrifft. Wir betrachten dann nur solche τ-Werte, für die $\tau\frac{h}{2} \leqq r_0$ ist. Würde nun für die Folgen $h_\nu \to 0$, $\tau_\nu \to 0$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ stets eine Überschneidung der Fläche eintreten, so würde es auf C zwei Punktfolgen $P_\nu^{(1)}$ und $P_\nu^{(2)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ mit den zugehörigen Parametern $s_\nu^{(1)}$ und $s_\nu^{(2)}$ so geben, daß die Kurvenbogen $C^{(s_\nu^{(1)})}$ und $C^{(s_\nu^{(2)})}$ stets einen Schnittpunkt haben. Die Folge $P_\nu^{(1)}$ muß mindestens einen Häufungspunkt haben, den wir etwa $P^{(1)}$ nennen. Ebenso muß es für die Folge $P_\nu^{(2)}$ mindestens einen Häufungspunkt $P^{(2)}$ geben. Wegen $h_\nu \to 0$, $\tau_\nu \to 0$ muß $P^{(1)} = P^{(2)}$ sein. Da die Kurve C nach Voraussetzung einfach ist, gilt für die zugehörigen Parameterwerte $s^{(1)} = s^{(2)}$. Es gibt nun Teilfolgen $P_{\bar\nu}^{(1)}$ und $P_{\bar\nu}^{(2)}$ von $P_\nu^{(1)}$ bzw. $P_\nu^{(2)}$, die gegen $P^{(1)}$ konvergieren derart, daß $C^{(s_{\bar\nu}^{(1)})}$ und $C^{(s_{\bar\nu}^{(2)})}$ jeweils einen Schnittpunkt haben. Dazu müßte es aber Parameterwerte $s_{\bar\nu}^{(1)}$, $s_{\bar\nu}^{(2)}$, $n_{\bar\nu}^{(1)}$, $n_{\bar\nu}^{(2)}$, $r_{\bar\nu}^{(1)}$ und $r_{\bar\nu}^{(2)}$ mit

$$s_{\bar\nu}^{(1)} \to s^{(1)}, \quad s_{\bar\nu}^{(2)} \to s^{(1)}, \quad n_{\bar\nu}^{(1)} \to 0, \quad n_{\bar\nu}^{(2)} \to 0, \quad r_{\bar\nu}^{(1)} \to 0, \quad r_{\bar\nu}^{(2)} \to 0$$

geben, für die

$$\begin{aligned} &\mathfrak{x}(s_{\bar\nu}^{(1)}) + n_{\bar\nu}^{(1)}\mathfrak{n}(s_{\bar\nu}^{(1)}) + r_{\bar\nu}^{(1)}\mathfrak{t}(s_{\bar\nu}^{(1)}) \times \mathfrak{n}(s_{\bar\nu}^{(1)}) \\ = &\,\mathfrak{x}(s_{\bar\nu}^{(2)}) + n_{\bar\nu}^{(2)}\mathfrak{n}(s_{\bar\nu}^{(2)}) + r_{\bar\nu}^{(2)}\mathfrak{t}(s_{\bar\nu}^{(2)}) \times \mathfrak{n}(s_{\bar\nu}^{(2)}) \end{aligned}$$

ist. Das widerspricht aber der einleitenden Bemerkung über die dreiparametrige Vektormannigfaltigkeit

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s, n, r).$$

Schließlich werde gezeigt, daß $F_{h,\tau}$, abgesehen von der Randkurve C, ganz in R liegt. Zunächst gibt es nach der Voraussetzung (c) über E zu E'' eine positive Zahl b, so daß eine Kugel mit dem Radius b um irgendeinen Punkt von E'' von S nur Punkte enthält, die gleichzeitig E angehören. Bezeichnet man nun mit ϱ die Entfernung des Randes der Projektion von E'' auf die Tangentialebene in einem Punkte von C vom Rande der Projektion von E, so muß b offenbar kleiner als ϱ sein, denn sonst gäbe es sicher eine Kugel vom Radius b um einen Punkt von E'', die Punkte von S enthielte, die nicht zu E gehören.

Bezeichnet nun a_2 die untere Grenze der Krümmungsradien aller Normalschnitte von E — auf Grund der Voraussetzungen über E ist $a_2 > 0$ —, so unterliege h außer den früheren Forderungen der Einschränkung, daß

(93) $$h < \mathrm{Min}\,(b, a_2)$$

ist. Weiter wähle man τ abgesehen von den früheren Forderungen so, daß

(94) $$0 < \tau < 1$$

gilt. Wegen (93) und (94) gehört dann jeder erzeugende Bogen $C^{(s)}$ von $F_{h,\tau}$ ganz der Kugel vom Radius b um den Punkt s von C an. In dieser Kugel kommen nach Voraussetzung von S nur Punkte vor, die auch E angehören. Nehmen wir nun an, daß $F_{h,\tau}$ abgesehen von C nicht ganz in R liegt, so müßte die Punktmenge $F_{h,\tau} - C$ mit E Punkte gemeinsam haben. Dann gibt es aber einen Bogen $C^{(s)}$, der mit E, abgesehen von dem Punkte s auf C, noch einen weiteren Punkt gemeinsam hat. Schneidet die $\mathfrak{e}_1(s)$, $\mathfrak{e}_3(s)$-Ebene E längs der Kurve $\mathfrak{C}^{(s)}$, deren Gleichung

$$\zeta^{(s)} = \zeta^{(s)}\,(\xi^{(s)})$$

laute, so müssen also $C^{(s)}$ und $\mathfrak{C}^{(s)}$, abgesehen von s, noch einen weiteren Punkt gemeinsam haben.

Versteht man nun unter $K^{(s)}$ den Halbkreisbogen

$$\xi^{(s)}(\alpha) = \frac{h}{2}\cos\left(\frac{\alpha}{h}\right), \quad \zeta^{(s)}(\alpha) = \frac{h}{2}\left(\sin\left(\frac{\alpha}{h}\right) + 1\right),$$

$$-\frac{\pi}{2} \leqq h \leqq \frac{\pi}{2}\,h,$$

so haben wegen der vorhin gemachten Bemerkung über b auch $\mathfrak{C}^{(s)}$ und $K^{(s)}$, abgesehen vom Punkte s von C, einen weiteren Punkt $P = (\xi_0^{(s)}, \zeta_0^{(s)})$ gemeinsam.

Versteht man nun unter $\beta_{\mathfrak{C}}(\xi^{(s)})$ bzw. $\beta_K(\xi^{(s)})$ die Winkel, die die Tangenten an $\mathfrak{C}^{(s)}$ bzw. $K^{(s)}$ mit der positiven $\xi^{(s)}$-Achse bilden, so muß es in $0 \leqq \xi^{(s)} \leqq \xi_0^{(s)}$ sicherlich $\xi^{(s)}$-Werte geben, für die

$$\beta_{\mathfrak{C}}(\xi^{(s)}) > \beta_K(\xi^{(s)})$$

ist, falls nicht dauernd

(95) $$\beta_{\mathfrak{C}}(\xi^{(s)}) = \beta_K(\xi^{(s)})$$

ist. Die untere Grenze dieser $\xi^{(s)}$-Werte sei mit $\xi_1^{(s)}$ bezeichnet, so daß

$$\beta_{\mathfrak{C}}(\xi_1^{(s)}) = \beta_K(\xi_1^{(s)})$$

gilt. Ist aber in $0 \leqq \xi^{(s)} \leqq \xi_0^{(s)}$ ständig (95) erfüllt, so setze man $\xi_1^{(s)} = 0$.

Wird mit $K_1^{(s)}$ der Kreis vom Radius $\frac{h}{2}$ bezeichnet, der $\mathfrak{C}^{(s)}$ im Punkte

$$P_1 = (\xi_1^{(s)}, \zeta^{(s)}(\xi_1^{(s)}))$$

berührt, so liegt die Kurve $\mathfrak{C}^{(s)}$ für $\xi^{(s)} > \xi_1^{(s)}$, falls $\xi^{(s)} - \xi_1^{(s)}$ hinreichend klein ist, entweder $K_1^{(s)}$ an, oder sie durchsetzt diesen Kreis. Ist nun t die Bogenlänge auf $K_1^{(s)}$ und besitzt $\mathfrak{C}^{(s)}$ in einem ξ, ζ-Koordinatensystem, das in P_1 die Tangential-Normallage hat, die Gleichung

$$\zeta = \gamma(\xi),$$

so sind die zu derselben Abszisse

$$\xi = \frac{h}{2} \sin \frac{2t}{h}$$

gehörenden ζ-Ordinaten durch

$$\gamma\left(\frac{h}{2}\sin\left(\frac{2t}{h}\right)\right) \text{ bzw. } \frac{h}{2}\left(1 - \cos\left(\frac{2t}{h}\right)\right)$$

gegeben. Für alle hinreichend kleinen positiven t gilt also

$$\gamma\left(\frac{h}{2}\sin\left(\frac{2t}{h}\right)\right) - \frac{h}{2}\left(1 - \cos\left(\frac{2t}{h}\right)\right) \geqq 0.$$

Aus

$$\gamma\left(\frac{h}{2}\sin\left(\frac{2t}{h}\right)\right) = \frac{1}{2}\,\frac{d^2\gamma(\xi^*)}{d\xi^2}\left[\frac{h}{2}\sin\left(\frac{2t}{h}\right)\right]^2$$
$$= \frac{1}{2}\,\frac{d^2\gamma(\xi^*)}{d\xi^2}\left[t - \frac{4t^3}{3!\,h^2} + \cdots\right]^2,$$

wobei ξ^* ein geeigneter Zwischenwert ist, und aus

$$\frac{h}{2}\left(1 - \cos\left(\frac{2t}{h}\right)\right) = \frac{t^2}{h} - \frac{t^4}{3h^3} + \cdots$$

folgt dann aber für die Krümmung $\varkappa$ von $\mathfrak{C}^{(s)}$ in P_1

$$\varkappa = \frac{d^2\gamma(0)}{d\xi^2} \geqq \frac{2}{h} > \frac{2}{a_2},$$

da $\dfrac{d\gamma(0)}{d\xi} = 0$ ist.

Bezeichnet man mit ε den Winkel, den die Flächennormalen in p und P_1 miteinander einschließen, nach der Voraussetzung (a) über E ist $\cos\varepsilon > \frac{1}{2}$, so liefert die Formel von Meusnier für die Krümmung $\varkappa_n$ des ebenen Normalschnittes von E in P_1, dessen Ebene die ξ-Achse enthält,

$$\varkappa_n = \varkappa\cos\varepsilon > \frac{2\cos\varepsilon}{a_2} > \frac{1}{a_2}.$$

Die daraus resultierende Ungleichung

$$\frac{1}{\varkappa_n} < a_2$$

widerspricht aber der Bedeutung von a_2.

16. Das Innere des von der geschlossenen Fläche $\bar{S}$ berandeten Gebietes werde mit $\bar{R}$ bezeichnet, wobei also $\bar{R}$ ganz dem Gebiete R angehört. Bildet man alsdann, um den Satz 6 zu beweisen, mit den auf $\bar{S}$ angenommenen Werten der partiellen Ableitungen $\frac{\partial U}{\partial\xi}$, $\frac{\partial U}{\partial\eta}$, $\frac{\partial U}{\partial\zeta}$ für das Gebiet $\bar{R}$ Funktionen

$$\bar{u}(P;-1),\quad \bar{v}(P;-1),\quad \bar{w}(P;-1)$$

der Gestalt (87), so kann man dem Beweis des Satzes 4 entnehmen, daß in $\bar{R} + \bar{S}$

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} \equiv \bar{u}(P; -1), \quad \frac{\partial U}{\partial \eta} \equiv \bar{v}(P; -1), \quad \frac{\partial U}{\partial \zeta} \equiv \bar{w}(P; -1)$$

sein muß.

Es gibt nun sicher eine positive Zahl b_1 derart, daß eine Kugel mit dem Radius b_1 um irgendeinen Punkt von E' von $\bar{S}$ keine anderen Punkte enthält als solche, die gleichzeitig E'' angehören (vgl. die entsprechende Definition von a_1). Versteht man dann unter R' das Teilgebiet von $\bar{R}$, welches aus allen Punkten von $\bar{R}$ besteht, deren Abstand von einem beliebigen Punkte von E' kleiner als $\frac{b_1}{4}$ ist, so soll gezeigt werden, daß die Funktionen

$$\bar{u}(P; -1), \quad \bar{v}(P; -1), \quad \bar{w}(P; -1)$$

für alle Punkte von $R' + E'$ einer gleichmäßigen H-Bedingung mit dem Exponenten μ genügen, womit Satz 6 bewiesen wäre.

Dazu beachte man zunächst, daß man den Hilfssatz 3 von § 3 in der folgenden modifizierten Gestalt beweisen kann: Ist $f(p)$ auf $\bar{S}$ eine integrable Funktion, die auf dem in $\bar{S}$ enthaltenen regulären Flächenelement E'' (Hölder-Konstanten: A, λ) einer gleichmäßigen H-Bedingung (Hölder-Konstanten: B, μ) genügt, so gilt für alle Punkte p und q von einem ganz in E'' enthaltenen regulären Flächenelement E' eine der drei Abschätzungen

$$\left.\begin{array}{l} |V(q) - V(p)| \\ |W(q) - W(p)| \end{array}\right\} \leqq \left\{\begin{array}{l} KABt^{\lambda+\mu} \\ KABt \\ KABt|\log t| \end{array}\right.,$$

je nachdem

$$\mu + \lambda < 1, \quad \mu + \lambda > 1, \quad \mu + \lambda = 1$$

ist.

Aus dem Beweise des Hilfssatzes 7 von § 4 ist dann aber zu ersehen, daß die Funktionen $\bar{F}(p; \varkappa)$, $\bar{G}(p; \varkappa)$, $\bar{H}(p; \varkappa)$, die dem zu der Berandung $\bar{S}$ gehörigen Integralgleichungssystem (75) genügen, auf E' eine H-Bedingung mit dem Exponenten μ erfüllen.

Als Modifikation von Hilfssatz 11 in § 3 kann man weiterhin zeigen, daß für eine auf $\bar{S}$ definierte integrable Belegungsfunktion $f(p)$, die auf E'' einer gleichmäßigen H-Bedingung mit dem Exponenten μ genügt, die Integrale $V(P)$ und $W(P)$ in $R' + E'$ eine gleichmäßige H-Bedingung mit demselben Exponenten μ erfüllen. Bei dem Beweise, der sonst genau wie der Beweis von Hilfssatz 11 in § 3 verläuft, ist nur die dort vorkommende Zahl ϱ_0 durch b_1 zu ersetzen. Damit folgt aber, daß die durch (76) nach Ersatz von $u^*(P; \varkappa)$, $v^*(P; \varkappa)$, $w^*(P; \varkappa)$ durch $\bar{u}^*(P; \varkappa)$, $\bar{v}^*(P; \varkappa)$, $\bar{w}^*(P; \varkappa)$ und von $F(p; \varkappa)$, $G(p; \varkappa)$, $H(p; \varkappa)$ bzw. durch $\bar{F}(p; \varkappa)$, $\bar{G}(p; \varkappa)$, $\bar{H}(p; \varkappa)$ gegebenen Funktionen

$\bar{u}^*$, v^*, $\bar{w}^*$ in $R' + E'$ einer gleichmäßigen H-Bedingung genügen, so daß dasselbe schließlich auch von

$$\bar{u}(P; -1) = \frac{\bar{u}^*(P; -1)}{\overline{D^{(m)}}(-1)}, \quad \bar{v}(P; -1) = \frac{\bar{v}^*(P; -1)}{\overline{D^{(m)}}(-1)},$$
$$\bar{w}(P; -1) = \frac{w^*(P; -1)}{\overline{D^{(m)}}(-1)},$$

und zwar sowohl für $\overline{D^{(m)}}(-1) \neq 0$ als auch für $\overline{D^{(m)}}(-1) = 0$ gilt.

§ 5.

Das äußere Problem im Raume.

1. Für das äußere Problem im Raume besteht folgender Existenz- und Eindeutigkeitssatz

Hauptsatz II. *Ist R_a das Außengebiet eines einfach zusammenhängenden, ganz im Endlichen gelegenen Gebietes R, dessen Berandung S den in § 1 genannten Voraussetzungen genügt, und besitzen die auf S definierten Funktionen ϱ, σ, τ dort partielle Ableitungen erster Ordnung, die einer gleichmäßigen H-Bedingung genügen, und sind sie die auf S angenommenen Werte der partiellen Ableitungen erster Ordnung einer in R_a zweimal stetig differenzierbaren Funktion $\Phi(\xi, \eta, \zeta)$, deren erste partielle Ableitungen im Unendlichen wie $\frac{1}{r_{OP}}$ verschwinden, so gibt es (bis auf eine additive Konstante) genau eine in R_a biharmonische Funktion U, deren partielle Ableitungen erster Ordnung in $R_a + S$ stetig sind, auf S bzw. mit ϱ, σ, τ übereinstimmen und im Unendlichen wie $\frac{1}{r_{OP}}$ verschwinden, während die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung dort wie $\frac{1}{r_{OP}^2}$ gegen Null gehen* [45]).

Dem Problem (62), (63) des vorigen Paragraphen entsprechend gehen wir jetzt von dem auf das Gebiet R_a und seine Berandung S bezüglichen Problem

$$\Delta u - \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} = 0, \quad \Delta v - \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} = 0, \quad \Delta w - \frac{\partial \vartheta}{\partial \zeta} = 0, \quad \Delta \vartheta = 0, \tag{96}$$

$$[u]_S = \varrho, \quad [v]_S = \sigma, \quad [w]_S = \tau \tag{97}$$

aus und können dafür den folgenden Satz beweisen:

[45]) Die im Text angegebenen Eigenschaften von U im Unendlichen folgen auch bereits aus den schwächeren Forderungen, daß für $r_{OP} \to \infty$

$$\lim D^1 U = 0, \qquad \lim (r_{OP} D^2 U) = 0$$

sein soll, wie man an den auf das Gebiet R_a angewandten Formeln (20) unmittelbar erkennen kann — eine Bemerkung, die sich auch auf die folgenden Sätze 7, 8 und 10 sinngemäß übertragen läßt.

Satz 7. *Sind die Funktionen ϱ, σ, τ die auf S angenommenen Werte der partiellen Ableitungen einer in R_a zweimal stetig differenzierbaren Funktion $\Phi(\xi, \eta, \zeta)$, deren erste partielle Ableitungen im Unendlichen wie $\frac{1}{r_{OP}}$ verschwinden, und gibt es ein Lösungssystem u, v, w des Problems* (96), (97), *das im Unendlichen wie $\frac{1}{r_{OP}}$ verschwindet, und dessen partielle Ableitungen erster Ordnung in $R_a + S$ stetig sind und im Unendlichen wie $\frac{1}{r_{OP}^2}$ verschwinden, so existiert eine biharmonische Funktion U derart, daß*

$$u = \frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad v = \frac{\partial U}{\partial \eta}, \quad w = \frac{\partial U}{\partial \zeta}$$

ist.

Bedeuten die Flächen S_n^a eine im Gebiet R_a gelegene Folge von gegen S konvergierenden Näherungsflächen, die man aus den früher definierten im Gebiet R gelegenen Flächen S_n durch die Transformation durch reziproke Radien gewinnt, und wird das von ihnen begrenzte Außengebiet mit R_n^a bezeichnet, so lege man dem Beweise, der sonst genau wie der von Satz 1 geführt wird, eine Integralformel der Gestalt (68) zugrunde, bei der aber das Flächenintegral über die Fläche S_n^a und die Raumintegrale über das Außengebiet R_n^a erstreckt werden.

Satz 7 sichert alsdann zusammen mit den beiden folgenden, in den nächsten Abschnitten zu beweisenden Sätzen die Existenz einer im Gebiet R_a biharmonischen Funktion mit den im Hauptsatz behaupteten Eigenschaften:

Satz 8. *Bei beliebig vorgegebenen auf S stetigen Funktionen ϱ, σ, τ hat das Problem* (96), (97) *stets ein System von Lösungsfunktionen u, v, w, die im Unendlichen wie $\frac{1}{r_{OP}}$ verschwinden, während ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung dort wie $\frac{1}{r_{OP}^2}$ gegen Null gehen.*

Satz 9. *Besitzen die Funktionen ϱ, σ, τ auf S überdies partielle Ableitungen erster Ordnung, die einer gleichmäßigen H-Bedingung genügen, so sind die nach Satz 8 existierenden Lösungsfunktionen in $R_a + S$ einmal stetig partiell differenzierbar.*

Hinsichtlich der Einzigkeit der Lösung können wir folgenden allgemeinen Satz beweisen:

Satz 10. *Werden die Funktionen ϱ, σ, τ auf S lediglich als stetig vorausgesetzt, so kann es (bis auf eine additive Konstante) höchstens eine in R biharmonische Funktion U geben, deren partielle Ableitungen erster Ordnung in $R_a + S$ stetig sind, bei Annäherung an S bzw. gegen die Funktionen ϱ, σ, τ*

konvergieren und im Unendlichen wie $\frac{1}{r_{OP}}$ *verschwinden, während die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung dort wie* $\frac{1}{r_{OP}^2}$ *gegen Null gehen.*

2. Indem wir statt des Problems (96), (97) gleich das allgemeinere Problem

$$\Delta u + k\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} = 0, \quad \Delta v + k\frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} = 0, \quad \Delta w + k\frac{\partial \vartheta}{\partial \zeta} = 0, \quad \Delta \vartheta = 0, \tag{98}$$

$$[u]_S = \varrho, \quad [v]_S = \sigma, \quad [w]_S = \tau \tag{99}$$

betrachten, bei dem k ein Parameter ist, gehen wir von dem mit Hilfe der durch (71) gegebenen Kerne gebildeten Integralgleichungssystem

$$\begin{aligned} f(p;\varkappa) - \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)} \{K_{\xi\xi}(p,p';\varkappa)\, f(p';\varkappa) + K_{\xi\eta}(p,p';\varkappa)\, g(p';\varkappa) + \\ + K_{\xi\zeta}(p,p';\varkappa)\, h(p';\varkappa)\}\, d\sigma = \varrho(p), \\ g(p;\varkappa) - \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)} \{K_{\eta\xi}(p,p';\varkappa)\, f(p';\varkappa) + K_{\eta\eta}(p,p';\varkappa)\, g(p';\varkappa) + \\ + K_{\eta\zeta}(p,p';\varkappa)\, h(p';\varkappa)\}\, d\sigma = \sigma(p), \\ h(p;\varkappa) - \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)} \{K_{\zeta\xi}(p,p';\varkappa)\, f(p';\varkappa) + K_{\zeta\eta}(p,p';\varkappa)\, g(p';\varkappa) + \\ + K_{\zeta\zeta}(p\, p';\varkappa)\, h(p';\varkappa)\}\, d\sigma = \tau(p) \end{aligned} \tag{100}$$

aus, bei dem wieder

$$\varkappa = \frac{k}{2+k} \quad (k \neq -2)$$

gesetzt ist. Das dazugehörige homogene Integralgleichungssystem

$$\begin{aligned} f_1(p;\varkappa) - \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)} \{K_{\xi\xi}(p,p';\varkappa)\, f_1(p';\varkappa) + K_{\xi\eta}(p,p';\varkappa)\, g_1(p';\varkappa) + \\ + K_{\xi\zeta}(p,p';\varkappa)\, h_1(p';\varkappa)\}\, d\sigma = 0, \\ g_1(p;\varkappa) - \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)} \{K_{\eta\xi}(p,p';\varkappa)\, f_1(p';\varkappa) + K_{\eta\eta}(p,p';\varkappa)\, g_1(p';\varkappa) + \\ + K_{\eta\zeta}(p,p';\varkappa)\, h_1(p';\varkappa)\}\, d\sigma = 0, \\ h_1(p;\varkappa) - \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)} \{K_{\zeta\xi}(p,p';\varkappa)\, f_1(p';\varkappa) + K_{\zeta\eta}(p,p';\varkappa)\, g_1(p';\varkappa) + \\ + K_{\zeta\zeta}(p,p';\varkappa)\, h_1(p';\varkappa)\}\, d\sigma = 0 \end{aligned} \tag{101}$$

besitzt nun für alle $\varkappa$-Werte, wie unmittelbar aus (24) und (25) zu ersehen ist, die drei linear unabhängigen Lösungssysteme

$$\begin{aligned} f_{11} = a, \quad g_{11} = 0, \quad h_{11} = 0, \\ f_{12} = 0, \quad g_{12} = b, \quad h_{12} = 0, \\ f_{13} = 0, \quad g_{13} = 0, \quad h_{13} = c, \end{aligned} \tag{102}$$

wenn a, b, c drei beliebige nichtverschwindende Konstanten sind. Schreibt man nunmehr das System (101) nach der im Abschnitt 4 von § 4 angegebenen Methode als eine einzige homogene Integralgleichung

$$f_1^*(p) - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(\mathfrak{S})} K(p, p'; \varkappa)\, f_1^*(p')\, d\sigma = 0,$$

wobei die Variablen auf der dort angegebenen Fläche $\mathfrak{S}$ variieren, so müssen also die mit Hilfe der m-ten Iterierten (m hinreichend groß und ungerade) des Kerns

$$\frac{1}{2\pi} K(p, q; \varkappa)$$

gebildeten Fredholmschen Unterdeterminanten von niederer als der dritten Ordnung identisch in $\varkappa$ und ihren auf $\mathfrak{S}$ variierenden Variablen verschwinden. Wir behaupten aber, daß es für $\varkappa = 0$ (d. h. $k = 0$) eine Unterdeterminante dritter Ordnung geben muß, die ungleich Null ist, so daß also bei geeigneten auf $\mathfrak{S}$ gelegenen Punkten $p_1, p_2, p_3; q_1, q_2, q_3$

$$D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1\, p_2\, p_3 \\ q_1\, q_2\, q_3 \end{pmatrix}; 0 \Big) \neq 0 \tag{103}$$

gilt.

Denn wäre (103) nicht erfüllt, so müßte das aus (101) für $\varkappa = 0$ hervorgehende Integralgleichungssystem

$$f_1(p) - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(S)} \frac{\cos(r_{p'p}, n_{p'})}{r_{p'p}^2} f_1(p')\, d\sigma = 0,$$

$$g_1(p) - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(S)} \frac{\cos(r_{p'p}, n_{p'})}{r_{p'p}^2} g_1(p')\, d\sigma = 0,$$

$$h_1(p) - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(S)} \frac{\cos(r_{p'p}, n_{p'})}{r_{p'p}^2} h_1(p')\, d\sigma = 0$$

nach m-facher Iteration mehr als drei linear unabhängige Lösungssysteme besitzen. Dann wäre das aber auch der Fall für das System

$$f_1(p) - \frac{\eta\mu}{2\pi}\iint\limits_{(S)} \frac{\cos(r_{p'p}, n_{p'})}{r_{p'p}^2} f_1(p')\, d\sigma = 0,$$

$$g_1(p) - \frac{\eta\mu}{2\pi}\iint\limits_{(S)} \frac{\cos(r_{p'p}, n_{p'})}{r_{p'p}^2} g_1(p')\, d\sigma = 0,$$

$$h_1(p) - \frac{\eta\mu}{2\pi}\iint\limits_{(S)} \frac{\cos(r_{p'p}, n_{p'})}{r_{p'p}^2} h_1(p')\, d\sigma = 0,$$

wobei η_μ eine geeignet zu wählende m-te Einheitswurzel ($\eta_\mu^m = 1$) ist. Bereits im Abschnitt 4 von § 4 wurde aber erwähnt, daß für dieses System überhaupt nur dann nicht identisch verschwindende Lösungen existieren, wenn $\eta_\mu = 1$ ist. Dann besitzt es aber, wie in der Potentialtheorie bei der Behandlung des äußeren Problems bewiesen wird[46]), auch nur die drei in (102) angegebenen linear unabhängigen Lösungssysteme, so daß tatsächlich (103) zutrifft.

3. Die in $\varkappa$ ganze transzendente Funktion

$$D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1\, p_2\, p_3 \\ q_1\, q_2\, q_3 \end{pmatrix}; \varkappa\Big) \tag{104}$$

kann also nur für in der komplexen $\varkappa$-Ebene diskret gelegene $\varkappa$-Werte verschwinden. Für $\varkappa$-Werte, für die die Determinante (104) nicht verschwindet, geben alsdann nach einem Ergebnis der Fredholmschen Theorie die Determinanten

$$\begin{gathered} f_{21}^*(p;\varkappa) = D^{(m)}\left(\begin{matrix} p_1\, p_2\, p_3 \\ p\;\, q_2\, q_3 \end{matrix}; \varkappa\right), \quad f_{22}^*(p;\varkappa) = D^{(m)}\left(\begin{matrix} p_1\, p_2\, p_3 \\ q_1\, p\;\, q_3 \end{matrix}; \varkappa\right), \\ f_{23}^*(p;\varkappa) = D^{(m)}\left(\begin{matrix} p_1\, p_2\, p_3 \\ q_1\, q_2\, p \end{matrix}; \varkappa\right) \end{gathered} \tag{105}$$

drei linear unabhängige Lösungssysteme des m-fach iterierten zu (101) assoziierten Integralgleichungssystems

$$\begin{aligned} f_2(p;\varkappa) - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(S)} \{K_{\xi\xi}(p',p;\varkappa)\, f_2(p';\varkappa) + K_{\xi\eta}(p',p;\varkappa)\, g_2(p';\varkappa) &+ \\ + K_{\xi\zeta}(p',p;\varkappa)\, h_2(p';\varkappa)\}\, d\sigma &= 0, \\ g_2(p;\varkappa) - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(S)} \{K_{\eta\xi}(p',p;\varkappa)\, f_2(p';\varkappa) + K_{\eta\eta}(p',p;\varkappa)\, g_2(p';\varkappa) &+ \\ + K_{\eta\zeta}(p',p;\varkappa)\, h_2(p';\varkappa)\}\, d\sigma &= 0, \\ h_2(p;\varkappa) - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(S)} \{K_{\zeta\xi}(p',p;\varkappa)\, f_2(p';\varkappa) + K_{\zeta\eta}(p',p;\varkappa)\, g_2(p';\varkappa) &+ \\ + K_{\zeta\zeta}(p',p;\varkappa)\, h_2(p';\varkappa)\}\, d\sigma &= 0 \end{aligned} \tag{106}$$

und damit auch von (106) selbst, da (106) mindestens drei linear unabhängige Lösungen hat. Diese durch (105) gegebenen Lösungen von (106) seien mit

$$\begin{gathered} f_{21}(p;\varkappa), \quad g_{21}(p;\varkappa), \quad h_{21}(p;\varkappa), \\ f_{22}(p;\varkappa), \quad g_{22}(p;\varkappa), \quad h_{22}(p;\varkappa), \\ f_{23}(p;\varkappa), \quad g_{23}(p;\varkappa), \quad h_{23}(p;\varkappa) \end{gathered} \tag{107}$$

[46]) Vgl. etwa W. Sternberg, Potentialtheorie II, Berlin und Leipzig 1926, insbes. S. 108. Die dortigen Schlüsse gelten auch bei unseren Voraussetzungen über die Berandung.

bezeichnet. Für die betrachteten $\varkappa$-Werte lauten dann die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz einer Lösung der inhomogenen Gleichungen (100)

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{(S)} \{f_{21}(p';\varkappa)\,\varrho(p') + g_{21}(p';\varkappa)\,\sigma(p') + h_{21}(p';\varkappa)\,\tau(p')\}\,d\sigma = 0,\\
(108)\qquad &\iint\limits_{(S)} \{f_{22}(p';\varkappa)\,\varrho(p') + g_{22}(p';\varkappa)\,\sigma(p') + h_{22}(p';\varkappa)\,\tau(p')\}\,d\sigma = 0,\\
&\iint\limits_{(S)} \{f_{23}(p';\varkappa)\,\varrho(p') + g_{23}(p';\varkappa)\,\sigma(p') + h_{23}(p';\varkappa)\,\tau(p')\}\,d\sigma = 0,
\end{aligned}$$

die, wenn sie überhaupt erfüllt sind, natürlich identisch in $\varkappa$ gelten, da die Funktionen (107) in $\varkappa$ ganz transzendent sind.

Nehmen wir nunmehr zunächst an, daß die gegebenen Randfunktionen $\varrho(p)$, $\sigma(p)$, $\tau(p)$ auf S stetig sind und diese Bedingungen für alle $\varkappa$ erfüllen, so kann für $\varkappa$-Werte, für die die Determinante (104) nicht verschwindet, eine Lösung von (100) in der Form

$$f(p;\varkappa) = \frac{F(p;\varkappa)}{D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1\, p_2\, p_3\\ q_1\, q_2\, q_3\end{pmatrix};\varkappa)}, \qquad g(p;\varkappa) = \frac{G(p;\varkappa)}{D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1\, p_2\, p_3\\ q_1\, q_2\, q_3\end{pmatrix};\varkappa)},$$
$$h(p;\varkappa) = \frac{H(p;\varkappa)}{D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1\, p_2\, p_3\\ q_1\, q_2\, q_3\end{pmatrix};\varkappa)}$$

angegeben werden, wobei die jeweils im Zähler stehenden Funktionen in $\varkappa$ ganz transzendent sind und den Integralgleichungen

$$\begin{aligned}
&F(p;\varkappa) - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(S)} \{K_{\xi\xi}(p,p';\varkappa)\,F(p';\varkappa) + K_{\xi\eta}(p,p';\varkappa)\,G(p';\varkappa) +\\
&\qquad + K_{\xi\zeta}(p,p';\varkappa)\,H(p';\varkappa)\}\,d\sigma = D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1\, p_2\, p_3\\ q_1\, q_2\, q_3\end{pmatrix};\varkappa)\,\varrho(p),\\
(109)\quad &G(p;\varkappa) - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(S)} \{K_{\eta\xi}(p,p';\varkappa)\,F(p';\varkappa) + K_{\eta\eta}(p,p';\varkappa)\,G(p';\varkappa) +\\
&\qquad + K_{\eta\zeta}(p,p';\varkappa)\,H(p';\varkappa)\}\,d\sigma = D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1\, p_2\, p_3\\ q_1\, q_2\, q_3\end{pmatrix};\varkappa)\,\sigma(p),\\
&H(p;\varkappa) - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(S)} \{K_{\zeta\xi}(p,p';\varkappa)\,F(p';\varkappa) + K_{\zeta\eta}(p,p';\varkappa)\,G(p';\varkappa) +\\
&\qquad + K_{\zeta\zeta}(p,p';\varkappa)\,H(p';\varkappa)\}\,d\sigma = D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1\, p_2\, p_3\\ q_1\, q_2\, q_3\end{pmatrix};\varkappa)\,\tau(p)
\end{aligned}$$

genügen.

Bildet man nämlich für den Kern $\frac{1}{2\pi}K(p,q;\varkappa)$ die Fredholmsche Unterdeterminante

$$D^{(m)}\begin{pmatrix} p\, p_1\, p_2\, p_3\\ q\, q_1\, q_2\, q_3\end{pmatrix};\varkappa),$$

für die bekanntlich die Relation

$$(110)\quad \frac{D^{(m)}\begin{pmatrix} p\; p_1\; p_2\; p_3 \\ q\; q_1\; q_2\; q_3 \end{pmatrix}; \varkappa)}{D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1\; p_2\; p_3 \\ q_1\; q_2\; q_3 \end{pmatrix}; \varkappa)} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^m K^{(m)}(p, q; \varkappa) -$$

$$- \left(\frac{1}{2\pi}\right)^m K^{(m)}(p, q_1; \varkappa) \frac{D^{(m)}\left(\begin{matrix} p_1\; p_2\; p_3 \\ q\; q_2\; q_3 \end{matrix}; \varkappa\right)}{D^{(m)}\left(\begin{matrix} p_1\; p_2\; p_3 \\ q_1\; q_2\; q_3 \end{matrix}; \varkappa\right)} +$$

$$+ \left(\frac{1}{2\pi}\right)^m K^{(m)}(p, q_2; \varkappa) \frac{D^{(m)}\left(\begin{matrix} p_1\; p_2\; p_3 \\ q\; q_1\; q_3 \end{matrix}; \varkappa\right)}{D^{(m)}\left(\begin{matrix} p_1\; p_2\; p_3 \\ q_1\; q_2\; q_3 \end{matrix}; \varkappa\right)} -$$

$$- \left(\frac{1}{2\pi}\right)^m K^{(m)}(p, q_3; \varkappa) \frac{D^{(m)}\left(\begin{matrix} p_1\; p_2\; p_3 \\ q\; q_1\; q_2 \end{matrix}; \varkappa\right)}{D^{(m)}\left(\begin{matrix} p_1\; p_2\; p_3 \\ q_1\; q_2\; q_3 \end{matrix}; \varkappa\right)} +$$

$$+ \left(\frac{1}{2\pi}\right)^m \iint\limits_{(\mathfrak{S})} K^{(m)}(p, p'; \varkappa) \frac{D^{(m)}\left(\begin{matrix} p'\; p_1\; p_2\; p_3 \\ q\; q_1\; q_2\; q_3 \end{matrix}; \varkappa\right)}{D^{(m)}\left(\begin{matrix} p_1\; p_2\; p_3 \\ q_1\; q_2\; q_3 \end{matrix}; \varkappa\right)} d\sigma$$

besteht[47]), und setzt man

$$(111)\quad \Omega(p, q; \varkappa) = \frac{1}{2\pi} K(p, q; \varkappa) + \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 K^{(2)}(p, q; \varkappa) + \cdots + \\ + \left(\frac{1}{2\pi}\right)^m K^{(m)}(p, q; \varkappa),$$

$$(112)\quad \Gamma^{(m)}(p, q; \varkappa) = \frac{D^{(m)}\left(\begin{matrix} p\; p_1\; p_2\; p_3 \\ q\; q_1\; q_2\; q_3 \end{matrix}; \varkappa\right)}{D^{(m)}\left(\begin{matrix} p_1\; p_2\; p_3 \\ q_1\; q_2\; q_3 \end{matrix}; \varkappa\right)},$$

$$(113)\quad \Gamma(p, q; \varkappa) = \Omega(p, q; \varkappa) + \iint\limits_{(\mathfrak{S})} \Omega(p, p'; \varkappa)\, \Gamma^{(m)}(p', q; \varkappa)\, d\sigma,$$

so stellt die Funktion

$$(114)\quad f^*(p; \varkappa) = \varrho^*(p) + \iint\limits_{(\mathfrak{S})} \Gamma(p, p'; \varkappa)\, \varrho^*(p')\, d\sigma$$

eine Lösung der zu dem System (100) äquivalenten Integralgleichung

$$(115)\quad f^*(p; \varkappa) - \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{(\mathfrak{S})} K(p, p'; \varkappa)\, f^*(p'; \varkappa)\, d\sigma = \varrho^*(p)$$

dar.

[47]) Vgl. E. GOURSAT, l. c., Anm. [35]), insbes. S. 376.

Beweis. Es ist zunächst

$$\Omega(p, q; \varkappa) - \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{(\mathfrak{S})} K(p, p'; \varkappa)\, \Omega(p', q; \varkappa)\, d\sigma \tag{116}$$

$$= \frac{1}{2\pi} K(p, q; \varkappa) - \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{m+1} \iint\limits_{(\mathfrak{S})} K(p, p'; \varkappa)\, K^{(m)}(p', q; \varkappa)\, d\sigma.$$

Setzt man nun

$$\Psi(p, q; \varkappa) = \Gamma(p, q; \varkappa) - \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{(\mathfrak{S})} K(p, p'; \varkappa)\, \Gamma(p', q; \varkappa) d\sigma$$

$$= \Omega(p, q; \varkappa) + \iint\limits_{(\mathfrak{S})} \Omega(p, p'; \varkappa)\, \Gamma^{(m)}(p', q; \varkappa)\, d\sigma -$$

$$- \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{(\mathfrak{S})} K(p, p'; \varkappa)\, \Omega(p, p'; \varkappa)\, d\sigma -$$

$$- \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{(\mathfrak{S})} \iint\limits_{(\mathfrak{S})} K(p, p'; \varkappa)\, \Omega(p', p''; \varkappa)\, \Gamma^{(m)}(p'', q; \varkappa)\, d\sigma_{p'}\, d\sigma_{p''},$$

so wird bei Zusammenfassung des ersten und dritten Summanden gemäß (116)

$$\Psi(p, q; \varkappa) = \frac{1}{2\pi} K(p, q; \varkappa) - \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{m+1} \iint\limits_{(\mathfrak{S})} K(p, p'; \varkappa)\, K^{(m)}(p', q; \varkappa)\, d\sigma +$$

$$+ \iint\limits_{(\mathfrak{S})} \Omega(p, p'; \varkappa)\, \Gamma^{(m)}(p', q; \varkappa)\, d\sigma -$$

$$- \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{(\mathfrak{S})} \iint\limits_{(\mathfrak{S})} K(p, p'; \varkappa)\, \Omega(p', p''; \varkappa)\, \Gamma^{(m)}(p'', q; \varkappa)\, d\sigma_{p'}\, d\sigma_{p''}.$$

Daraus folgt aber ebenfalls bei Beachtung von (116)

$$\Psi(p, q; \varkappa) = \frac{1}{2\pi} K(p, q; \varkappa) - \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{m+1} \iint\limits_{(\mathfrak{S})} K(p, p'; \varkappa)\, K^{(m)}(p', q; \varkappa)\, d\sigma +$$

$$+ \iint\limits_{(\mathfrak{S})} \left\{\frac{1}{2\pi} K(p, p'; \varkappa) - \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{m+1} \iint\limits_{(\mathfrak{S})} K(p, p''; \varkappa)\, K^{(m)}(p'', p') d\sigma_{p''}\right\} \Gamma^{(m)}(p', q; \varkappa) d\sigma_{p'}$$

$$= \frac{1}{2\pi} K(p, q; \varkappa) + \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{(\mathfrak{S})} K(p, p'; \varkappa) \left\{\Gamma^{(m)}(p', q; \varkappa) - \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{m} K^{(m)}(p', q; \varkappa) -\right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{m} \iint\limits_{(\mathfrak{S})} K^{(m)}(p', p''; \varkappa)\, \Gamma^{(m)}(p'', q; \varkappa)\, d\sigma_{p''}\right\} d\sigma_{p'}.$$

Wegen (112), (110) und (105) erhält man alsdann

$$(117) \quad \Psi(p, q; \varkappa) = \Gamma(p, q; \varkappa) - \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{(\mathfrak{S})} K(p, p'; \varkappa)\, \Gamma(p', q; \varkappa)\, d\sigma$$

$$= \frac{1}{2\pi} K(p, q; \varkappa) - \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{m+1} \frac{f_{21}^*(q; \varkappa)}{D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1\, p_2\, p_3 \\ q_1\, q_2\, q_3 \end{pmatrix}; \varkappa} \iint\limits_{(\mathfrak{S})} K(p, p'; \varkappa) K^{(m)}(p', q_1; \varkappa)\, d\sigma +$$

$$+ \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{m+1} \frac{f_{22}^*(q; \varkappa)}{D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1\, p_2\, p_3 \\ q_1\, q_2\, q_3 \end{pmatrix}; \varkappa} \iint\limits_{(\mathfrak{S})} K(p, p'; \varkappa)\, K^{(m)}(p', q_2; \varkappa)\, d\sigma -$$

$$- \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{m+1} \frac{f_{23}^*(q; \varkappa)}{D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1\, p_2\, p_3 \\ q_1\, q_2\, q_3 \end{pmatrix}; \varkappa} \iint\limits_{(\mathfrak{S})} K(p, p'; \varkappa)\, K^{(m)}(p', q_3; \varkappa)\, d\sigma$$

$$= \frac{1}{2\pi} K(p, q; \varkappa) - \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{m+1} f_{21}^*(q; \varkappa) \frac{K^{(m+1)}(p, q_1; \varkappa)}{D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1\, p_2\, p_3 \\ q_1\, q_2\, q_3 \end{pmatrix}; \varkappa} +$$

$$+ \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{m+1} f_{22}^*(q; \varkappa) \frac{K^{(m+1)}(p, q_2; \varkappa)}{D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1\, p_2\, p_3 \\ q_1\, q_2\, q_3 \end{pmatrix}; \varkappa} - \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{m+1} f_{23}^*(q; \varkappa) \frac{K^{(m+1)}(p, q_3; \varkappa)}{D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1\, p_2\, p_3 \\ q_1\, q_2\, q_3 \end{pmatrix}; \varkappa}.$$

Für die durch (114) gegebene Funktion ist nun

$$\frac{1}{2\pi} \iint\limits_{(\mathfrak{S})} K(p, p'; \varkappa) f^*(p'; \varkappa) d\sigma = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{(\mathfrak{S})} K(p, p'; \varkappa) \varrho^*(p') d\sigma +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{(\mathfrak{S})} \varrho^*(p') \left\{ \iint\limits_{(\mathfrak{S})} K(p, p''; \varkappa)\, \Gamma(p'', p'; \varkappa) d\sigma_{p''} \right\} d\sigma_{p'},$$

oder mit (117)

$$\frac{1}{2\pi} \iint\limits_{(\mathfrak{S})} K(p, p'; \varkappa) f^*(p'; \varkappa) d\sigma = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{(\mathfrak{S})} K(p, p'; \varkappa) \varrho^*(p') d\sigma +$$

$$+ \iint\limits_{(\mathfrak{S})} \varrho^*(p') \Bigg\{ \Gamma(p, p'; \varkappa) - \frac{1}{2\pi} K(p, p'; \varkappa) + \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{m+1} \frac{K^{(m+1)}(p, q_1; \varkappa)}{D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1\, p_2\, p_3 \\ q_1\, q_2\, q_3 \end{pmatrix}; \varkappa} f_{21}^*(p'; \varkappa) -$$

$$- \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{m+1} \frac{K^{(m+1)}(p, q_2; \varkappa)}{D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1\, p_2\, p_3 \\ q_1\, q_2\, q_3 \end{pmatrix}; \varkappa} f_{22}^*(p'; \varkappa) + \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{m+1} \frac{K^{(m+1)}(p, q_3; \varkappa)}{D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1\, p_2\, p_3 \\ q_1\, q_2\, q_3 \end{pmatrix}; \varkappa} f_{23}^*(p'; \varkappa) \Bigg\} d\sigma$$

$$= \iint\limits_{(\mathfrak{S})} \Gamma(p, p'; \varkappa) \varrho^*(p') d\sigma +$$

$$+ \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{m+1} \frac{K^{(m+1)}(p, q_1; \varkappa)}{D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1\, p_2\, p_3 \\ q_1\, q_2\, q_3 \end{pmatrix}; \varkappa} \iint\limits_{(\mathfrak{S})} \varrho^*(p') f_{21}^*(p'; \varkappa) d\sigma -$$

$$- \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{m+1} \frac{K^{(m+1)}(p, q_2; \varkappa)}{D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1\, p_2\, p_3 \\ q_1\, q_2\, q_3 \end{pmatrix}; \varkappa} \iint\limits_{(\mathfrak{S})} \varrho^*(p') f_{22}^*(p'; \varkappa) d\sigma +$$

$$+ \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{m+1} \frac{K^{(m+1)}(p, q_3; \varkappa)}{D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1\, p_2\, p_3 \\ q_1\, q_2\, q_3 \end{pmatrix}; \varkappa} \iint\limits_{(\mathfrak{S})} \varrho^*(p') f_{23}^*(p'; \varkappa) d\sigma.$$

Wegen (108) muß dann aber einfach

$$\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(\mathfrak{S})} K(p, p'; \varkappa) f^*(p'; \varkappa)\, d\sigma = \iint\limits_{(\mathfrak{S})} \Gamma(p, p'; \varkappa)\, \varrho^*(p')\, d\sigma,$$

oder wegen (114)

$$\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(\mathfrak{S})} K(p, p'; \varkappa) f^*(p'; \varkappa)\, d\sigma = f^*(p; \varkappa) - \varrho^*(p)$$

sein, womit die Behauptung bewiesen ist.

4. Mit wörtlich den gleichen Methoden, die bei der Behandlung des inneren räumlichen Problems benutzt wurden, kann man zeigen, daß die Funktionen

$$(118) \qquad u(P; \varkappa) = \frac{u^*(P; \varkappa)}{D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1\, p_2\, p_3 \\ q_1\, q_2\, q_3 \end{pmatrix}; \varkappa}, \quad v(P\colon \varkappa) = \frac{v^*(P; \varkappa)}{D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1\, p_2\, p_3 \\ q_1\, q_2\, q_3 \end{pmatrix}; \varkappa},$$

$$w(P; \varkappa) = \frac{w^*(P; \varkappa)}{D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1\, p_2\, p_3 \\ q_1\, q_2\, q_3 \end{pmatrix}; \varkappa}$$

mit

$$u^*(P; \varkappa) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(\mathfrak{S})} \{K_{\xi\xi}(P, p'; \varkappa) F(p'; \varkappa) + K_{\xi\eta}(P, p'; \varkappa)\, G(p'; \varkappa) + \\ + K_{\xi\zeta}(P, p'; \varkappa)\, H(p'; \varkappa)\}\, d\sigma,$$

$$v^*(P; \varkappa) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(\mathfrak{S})} \{K_{\eta\xi}(P, p'; \varkappa) F(p'; \varkappa) + K_{\eta\eta}(P; p'; \varkappa)\, G(p'; \varkappa) + \\ + K_{\eta\zeta}(P, p'; \varkappa) H(p'; \varkappa)\}\, d\sigma,$$

$$w^*(P; \varkappa) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(\mathfrak{S})} \{K_{\zeta\xi}(P, p'; \varkappa) F(p'; \varkappa) + K_{\zeta\eta}(P, p'; \varkappa)\, G(p'; \varkappa) + \\ + K_{\zeta\zeta}(P, p'; \varkappa) H(p'; \varkappa)\}\, d\sigma$$

für $\varkappa = k = -1$, auch wenn die in ihnen vorkommende Nennerdeterminante dort verschwindet, das Problem (98), (99) lösen, womit also der Satz 8 für Funktionen ϱ, σ, τ, die für alle $\varkappa$ den Bedingungen (108) genügen, bewiesen ist[48].

---

[48]) Die bei der Lösung des inneren Problems herangezogene Greensche Formel (86) läßt sich hier beim äußeren Problem sinngemäß in der Form

$$\iiint\limits_{(R_n^a)} (\Delta U^*)^2\, d\tau = \iint\limits_{(S_n^a)} \left\{U^* \frac{\partial \Delta U^*}{\partial n} - \Delta U^* \frac{\partial U^*}{\partial n}\right\} d\sigma$$

benutzen, wo U^* durch

$$u^*(P; -1) = \frac{\partial U^*}{\partial \xi}, \quad v^*(P; -1) = \frac{\partial U^*}{\partial \eta}, \quad w^*(P; -1) = \frac{\partial U^*}{\partial \zeta}$$

gegeben ist, wenn auf S die Gleichungen

$$[u^*(P; -1)]_S = 0, \quad [v^*(P; -1)]_S = 0, \quad [w^*(P; -1)]_S = 0$$

bestehen, da ja im Unendlichen U^* sich beschränkt verhält, $\frac{\partial U^*}{\partial n}$ wie $\frac{1}{r_{OP}}$, ΔU^* wie $\frac{1}{r_{OP}^2}$ und $\frac{\partial \Delta U^*}{\partial n}$ wie $\frac{1}{r_{OP}^3}$ verschwindet.

5. Erfüllen aber die gegebenen Funktionen ϱ, σ, τ für alle $\varkappa$-Werte nicht die Bedingungen (108), so bilde man unter Benutzung der drei Lösungssysteme

$$
(119)\quad
\begin{aligned}
u_1 &= \frac{1+k}{2+k}\frac{1}{r_{OP}} - \frac{k}{2(2+k)}\frac{\partial^2 r_{OP}}{\partial \xi^2} = \frac{1}{2r_{OP}} + \varkappa\left\{\frac{1}{2r_{OP}} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 r_{OP}}{\partial \xi^2}\right\},\\
v_1 &= -\frac{k}{2(2+k)}\frac{\partial^2 r_{OP}}{\partial\eta\,\partial\xi} = -\frac{\varkappa}{2}\frac{\partial^2 r_{OP}}{\partial\xi\,\partial\eta},\\
w_1 &= -\frac{k}{2(2+k)}\frac{\partial^2 r_{OP}}{\partial\xi\,\partial\zeta} = -\frac{\varkappa}{2}\frac{\partial^2 r_{OP}}{\partial\xi\,\partial\zeta},\\
u_2 &= -\frac{k}{2(2+k)}\frac{\partial^2 r_{OP}}{\partial\eta\,\partial\xi} = -\frac{\varkappa}{2}\frac{\partial^2 r_{OP}}{\partial\eta\,\partial\xi},\\
v_2 &= \frac{1+k}{2+k}\frac{1}{r_{OP}} - \frac{k}{2(2+k)}\frac{\partial^2 r_{OP}}{\partial \eta^2} = \frac{1}{2r_{OP}} + \varkappa\left\{\frac{1}{2r_{OP}} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 r_{OP}}{\partial \eta^2}\right\},\\
w_2 &= -\frac{k}{2(2+k)}\frac{\partial^2 r_{OP}}{\partial\eta\,\partial\zeta} = -\frac{\varkappa}{2}\frac{\partial^2 r_{OP}}{\partial\eta\,\partial\zeta},\\
u_3 &= -\frac{k}{2(2+k)}\frac{\partial^2 r_{OP}}{\partial\zeta\,\partial\xi} = -\frac{\varkappa}{2}\frac{\partial^2 r_{OP}}{\partial\zeta\,\partial\xi},\\
v_3 &= -\frac{k}{2(2+k)}\frac{\partial^2 r_{OP}}{\partial\zeta\,\partial\eta} = -\frac{\varkappa}{2}\frac{\partial^2 r_{OP}}{\partial\zeta\,\partial\eta},\\
w_3 &= \frac{1+k}{2+k}\frac{1}{r_{OP}} - \frac{k}{2(2+k)}\frac{\partial^2 r_{OP}}{\partial \zeta^2} = \frac{1}{2r_{OP}} + \varkappa\left\{\frac{1}{2r_{OP}} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 r_{OP}}{\partial \zeta^2}\right\}
\end{aligned}
$$

von (98), bei denen r_{OP} der Abstand des nach Annahme im Gebiet R gelegenen Koordinatenursprungs O des ξ, η, ζ-Systems von dem im Gebiet R_a liegenden Aufpunkt P ist, die neuen Randfunktionen

$$
(120)\quad
\begin{aligned}
\bar{\varrho} &= \varrho - l_1[u_1]_S - l_2[u_2]_S - l_3[u_3]_S,\\
\bar{\sigma} &= \sigma - l_1[v_1]_S - l_2[v_2]_S - l_3[v_3]_S,\\
\bar{\tau} &= \tau - l_1[w_1]_S - l_2[w_2]_S - l_3[w_3]_S.
\end{aligned}
$$

Setzt man sie in (108) statt ϱ, σ, τ ein, so ergibt sich zur Bestimmung der l_1, l_2, l_3 ein System von drei linearen inhomogenen Gleichungen, von dessen dreireihiger Koeffizientendeterminante $\Delta(\varkappa)$, die ja eine ganze transzendente Funktion in $\varkappa$ ist, wir in den nächsten Abschnitten zeigen werden, daß sie nicht identisch verschwindet.

Für alle Werte von $\varkappa$, für die weder die FREDHOLMsche Determinante (104) noch $\Delta(\varkappa)$ verschwindet, läßt sich eine Lösung der inhomogenen Integralgleichungen

$$\bar{f}(p;\varkappa) - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(S)} \{K_{\xi\xi}(p,p';\varkappa)\bar{f}(p';\varkappa) + K_{\xi\eta}(p,p';\varkappa)\bar{g}(p';\varkappa) + \\ + K_{\xi\zeta}(p,p';\varkappa)\bar{h}(p';\varkappa)\}\,d\sigma = \bar{\varrho}(p),$$

$$\bar{g}(p;\varkappa) - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(S)} \{K_{\eta\xi}(p,p';\varkappa)\bar{f}(p';\varkappa) + K_{\eta\eta}(p,p';\varkappa)\bar{g}(p';\varkappa) + \\ + K_{\eta\zeta}(p,p';\varkappa)\bar{h}(p';\varkappa)\}\,d\sigma = \bar{\sigma}(p),$$

$$\bar{h}(p;\varkappa) - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(S)} \{K_{\zeta\xi}(p,p';\varkappa)\bar{f}(p';\varkappa) + K_{\zeta\eta}(p,p';\varkappa)\bar{g}(p';\varkappa) + \\ + K_{\zeta\zeta}(p,p';\varkappa)\bar{h}(p';\varkappa)\}\,d\sigma = \bar{\tau}(p)$$

in der Form

$$\bar{f}(p;\varkappa) = \frac{\bar{F}(p;\varkappa)}{D^{(m)}\begin{pmatrix}p_1\,p_2\,p_3\\q_1\,q_2\,q_3\end{pmatrix};\varkappa)\,\Delta(\varkappa)}, \quad \bar{g}(p;\varkappa) = \frac{\bar{G}(p;\varkappa)}{D^{(m)}\begin{pmatrix}p_1\,p_2\,p_3\\q_1\,q_2\,q_3\end{pmatrix},\varkappa)\,\Delta(\varkappa)},$$

$$\bar{h}(p;\varkappa) = \frac{\bar{H}(p;\varkappa)}{D^{(m)}\begin{pmatrix}p_1\,p_2\,p_3\\q_1\,q_2\,q_3\end{pmatrix};\varkappa)\,\Delta(\varkappa)}$$

angeben, wobei wieder die jeweils im Zähler stehenden Funktionen in $\varkappa$ ganz transzendent sind und den Integralgleichungen

$$\begin{aligned}
&\bar{F}(p;\varkappa) - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(S)} \{K_{\xi\xi}(p,p';\varkappa)\,\bar{F}(p';\varkappa) + K_{\xi\eta}(p,p';\varkappa)\,\bar{G}(p';\varkappa) + \\
&\qquad + K_{\xi\zeta}(p,p';\varkappa)\,\bar{H}(p';\varkappa)\}\,d\sigma \\
&\qquad = D^{(m)}\begin{pmatrix}p_1\,p_2\,p_3\\q_1\,q_2\,q_3\end{pmatrix};\varkappa)\,\Delta(\varkappa)\,\bar{\varrho}(p),\\
&\bar{G}(p;\varkappa) - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(S)} \{K_{\eta\xi}(p,p';\varkappa)\,\bar{F}(p';\varkappa) + K_{\eta\eta}(p,p';\varkappa)\,\bar{G}(p';\varkappa) + \\
&\qquad + K_{\eta\zeta}(p,p';\varkappa)\,\bar{H}(p';\varkappa)\}\,d\sigma \\
&\qquad = D^{(m)}\begin{pmatrix}p_1\,p_2\,p_3\\q_1\,q_2\,q_3\end{pmatrix};\varkappa)\,\Delta(\varkappa)\,\bar{\sigma}(p),\\
&\bar{H}(p;\varkappa) - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(S)} \{K_{\zeta\xi}(p,p';\varkappa)\,\bar{F}(p';\varkappa) + K_{\zeta\eta}(p,p';\varkappa)\,\bar{G}(p';\varkappa) + \\
&\qquad + K_{\zeta\zeta}(p,p';\varkappa)\,\bar{H}(p';\varkappa)\}\,d\sigma \\
&\qquad = D^{(m)}\begin{pmatrix}p_1\,p_2\,p_3\\q_1\,q_2\,q_3\end{pmatrix};\varkappa)\,\Delta(\varkappa)\,\bar{\tau}(p)
\end{aligned} \tag{121}$$

genügen.

Mit den beim inneren Problem benutzten Methoden kann alsdann gezeigt werden, daß die Funktionen

$$
\begin{aligned}
&u(P;\varkappa)\\
&=\frac{\bar{u}^*(P;\varkappa)+D^{(m)}\begin{pmatrix}p_1p_2p_3\\ q_1q_2q_3\end{pmatrix};\varkappa)\,\Delta(\varkappa)\{l_1(\varkappa)u_1(P;\varkappa)+l_2(\varkappa)u_2(P;\varkappa)+l_3(\varkappa)u_3(P;\varkappa)\}}{D^{(m)}\begin{pmatrix}p_1p_2p_3\\ q_1q_2q_3\end{pmatrix};\varkappa)\,\Delta(\varkappa)},\\
&v(P;\varkappa)\\
(122)\quad&=\frac{\bar{v}^*(P;\varkappa)+D^{(m)}\begin{pmatrix}p_1p_2p_3\\ q_1q_2q_3\end{pmatrix};\varkappa)\,\Delta(\varkappa)\{l_1(\varkappa)v_1(P;\varkappa)+l_2(\varkappa)v_2(P;\varkappa)+l_3(\varkappa)v_3(P;\varkappa)\}}{D^{(m)}\begin{pmatrix}p_1p_2p_3\\ q_1q_2q_3\end{pmatrix};\varkappa)\,\Delta(\varkappa)},\\
&w(P;\varkappa)\\
&=\frac{\bar{w}^*(P;\varkappa)+D^{(m)}\begin{pmatrix}p_1p_2p_3\\ q_1q_2q_3\end{pmatrix};\varkappa)\,\Delta(\varkappa)\{l_1(\varkappa)w_1(P;\varkappa)+l_2(\varkappa)w_2(P;\varkappa)+l_3(\varkappa)w_3(P;\varkappa)\}}{D^{(m)}\begin{pmatrix}p_1p_2p_3\\ q_1q_2q_3\end{pmatrix};\varkappa)\,\Delta(\varkappa)}
\end{aligned}
$$

mit

$$
\begin{aligned}
\bar{u}^*(P;\varkappa) &= \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(S)}\{K_{\xi\xi}(P,p';\varkappa)\,\bar{F}(p';\varkappa)+K_{\xi\eta}(P,p';\varkappa)\,\bar{G}(p';\varkappa)+\\
&\qquad +K_{\xi\zeta}(P,p';\varkappa)\,\bar{H}(p';\varkappa)\}\,d\sigma,\\
(123)\quad \bar{v}^*(P;\varkappa) &= \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(S)}\{K_{\eta\xi}(P,p';\varkappa)\,\bar{F}(p';\varkappa)+K_{\eta\eta}(P,p';\varkappa)\,\bar{G}(p';\varkappa)+\\
&\qquad +K_{\eta\zeta}(P,p';\varkappa)\,\bar{H}(p';\varkappa)\}\,d\sigma,\\
\bar{w}^*(P;\varkappa) &= \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(S)}\{K_{\zeta\xi}(P,p';\varkappa)\,\bar{F}(p';\varkappa)+K_{\zeta\eta}(P,p';\varkappa)\,\bar{G}(p';\varkappa)+\\
&\qquad +K_{\zeta\zeta}(P,p';\varkappa)\,\bar{H}(p';\varkappa)\}\,d\sigma,
\end{aligned}
$$

die für $\varkappa$-Werte, für welche die Determinanten (104) und $\Delta(\varkappa)$ nicht verschwinden, offenbar den Gleichungen (98) genügen, und deren Randwerte für solche $\varkappa$-Werte $\varrho(p)$, $\sigma(p)$ und $\tau(p)$ sind, stets in einer gewissen Umgebung der Stelle $\varkappa = k = -1$ regulär analytisch in $\varkappa$ sind. Bei dem Beweise beachte man, daß hier als Analogon zu (78) für die Randwerte der Zählerfunktionen in (122)

$$
\begin{aligned}
\bar{u}^*(p;\varkappa)+D^{(m)}\begin{pmatrix}p_1p_2p_3\\ q_1q_2q_3\end{pmatrix};\varkappa)\,\Delta(\varkappa)\{l_1(\varkappa)u_1(p;\varkappa)+l_2(\varkappa)u_2(p;\varkappa)+l_3(\varkappa)u_3(p;\varkappa)\}\\
= D^{(m)}\begin{pmatrix}p_1p_2p_3\\ q_1q_2q_3\end{pmatrix};\varkappa)\,\Delta(\varkappa)\,\varrho(p)
\end{aligned}
$$

und für die Randwerte ihrer partiellen Ableitungen nach $\varkappa$ als Analogon zu (82)

$$\lim_{P_n^a \to p} \frac{\partial^i}{\partial \varkappa^i} \Big[\bar{u}^*(P_n^a; \varkappa) + D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1 p_2 p_3 \\ q_1 q_2 q_3 \end{pmatrix}, \varkappa\Big) \varDelta(\varkappa) \{l_1(\varkappa)\, u_1(P_n^a; \varkappa) +$$
$$+ l_2(\varkappa)\, u_2(P_n^a; \varkappa) + l_3(\varkappa)\, u_3(P_n^a; \varkappa)\}\Big]$$
$$= \frac{\partial^i}{\partial \varkappa^i} \Big[D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1 p_2 p_3 \\ q_1 q_2 q_3 \end{pmatrix}; \varkappa\Big) \varDelta(\varkappa)\, \bar{\varrho}(p; \varkappa)\Big] +$$
$$+ \frac{\partial^i}{\partial \varkappa^i} \Big[D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1 p_2 p_3 \\ q_1 q_2 q_3 \end{pmatrix}; \varkappa\Big) \varDelta(\varkappa) \{l_1(\varkappa)\, u_1(p; \varkappa) + l_2(\varkappa)\, u_2(p; \varkappa) + l_3(\varkappa)\, u_3(p; \varkappa)\}\Big]$$
$$= \frac{\partial^i}{\partial \varkappa^i} \Big[D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1 p_2 p_3 \\ q_1 q_2 q_3 \end{pmatrix}; \varkappa\Big) \varDelta(\varkappa)\, \varrho(p)\Big] = \frac{\partial^i D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1 p_2 p_3 \\ q_1 q_2 q_3 \end{pmatrix}; \varkappa\Big) \varDelta(\varkappa)}{\partial \varkappa^i}\, \varrho(p)$$

und Entsprechendes für die Zählerfunktionen von $v(P; \varkappa)$ und $w(P; \varkappa)$ gilt.

Schreibt man aber

$$\text{(124)} \quad \begin{gathered} u(P; -1) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{u(P; \varkappa)}{\varkappa + 1}\, d\varkappa, \quad v(P; -1) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{v(P; -1)}{\varkappa + 1}\, d\varkappa, \\ w(P; -1) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{w(P; -1)}{\varkappa + 1}\, d\varkappa, \end{gathered}$$

wobei die Integrale über einen in der $\varkappa$-Ebene gelegenen Kreis mit dem Mittelpunkt $\varkappa = -1$ erstreckt werden, der so gewählt ist, daß in seinem Innern und auf seinem Rande eventuell mit Ausnahme des Punktes $\varkappa = -1$ keine Nullstelle von $D^{(m)}(\varkappa)$ mit $\varDelta(\varkappa)$ liegt, so folgt

$$u(p; -1) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\varrho(p)}{\varkappa + 1}\, d\varkappa = \varrho(p), \quad v(p; -1) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\sigma(p)}{\varkappa + 1}\, d\varkappa = \sigma(p),$$
$$w(p; -1) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\tau(p)}{\varkappa + 1}\, d\varkappa = \tau(p),$$

und man erkennt, daß die Funktionen

$$u(P; -1), \quad v(P; -1), \quad w(P; -1)$$

das Problem (96), (97) lösen, womit Satz 8 bewiesen ist. Die Behauptungen von Satz 9 und 10 lassen sich dann unmittelbar mit den beim inneren Problem benutzten Methoden unter Verwendung von (124) bestätigen[49].

---

[49]) Man beachte dabei, daß die partiellen Ableitungen dritter Ordnung von U im Unendlichen wie $\frac{1}{r_{OP}^3}$ verschwinden, wie unmittelbar aus (30) zu erkennen ist.

6. Es ist noch der Beweis der Tatsache nachzutragen, daß $\Delta(\varkappa)$ nicht identisch in $\varkappa$ verschwinden kann. Wir werden dazu in mehreren Schritten den Hilfssatz beweisen: *Es gilt* $\Delta(0) \neq 0$.

Ist $f_2(p)$, $g_2(p)$, $h_2(p)$ eine beliebige nicht identisch verschwindende Lösung des Systems (106) für $\varkappa = k = 0$, d. h. liegen drei nicht sämtlich identisch verschwindende Funktionen vor, die den Integralgleichungen

$$
(125)\quad
\begin{aligned}
f_2(p) - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(S)} \frac{\cos(r_{p'p}, n_p)}{r_{p'p}^2} f_2(p')\,d\sigma &= 0,\\
g_2(p) - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(S)} \frac{\cos(r_{p'p}, n_p)}{r_{p'p}^2} g_2(p')\,d\sigma &= 0,\\
h_2(p) - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(S)} \frac{\cos(r_{p'p}, n_p)}{r_{p'p}^2} h_2(p')\,d\sigma &= 0
\end{aligned}
$$

genügen, so wird behauptet, daß die mit ihnen gebildeten Potentiale der einfachen Schicht

$$
(126)\quad
\begin{gathered}
u'(P) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(S)} \frac{1}{r_{p'P}} f_2(p')\,d\sigma, \qquad v'(P) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(S)} \frac{1}{r_{p'P}} g_2(p')\,d\sigma,\\
w'(P) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(S)} \frac{1}{r_{p'P}} h_2(p')\,d\sigma,
\end{gathered}
$$

die ja bekanntlich im ganzen Raume stetig sind, in R durchweg konstant sein müssen. Es genügt, den Beweis für $u'(P)$ zu führen.

Wir gehen von der für eine beliebige Funktion $u'(P)$, für die in R die Potentialgleichung $\Delta u' = 0$ erfüllt ist, gültigen Integralformel

$$
(127)\quad \iiint\limits_{(R)} \left\{\left(\frac{\partial u'}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial u'}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial u'}{\partial \zeta}\right)^2\right\} d\tau + \iint\limits_{(S)} [u']_S \left[\frac{\partial u'}{\partial n_{p'}}\right]_S d\sigma = 0
$$

aus, bei der vorausgesetzt wird, daß das in ihr vorkommende Flächenintegral $\iint\limits_{(S)}$ als $\lim\limits_{n\to\infty} \iint\limits_{(S_n)}$ existiert. Die Gleichung (127) gilt offenbar auch für das Außengebiet R_a, wenn dort $\Delta u' = 0$ ist, und u' im Unendlichen wie $\frac{1}{r_{OP}}$ verschwindet, während die partiellen Ableitungen erster Ordnung dort wie $\frac{1}{r_{OP}^2}$ gegen Null gehen.

7. Ist nun P_n^i bzw. P_n^a eine in R bzw. in R_a gelegene Punktfolge, die längs n_p gegen p konvergiert, so bestehen für die durch (126) gegebene Funktion $u'(P)$

nach einem bekannten Satz der Potentialtheorie, der auch bei unseren Voraussetzungen über S zutrifft[50]), die Limesrelationen

$$(128)\quad \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\partial}{\partial n_p}\iint\limits_{(S)}\frac{f_2(p')}{r_{p'P}}\,d\sigma\right]_{P=P_n^i} = -2\pi f_2(p) + \iint\limits_{(S)} f_2(p')\frac{\cos(r_{p'p}, n_p)}{r_{p'p}^2}\,d\sigma = 0,$$

$$(129)\quad \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\partial}{\partial n_p}\iint\limits_{(S)}\frac{f_2(p')}{r_{p'P}}\,d\sigma\right]_{P=P_n^a} = 2\pi f_2(p) + \iint\limits_{(S)} f_2(p')\frac{\cos(r_{p'p}, n_p)}{r_{p'p}^2}\,d\sigma.$$

Da die Konvergenz aber in bezug auf die Lage des Punktes p gleichmäßig erfolgt, so gelten diese Limesbeziehungen auch bei beliebiger Annäherung der Punktfolge P_n^i bzw. P_n^a an den Punkt p.

Wählt man nun die Punktfolge P_n^i derart, daß jeder Punkt P_n^i auch Punkt einer Fläche S_n der ganz in R gelegenen Folge von gegen S konvergierenden Approximationsflächen ist und als solcher mit p_n^i bezeichnet werde, so soll bewiesen werden, daß die Limesrelation

$$(130)\quad \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\partial}{\partial n_{p_n^i}}\iint\limits_{(S)}\frac{f_2(p')}{r_{p'P}}\,d\sigma\right]_{P=p_n^i} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\partial}{\partial n_p}\iint\limits_{(S)}\frac{f_2(p')}{r_{p'P}}\,d\sigma\right]_{P=p_n^i}$$

besteht. Da der rechts stehende Grenzwert existiert, so genügt es zu zeigen, daß

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\partial}{\partial n_{p_n^i}}\iint\limits_{(S)}\frac{f_2(p')}{r_{p'P}}\,d\sigma - \frac{\partial}{\partial n_p}\iint\limits_{(S)}\frac{f_2(p')}{r_{p'P}}\,d\sigma\right]_{P=p_n^i}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\iint\limits_{(S)} f_2(p')\,\frac{\cos\left(r_{p'p_n^i}, n_p\right) - \cos\left(r_{p'p_n^i}, n_{p_n^i}\right)}{r^2_{p'p_n^i}}\,d\sigma$$
$$= 0$$

ist. Versteht man aber unter s den Teil von S, dessen Projektion auf die Tangentialebene im Punkte p ein Kreis vom Radius ϱ_0 um p ist, und zerlegt man das letzte Flächenintegral $\iint\limits_{(S)}$ in $\iint\limits_{(s)} + \iint\limits_{(S-s)}$, so ist klar, daß die behauptete Limesbeziehung für $\iint\limits_{(S-s)}$ richtig ist. Um sie aber auch für $\iint\limits_{(s)}$ nachzuweisen, schreiben wir, falls mit x, y, z ein im Punkte p lokales Koordinatensystem bezeichnet wird,

$$\cos(r_{p'p_n^i}, n_p) - \cos(r_{p'p_n^i}, n_{p_n^i})$$
$$= \cos(r_{p'p_n^i}, x)\{\cos(x, n_p) - \cos(x, n_{p_n^i})\} +$$
$$+ \cos(r_{p'p_n^i}, y)\{\cos(y, n_p) - \cos(y, n_{p_n^i})\} +$$
$$+ \cos(r_{p'p_n^i}, z)\{\cos(z, n_p) - \cos(z, n_{p_n^i})\}.$$

[50]) Vgl. J. Schauder, l. c., Anm. [14]), insbes. S. 636.

Die Komponenten des Normalvektors im Punkte p bzw. p_n^i sind aber durch

$$\left\{-\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\omega},\ -\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}{\omega},\ \frac{1}{\omega}\right\} \qquad \left(\omega = \sqrt{1+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}\right)$$

bzw.

$$\left\{-\frac{\frac{\partial\varphi_n}{\partial x}}{\omega_n},\ -\frac{\frac{\partial\varphi_n}{\partial y}}{\omega_n},\ \frac{1}{\omega_n}\right\} \qquad \left(\omega_n = \sqrt{1+\left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial y}\right)^2}\right)$$

gegeben, wobei z. B.

$$\frac{\partial\varphi(p)}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial G(p)}{\partial x}}{\frac{\partial G(p)}{\partial z}},\quad \frac{\partial\varphi_n(p)}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial G(p_n^i)}{\partial x}}{\frac{\partial G(p_n^i)}{\partial z}} \quad \left(\frac{\partial G(p)}{\partial z} \neq 0,\ \frac{\partial G(p_n^i)}{\partial z} \neq 0\right)$$

ist, wenn man unter $G(x, y, z)$ die bereits im § 4, Abschnitt 2 zur Definition der Flächen S_n benutzte GREENsche Funktion für das Gebiet R versteht. Da nun nach bekannten Sätzen über Potentialfunktionen bei unseren Voraussetzungen über die Berandung die partiellen Ableitungen erster Ordnung von $G(x, y, z)$ in $R + S$ einer H-Bedingung mit dem Exponenten λ genügen[51]), so erhalten wir die Abschätzung

$$\left|\cos(r_{p'p_n^i}, n_p) - \cos(r_{p'p_n^i}, n_{p_n^i})\right| < K r_{pp_n^i}^{\lambda}.$$

Für das abzuschätzende Integral ergibt sich also gleichmäßig für alle Punkte p von S die obere Schranke

$$\iint\limits_{(s)} \leqq K r_{pp_n^i}^{\lambda} \iint\limits_{(s)} \frac{1}{r_{p'p_n^i}^2}\, d\sigma.$$

Der rechts stehende Ausdruck muß für $n \to \infty$ gegen Null gehen. Denn ist für den Augenblick der Punkt p_n^i auf der Normalen im Punkte p gelegen und ist $h_n = r_{pp_n^i}$, so gilt nach (2)

$$\begin{aligned} r_{pp_n^i}^{\lambda} \iint\limits_{(s)} \frac{1}{r_{p'p_n^i}^2}\, d\sigma &= h_n^{\lambda} \iint\limits_{(s)} \left\{\frac{1}{t'^2 + h_n^2} + 0\left[\frac{1}{(t'^2 + h_n^2)^{1-\frac{\lambda}{2}}}\right]\right\} d\sigma \\ &= h_n^{\lambda}\left\{\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\varrho_0} \frac{\varrho\, d\varrho}{\varrho^2 + h_n^2} + 0\,[1]\right\} \\ &= h_n^{\lambda}\left\{\pi\left(\log(\varrho_0^2 + h_n^2) - \log h_n^2\right) + 0\,[1]\right\}. \end{aligned}$$

[51]) Vgl. J. SCHAUDER, l. c., Anm. [14]), insbes. S. 635, und O. D. KELLOG, l. c., Anm. [15]), insbes. S. 508.

Nach der bereits mehrfach benutzten Schlußweise muß dann aber auch der Ausdruck bei beliebiger Annäherung an den Punkt p gegen Null gehen.

Im Anschluß an (129) lassen sich entsprechende Betrachtungen anstellen, wenn man für die P_n^a eine Folge von Punkten wählt, die auf den in R_a gelegenen Approximationsflächen S_n^a liegen, so daß

$$(131) \qquad \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\partial}{\partial n_{p_n^a}}\iint\limits_{(S)}\frac{f_2(p')}{r_{p'P}}\,d\sigma\right]_{P=p_n^a}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\partial}{\partial n_p}\iint\limits_{(S)}\frac{f_2(p')}{r_{p'P}}\,d\sigma\right]_{P=p_n^a}$$

ist.

N. B. Mit Sätzen aus der Theorie des Potentials der einfachen Schicht könnte man zeigen, daß die durch (125) und (126) gegebene Funktion $u'(P)$ in $R+S$ stetige erste partielle Ableitungen besitzt [52]), so daß (130) auch unmittelbar aus

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\partial u'(P)}{\partial n_{p_n^i}}\right]_{P=p_n^i}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left[\frac{\partial u'(P)}{\partial\xi}\right]_{P=p_n^i}\cos(\xi, n_{p_n^i})+\left[\frac{\partial u'(P)}{\partial\eta}\right]_{P=p_n^i}\cos(\eta, n_p^i)+\left[\frac{\partial u'(P)}{\partial\zeta}\right]_{P=p_n^i}\cos(\zeta, n_{p_n^i})\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left[\frac{\partial u'(P)}{\partial\xi}\right]_{P=p_n^i}\cos(\xi, n_p)+\left[\frac{\partial u'(P)}{\partial\eta}\right]_{P=p_n^i}\cos(\eta, n_p)+\left[\frac{\partial u'(P)}{\partial\zeta}\right]_{P=p_n^i}\cos(\zeta, n_p)\right\}$$

folgen würde.

8. Wendet man nun (127) zunächst auf den Bereich R_n+S_n an, so erhält man bei Beachtung von (130) und (128), wenn man zur Grenze $n\to\infty$ übergeht, daß in ganz R

$$(132) \qquad u'(P)=a',\quad v'(P)=b',\quad w'(P)=c'$$

sein muß, wo a', b', c' drei Konstanten sind, von denen wir zunächst zeigen wollen, daß sie nicht sämtlich verschwinden können.

Aus $a'=b'=c'=0$ würde nämlich, da die Funktionen $u'(P)$, $v'(P)$, $w'(P)$ im ganzen Raume stetig sind,

$$(133) \qquad \lim_{n\to\infty}u'(p_n^a)=0,\quad \lim_{n\to\infty}v'(p_n^a)=0,\quad \lim_{n\to\infty}w'(p_n^a)=0$$

folgen. Da jedoch nach (131) und (129) der in (131) auf der linken Seite stehende Grenzwert existiert und die Funktionen $u'(P)$, $v'(P)$, $w'(P)$ im Unendlichen

---

[52]) Vgl. J. SCHAUDER, l. c., Anm. [14]), insbes. S. 635—640.

wie $\frac{1}{r_{OP}}$ verschwinden, während ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung dort wie $\frac{1}{r_{OP}^2}$ gegen Null gehen, so folgt aus dem Integralsatz (127), wenn man ihn zunächst auf den Bereich $R_n^a + S_n^a$ anwendet, und dann zur Grenze $n \to \infty$ übergeht und (133) beachtet, daß im Gebiet R_a

$$u'(P) \equiv 0, \quad v'(P) \equiv 0, \quad w'(P) \equiv 0$$

und damit ebendort

$$\frac{\partial u'(P)}{\partial n_p} \equiv 0, \quad \frac{\partial v'(P)}{\partial n_p} \equiv 0, \quad \frac{\partial w'(P)}{\partial n_p} \equiv 0$$

sein müßte. Aus (129) könnte man dann aber auf

$$f_2(p) + \frac{1}{2\pi} \iint_{(S)} f_2(p') \frac{\cos(r_{p'p}, n_p)}{r_{p'p}^2} d\sigma = 0,$$

$$g_2(p) + \frac{1}{2\pi} \iint_{(S)} g_2(p') \frac{\cos(r_{p'p}, n_p)}{r_{p'p}^2} d\sigma = 0,$$

$$h_2(p) + \frac{1}{2\pi} \iint_{(S)} h_2(p') \frac{\cos(r_{p'p}, n_p)}{r_{p'p}^2} d\sigma = 0$$

schließen. Daraus würde jedoch wegen (125) im Widerspruch zur Annahme

$$f_2(p) \equiv 0, \quad g_2(p) \equiv 0, \quad h_2(p) \equiv 0$$

folgen.

9. Wählt man nunmehr für $f_2(p)$, $g_2(p)$, $h_2(p)$ der Reihe nach die drei linear unabhängigen Lösungssysteme (107) von (106) mit $\varkappa = 0$, so sind die mit ihnen gebildeten Funktionen (126), die bzw. mit u_1', v_1', w_1', u_2', v_2', w_2', u_3', v_3', w_3' bezeichnet seien nach dem vorhergehenden Abschnitt in R sämtlich konstant:

$$\text{(134)} \qquad \begin{aligned} u_1' &= a_1, & v_1' &= b_1, & w_1' &= c_1, \\ u_2' &= a_2, & v_2' &= b_2, & w_2' &= c_2, \\ u_3' &= a_3, & v_3' &= b_3, & w_3' &= c_3. \end{aligned}$$

Es muß dann

$$\text{(135)} \qquad D = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

sein. Denn andernfalls würde es drei Zahlen $k_1, k_2, k_3 \neq 0, 0, 0$ derart geben, daß

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3 = 0,$$
$$k_1 b_1 + k_2 b_2 + k_3 b_3 = 0,$$
$$k_1 c_1 + k_2 c_2 + k_3 c_3 = 0$$

ist. Bildet man dann mit

$$
(136)\qquad \begin{aligned} f_2 &= k_1 f_{21} + k_2 f_{22} + k_3 f_{23}, \\ g_2 &= k_1 g_{21} + k_2 g_{22} + k_3 g_{23}, \\ h_2 &= k_1 h_{21} + k_2 h_{22} + k_3 h_{23} \end{aligned}
$$

die Funktionen (126), so muß für sie offenbar in R

$$
u' \equiv k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3 = 0, \quad v' \equiv k_1 b_1 + k_2 b_2 + k_3 b_3 = 0,
$$
$$
w' \equiv k_1 c_1 + k_2 c_2 + k_3 c_3 = 0
$$

sein. Nach dem im vorhergehenden Abschnitt benutzten Schluß würde also

$$
f_2(p) \equiv 0, \quad g_2(p) \equiv 0, \quad h_2(p) \equiv 0
$$

folgen, was jedoch gemäß (136) im Widerspruch zu der Bedeutung von f_{21}, f_{22}, f_{23}, g_{21}, g_{22}, g_{23}, h_{21}, h_{22}, h_{23} zu der Aussage führt, daß diese Lösungssysteme von (106) linear abhängig wären.

10. Beachtet man nun, daß für die durch (119) gegebenen Funktionen

$$
\begin{array}{lll} u_1(p;0) = \dfrac{1}{2 r_{p0}}, & v_1(p;0) = 0, & w_1(p;0) = 0, \\ u_2(p;0) = 0, & v_2(p;0) = \dfrac{1}{2 r_{p0}}, & w_2(p;0) = 0, \\ u_3(p;0) = 0, & v_3(p;0) = 0, & w_3(p;0) = \dfrac{1}{2 r_{p0}} \end{array}
$$

gilt, und daß man infolgedessen wegen (134) für die Elemente der Determinante

$$
\Delta(0) = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{vmatrix}
$$

in der ersten Zeile

$$
\delta_{11} = \iint\limits_{(S)} \{f_{21}(p';0) u_1(p';0) + g_{21}(p';0) v_1(p';0) + h_{21}(p';0) w_1(p';0)\} d\sigma = \pi a_1,
$$
$$
\delta_{12} = \iint\limits_{(S)} \{f_{21}(p';0) u_2(p';0) + g_{21}(p';0) v_2(p';0) + h_{21}(p';0) w_2(p';0)\} d\sigma = \pi b_1,
$$
$$
\delta_{13} = \iint\limits_{(S)} \{f_{21}(p';0) u_3(p';0) + g_{21}(p';0) v_3(p';0) + h_{21}(p';0) w_3(p';0)\} d\sigma = \pi c_1
$$

und entsprechende Werte für δ_{21}, δ_{22}, δ_{23}, δ_{31}, δ_{32}, δ_{33} erhält, so ist unmittelbar aus (135) zu ersehen, daß

$$
\Delta(0) = \pi^3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0
$$

ist, womit der im Abschnitt 6 dieses Paragraphen formulierte Hilfssatz bewiesen ist.

§ 6.

Das innere Problem in der Ebene.

1. Es handelt sich in diesem Paragraphen darum, den folgenden Existenz- und Eindeutigkeitssatz zu beweisen:

Hauptsatz III. *Genügt die Randkurve S des einfach zusammenhängenden, ganz im Endlichen gelegenen Gebietes R den in* § 1 *genannten Voraussetzungen, und sind die auf S definierten Funktionen ϱ und σ dort stetig und genügen sie der Relation*

$$\int\limits_{(S)} \{\varrho(p')\cos(n'_p, \eta) - \sigma(p')\cos(n'_p, \xi)\}\, ds = 0, \tag{137}$$

dann gibt es (bis auf eine additive Konstante) genau eine in R biharmonische Funktion U, deren partielle Ableitungen erster Ordnung in $R + S$ stetig sind und auf S bzw. mit ϱ und σ übereinstimmen.

Existiert eine biharmonische Funktion mit den verlangten Eigenschaften, so gilt mit

$$u = \frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad v = \frac{\partial U}{\partial \eta}, \quad \vartheta = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} = \Delta U \tag{138}$$

offensichtlich in R

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \xi}, \quad \Delta\vartheta = 0 \tag{139}$$

und

$$[u]_S = \varrho, \quad [v]_S = \sigma, \tag{140}$$

und umgekehrt folgt aus dem Bestehen von (139), (140) und (137) die Existenz einer Funktion U, für die die Gleichungen (138) erfüllt sind, so daß sie das ursprüngliche Problem löst.

Die Bedingung (137) ist, damit das Problem überhaupt eine Lösung hat, wie man aus dem Gaussschen Satz erkennt, sicherlich notwendig, sie erweist sich aber auch zusammen mit den anderen Voraussetzungen als hinreichend. Indem wir uns daher lediglich mit dem Problem (139), (140) zusammen mit (137) beschäftigen, zeigen wir zunächst den

Satz 11. *Sind die Funktionen ϱ und σ auf S stetig und genügen sie der Relation* (137), *so existiert eine Lösung des Problems* (139), (140).

Den Beweisgang, für den die im räumlichen Fall benutzten Methoden versagen, können wir unter Ausfüllung einiger Lücken und Verallgemeinerung auf die von uns zugrunde gelegten Voraussetzungen über S einer Arbeit von G. Lauricella [53]) entnehmen.

---

[53]) G. Lauricella, l. c., Anm. [5]).

2. Mit den abkürzenden Bezeichnungen

$$(141)\quad \begin{aligned} K_{\xi\xi}(P, p) &= \left(\frac{\partial r_{pP}}{\partial \eta}\right)^2 \frac{\partial\left(\log \frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p} = \frac{\cos^2(r_{pP}, \eta)\cos(r_{pP}, n_p)}{r_{pP}}; \\ K_{\xi\eta}(P, p) = K_{\eta\xi}(P, p) &= -\frac{\partial r_{pP}}{\partial \xi}\frac{\partial r_{pP}}{\partial \eta}\frac{\partial\left(\log \frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p} \\ &= -\frac{\cos(r_{pP}, \xi)\cos(r_{pP}, \eta)\cos(r_{pP}, n_p)}{r_{pP}}, \\ K_{\eta\eta}(P, p) &= \left(\frac{\partial r_{pP}}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial\left(\log \frac{1}{r_{pP}}\right)}{d n_p} = \frac{\cos^2(r_{pP}, \xi)\cos(r_{pP}, n_p)}{r_{pP}} \end{aligned}$$

betrachte man das inhomogene System von FREDHOLMschen Integralgleichungen

$$(142)\quad \begin{aligned} f(p) + \frac{2}{\pi}\int_{(S)} \{K_{\xi\xi}(p, p')f(p') + K_{\xi\eta}(p, p')g(p')\}ds &= \varrho(p), \\ g(p) + \frac{2}{\pi}\int_{(S)} \{K_{\eta\xi}(p, p')f(p') + K_{\eta\eta}(p, p')g(p')\}ds &= \sigma(p). \end{aligned}$$

Von dem zu dem entsprechenden homogenen Gleichungssystem

$$(143)\quad \begin{aligned} f_1(p) + \frac{2}{\pi}\int_{(S)} \{K_{\xi\xi}(p, p')f_1(p') + K_{\xi\eta}(p, p')g_1(p')\}ds &= 0, \\ g_1(p) + \frac{2}{\pi}\int_{(S)} \{K_{\eta\xi}(p, p')f_1(p') + K_{\eta\eta}(p, p')g_1(p')\}ds &= 0 \end{aligned}$$

gehörigen assoziierten Gleichungssystem

$$(144)\quad \begin{aligned} f_2(p) + \frac{2}{\pi}\int_{(S)} \{K_{\xi\xi}(p', p)f_2(p') + K_{\xi\eta}(p', p)g_2(p')\}ds &= 0, \\ g_2(p) + \frac{2}{\pi}\int_{(S)} \{K_{\eta\xi}(p', p)f_2(p') + K_{\eta\eta}(p', p)g_2(p')\}ds &= 0 \end{aligned}$$

kann man durch direkte Rechnung zeigen, daß es die Lösung

$$f_2(p) = \cos(n_p, \eta), \quad g_2(p) = -\cos(n_p, \xi)$$

besitzt. Denn es wird nach (50) und (51)

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_{(S)}\{K_{\xi\xi}(p', p)\cos(n'_p, \eta) - K_{\xi\eta}(p', p)\cos(n'_p, \xi)\}\,ds$$

$$= \frac{2}{\pi}\int\limits_{(S)}\frac{\partial r_{p'p}}{\partial\eta}\left\{\frac{\partial r_{p'p}}{\partial\eta}\cos(n_{p'}, \eta) + \frac{\partial r_{p'p}}{\partial\xi}\cos(n_{p'}, \xi)\right\}\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'p}}\right)}{\partial n_p}\,ds$$

$$= \frac{2}{\pi}\int\limits_{(S)}\frac{\partial r_{p'p}}{\partial\eta}\,\frac{\partial r_{p'p}}{\partial n_{p'}}\,\frac{1}{r_{p'p}}\,\frac{\partial r_{p'p}}{\partial n_p}\,ds = -\frac{2}{\pi}\int\limits_{(S)}\frac{\partial r_{p'p}}{\partial\eta}\,\frac{\partial r_{p'p}}{\partial n_p}\,\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'p}}\right)}{\partial n_{p'}}\,ds$$

$$= -\frac{2}{\pi}\int\limits_{(S)}\frac{\partial r_{p'p}}{\partial\eta}\left\{\frac{\partial r_{p'p}}{\partial\xi}\cos(n_p, \xi) + \frac{\partial r_{p'p}}{\partial\eta}\cos(n_p, \eta)\right\}\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'p}}\right)}{\partial n_{p'}}\,ds$$

$$= -\frac{2}{\pi}\cos(n_p, \xi)\int\limits_{(S)}\frac{\partial r_{p'p}}{\partial\xi}\,\frac{\partial r_{p'p}}{\partial\eta}\,\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'p}}\right)}{\partial n_{p'}}\,ds -$$

$$- \frac{2}{\pi}\cos(n_p, \eta)\int\limits_{(S)}\left(\frac{\partial r_{p'p}}{\partial\eta}\right)^2\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'p}}\right)}{\partial n_{p'}}\,ds$$

$$= -\cos(n_p, \eta)$$

und ebenso

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_{(S)}\{K_{\eta\xi}(p', p)\cos(n_{p'}, \eta) - K_{\eta\eta}(p', p)\cos(n_{p'}, \xi)\}\,ds = \cos(n_p, \xi).$$

Damit besitzt auch (143) mindestens eine nicht triviale Lösung $f_1(p)$, $g_1(p)$, von der man mit denselben Betrachtungen wie in § 4, Abschnitt 6 unter Verwendung der in § 3, Abschnitt 12 gewonnenen ebenen Analoga der Hilfssätze 2 bis 6 von § 3 zeigen kann, daß sie eine Tangentialableitung besitzen, die auf S einer gleichmäßigen H-Bedingung mit dem Kurvenexponenten λ genügt.

In den nächsten Abschnitten wollen wir in mehreren Schritten nachweisen, daß jede weitere Lösung $\bar{f}_1(p)$, $\bar{g}_1(p)$ von (143) ein Vielfaches von $f_1(p)$, $g_1(p)$ sein muß.

3. Als direkte Folgerung aus einer Greenschen Formel läßt sich für eine im Gebiet R existierende beliebige Lösung u, v von (139) der Integralsatz

$$(145)\quad \iint\limits_{(R)}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial\xi}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi} - \frac{\partial v}{\partial\eta}\right)^2\right\}d\xi\,d\eta +$$

$$+ \int\limits_{(S)}\{[u]_S\,X_{u,v}(p', p') + [v]_S\,Y_{u,v}(p', p')\}\,ds = 0$$

ableiten, wenn man zu der durch (138) in R definierten Potentialfunktion ϑ eine konjugierte Potentialfunktion χ durch

$$(146)\qquad \frac{\partial\vartheta}{\partial\xi} = \frac{\partial\chi}{\partial\eta}, \quad \frac{\partial\vartheta}{\partial\eta} = -\frac{\partial\chi}{\partial\xi}$$

einführt und

(147)

$$X_{u,v}(P,p) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u(P)}{\partial \xi} - \frac{\partial v(P)}{\partial \eta}\right)\cos(n_p,\xi) + \left(\frac{\partial u(P)}{\partial \eta} - \frac{1}{2}\chi(P)\right)\cos(n_p,\eta),$$

$$Y_{u,v}(P,p) = \left(\frac{\partial v(P)}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\chi(P)\right)\cos(n_p,\xi) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v(P)}{\partial \eta} - \frac{\partial u(P)}{\partial \xi}\right)\cos(n_p,\eta)$$

setzt, und wenn von dem auf der linken Seite in (145) stehenden Kurvenintegral vorausgesetzt wird, daß es als $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{(S_n^i)}$ existiert, wobei die S_n^i, analog wie beim räumlichen Fall, eine Folge von in R gelegenen, durch die zu R gehörige Greensche Funktion gegebenen, gegen S konvergierenden analytischen Approximationskurven sind. Die Formel (145) gilt auch für das Außengebiet R_a, falls die Funktionen u und v den Gleichungen (139) genügen, im Unendlichen beschränkt sind, und ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung dort wie $\frac{1}{r_{OP}^2}$ verschwinden, und falls weiterhin das Kurvenintegral als $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{S_n^a}$ existiert.

Den Beweis von (145) erbringen wir, indem wir für zwei beliebige im Gebiet R existierende Lösungen u, v und $\bar{u}$, $\bar{v}$ von (139) die Richtigkeit des für spätere Zwecke benötigten allgemeineren Integralsatzes

$$(148)\quad \iint\limits_{(R)}\left\{\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial v}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta}\right)\right\} d\xi\, d\eta +$$

$$+ \int\limits_{(S)}\left\{[u]_S X_{\bar{u},\bar{v}}(p',p') + [v]_S Y_{\bar{u},\bar{v}}(p',p')\right\} ds = 0$$

aufzeigen, wobei das Kurvenintegral $\int\limits_{(S)}$ wieder als $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{(S_n^i)}$ existieren soll. Ein entsprechender Integralsatz gilt für das Außengebiet R_a.

Das links auftretende Flächenintegral zerlege man nämlich in die beiden Integrale

$$\frac{1}{2}\iint\limits_{(R)}\left\{\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta}\right\} d\xi\, d\eta$$

und

$$\frac{1}{2}\iint\limits_{(R)}\left\{\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}\frac{\partial v}{\partial \eta}\right\} d\xi\, d\eta.$$

Für das erste Integral findet man nach einer GREENschen Formel

$$\frac{1}{2}\iint\limits_{(R)}\left\{\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \bar u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \bar u}{\partial \eta}+\frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial \bar v}{\partial \xi}+\frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial \bar v}{\partial \eta}\right\}d\xi\,d\eta$$

$$= -\frac{1}{2}\iint\limits_{(R)}\{u\,\Delta\bar u + v\,\Delta\bar v\}d\xi\,d\eta -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{(S)}\left\{u\left(\frac{\partial \bar u}{\partial \xi}\cos(n_{p'},\xi)+\frac{\partial \bar u}{\partial \eta}\cos(n_{p'},\eta)\right)+\right.$$

$$\left.-\,v\left(\frac{\partial \bar v}{\partial \xi}\cos(n_{p'},\xi)+\frac{\partial \bar v}{\partial \eta}\cos(n_{p'},\eta)\right)\right\}ds.$$

Da nun

$$\Delta\bar u - \frac{\partial\bar\vartheta}{\partial\xi} = 0,\qquad \Delta\bar v - \frac{\partial\bar\vartheta}{\partial\eta} = 0$$

ist, so erhält man nach dem GAUSSschen Integralsatz

$$\iint\limits_{(R)}\{u\,\Delta\bar u + v\,\Delta\bar v\}d\xi\,d\eta = \iint\limits_{(R)}\left\{u\left(\Delta\bar u - \frac{\partial\bar\vartheta}{\partial\xi}\right)+v\left(\Delta\bar v-\frac{\partial\bar\vartheta}{\partial\eta}\right)\right\}d\xi\,d\eta +$$

$$+\iint\limits_{(R)}\left\{u\frac{\partial\bar\chi}{\partial\eta}-v\frac{\partial\bar\chi}{\partial\xi}\right\}d\xi\,d\eta = \int\limits_{(S)}\{-u\,\bar\chi\cos(n_{p'},\eta)+v\,\bar\chi\cos(n_{p'},\xi)\}\,ds,$$

wenn man noch beachtet, daß

$$\bar\chi\frac{\partial u}{\partial\eta}-\bar\chi\frac{\partial v}{\partial\xi}=0$$

ist. Man hat also insgesamt für das erste Integral

$$(149)\quad \frac{1}{2}\iint\limits_{(R)}\left\{\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \bar u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \bar u}{\partial \eta}+\frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial \bar v}{\partial \xi}+\frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial \bar v}{\partial \eta}\right\}d\xi\,d\eta$$

$$=\int\limits_{(S)}\left\{u\left[-\frac{1}{2}\frac{\partial\bar u}{\partial\xi}\cos(n_{p'},\xi)+\left(\frac{1}{2}\bar\chi-\frac{1}{2}\frac{\partial\bar u}{\partial\eta}\right)\cos(n_{p'},\eta)\right]+\right.$$

$$\left.+\,v\left[-\left(\frac{1}{2}\bar\chi+\frac{1}{2}\frac{\partial\bar v}{\partial\xi}\right)\cos(n_{p'},\xi)-\frac{1}{2}\frac{\partial\bar v}{\partial\eta}\cos(n_{p'},\eta)\right]\right\}ds.$$

Für das zweite Integral kann man aber bei Benutzung des GAUSSschen Integralsatzes

$$(150)\quad \frac{1}{2}\iint\limits_{(R)}\left\{\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \bar u}{\partial \eta}+\frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial \bar v}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \bar v}{\partial \eta}-\frac{\partial \bar u}{\partial \xi}\frac{\partial v}{\partial \eta}\right\}d\xi\,d\eta$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_{(R)}\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left(u\frac{\partial\bar u}{\partial\eta}\right)-\frac{\partial}{\partial\xi}\left(u\frac{\partial\bar v}{\partial\eta}\right)+\frac{\partial}{\partial\xi}\left(v\frac{\partial\bar v}{\partial\xi}\right)-\frac{\partial}{\partial\eta}\left(v\frac{\partial\bar u}{\partial\xi}\right)\right\}d\xi\,d\eta$$

$$=-\frac{1}{2}\int\limits_{(S)}\left\{u\left(\frac{\partial\bar u}{\partial\eta}\cos(n_{p'},\eta)-\frac{\partial\bar v}{\partial\eta}\cos(n_{p'}\,\xi)\right)+\right.$$

$$\left.+\,v\left(\frac{\partial\bar v}{\partial\xi}\cos(n_{p'},\xi)-\frac{\partial\bar u}{\partial\xi}\cos(n_{p'},\eta)\right)\right\}d\xi\,d\eta$$

schreiben, wenn man berücksichtigt, daß

$$u\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2} - u\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \xi\, \partial \eta} = 0, \quad v\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \xi^2} - v\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi\, \partial \eta} = 0$$

ist. Mit (149) und (150) ist aber (148) bewiesen.

Subtrahiert man die durch Vertauschung von u mit $\bar{u}$ bzw. von v mit $\bar{v}$ aus (148) erhaltene Gleichung von (148), so findet man die für spätere Zwecke benötigte Relation

$$(151) \quad \int\limits_{(S)} \{[u]_S X_{\bar{u},\bar{v}}(p',p') + [v]_S Y_{\bar{u},\bar{v}}(p',p') - [\bar{u}]_S X_{u,v}(p',p') - - [\bar{v}]_S Y_{u,v}(p',p')\}\, ds = 0,$$

wobei das Integral als $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{(S_n^i)}$ zu verstehen ist. Geht man von dem (148) entsprechenden Integralsatz für das Gebiet R_a aus, so gelangt man durch dasselbe Vorgehen ebenfalls zu einer Relation der Form (151) mit dem einzigen Unterschied, daß jetzt das Kurvenintegral $\int\limits_{(S)}$ als $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{(S_n^a)}$ zu verstehen ist.

4. Mit Hilfe der Funktionen $f_1(p)$ und $g_1(p)$ bilde man nunmehr die folgenden Lösungen von (139)

$$(152) \quad \begin{aligned} u_1(P) &= \frac{2}{\pi}\int\limits_{(S)} \{K_{\xi\xi}(P,p') f_1(p') + K_{\xi\eta}(P,p') g_1(p')\}\, ds, \\ v_1(P) &= \frac{2}{\pi}\int\limits_{(S)} \{K_{\eta\xi}(P,p') f_1(p') + K_{\eta\eta}(P,p') g_1(p')\}\, ds, \end{aligned}$$

für die wegen (55), (57) und (143) die Limesrelationen

$$(153) \quad \lim_{n\to\infty} u_1(P_n^i) = u_1^i(p) = 0, \quad \lim_{n\to\infty} v_1(P_n^i) = v_1^i(p) = 0$$

bestehen. Für diese Funktionen ist nun

$$(154) \quad \vartheta_1 = \frac{\partial u_1(P)}{\partial \xi} + \frac{\partial v_1(P)}{\partial \eta} = \frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial \xi}\int\limits_{(S)} f_1(p') \frac{\partial \left(\log \frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\, ds + \frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial \eta}\int\limits_{(S)} g_1(p') \frac{\partial \left(\log \frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\, ds,$$

und damit kann im Gebiet R oder im Gebiet R_a gemäß (146)

$$(155) \quad \chi_1 = -\frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial \eta}\int\limits_{(S)} f_1(p') \frac{\partial \left(\log \frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\, ds + \frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial \xi}\int\limits_{(S)} g_1(p') \frac{\partial \left(\log \frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\, ds$$

gesetzt werden.

Bezeichnet man die Tangentialrichtung im Kurvenpunkt p von S, die zusammen mit der Normalenrichtung n_p dieselbe Orientierung wie das ξ, η-System hat, mit t_p, und beachtet man, daß

$$\frac{\partial K_{\xi\xi}(P,p)}{\partial \eta} = \frac{\partial K_{\xi\eta}(P,p)}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial K_{\xi\eta}(P,p)}{\partial \eta} = \frac{\partial K_{\eta\eta}(P,p)}{\partial \xi}$$

ist, so ergeben die Ausdrücke (147) für die Funktionen $u = u_1$, $v = v_1$ wegen (154) und (155)

$$\begin{aligned}
X_{u_1, v_1}(P,p) &= \left(\frac{1}{2}\vartheta_1 - \frac{\partial v_1}{\partial \eta}\right)\cos(n_p, \xi) + \left(\frac{\partial u_1}{\partial n} - \frac{1}{2}\chi_1\right)\cos(n_p, \eta) \\
&= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\int\limits_{(S)} f_1(p')\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\,ds + \frac{\partial}{\partial \eta}\int\limits_{(S)} g_1(p')\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\,ds + \right. \\
&\quad + 2\frac{\partial}{\partial \eta}\int\limits_{(S)} f_1(p')\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \eta}\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\,ds - \\
&\quad \left. - 2\frac{\partial}{\partial \eta}\int\limits_{(S)} g_1(p')\left(\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\right)^2\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\,ds\right\}\cos(n_p, \xi) + \\
&\quad + \frac{1}{\pi}\left\{-2\frac{\partial}{\partial \eta}\int\limits_{(S)} f_1(p')\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \eta}\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\,ds + \right. \\
&\quad + 2\frac{\partial}{\partial \xi}\int\limits_{(S)} g_1(p')\left(\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\right)^2\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\,ds + \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial \eta}\int\limits_{(S)} f_1(p')\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\,ds - \frac{\partial}{\partial \xi}\int\limits_{(S)} g_1(p')\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\,ds\right\}\cos(n_p, \eta)
\end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned}
(156) \qquad X_{u_1, v_1}(P,p) &= \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial n_p}\int\limits_{(S)} f_1(p')\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\,ds - \\
&\quad - \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial t_p}\int\limits_{(S)} g_1(p')\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\,ds - \\
&\quad - \frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial t_p}\int\limits_{(S)} f_1(p')\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \eta}\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\,ds + \\
&\quad + \frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial t_p}\int\limits_{(S)} g_1(p')\left(\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\right)^2\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\,ds.
\end{aligned}$$

Ebenso erhält man

$$(157)\quad Y_{u_1,v_1}(P,p)=\left(\frac{\partial v_1}{\partial \xi}+\frac{1}{2}\chi_1\right)\cos(n_p,\xi)+\left(\frac{1}{2}\vartheta_1-\frac{\partial u_1}{\partial \xi}\right)\cos(n_p,\eta)$$

$$=\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial n_p}\int\limits_{(S)} g_1(p')\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}ds+\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial t_p}\int\limits_{(S)} f_1(p')\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}ds-$$

$$-\frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial t_p}\int\limits_{(S)} f_1(p')\left(\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \eta}\right)^2\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}ds+$$

$$+\frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial t_p}\int\limits_{(S)} g_1(p')\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \eta}\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}ds.$$

5. Da aber die Funktionen $f_1(p)$ und $g_1(p)$ auf S eine Tangentialableitung besitzen, die einer gleichmäßigen H-Bedingung mit dem Exponenten λ genügt, so sind sowohl $\frac{\partial u_1}{\partial \xi}$, $\frac{\partial u_1}{\partial \eta}$, $\frac{\partial v_1}{\partial \xi}$, $\frac{\partial v_1}{\partial \eta}$, ϑ_1, χ_1 als auch die Ausdrücke (156) und (157) in $R+S$ und in R_a+S stetig, und aus (60) und (61) erkennt man unmittelbar, daß die letzteren sich auch stetig verhalten, wenn der Punkt P den Flächenpunkt p passiert.

Wendet man daher (145) auf den ganz in R gelegenen Bereich $R_n^i+S_n^i$ an und läßt n unbeschränkt wachsen, so folgt bei Beachtung von (153), daß in R

$$u_1(P)\equiv 0,\quad \vartheta_1(P)\equiv 0$$

und damit

$$\vartheta_1(P)\equiv 0$$

und also

$$\chi_1(P)\equiv c$$

sein muß, wobei c eine Konstante ist. In ganz R gilt infolgedessen

$$X_{u_1,v_1}(P,p)=-\tfrac{1}{2}c\cos(n_p,\eta),$$
$$Y_{u_1,v_1}(P,p)=\tfrac{1}{2}c\cos(n_p,\xi).$$

Nach der eben gemachten Bemerkung über das Verhalten der Ausdrücke (156) und (157) bei Annäherung an einen Randpunkt von S folgt dann aber für eine im Gebiet R_a gelegene Punktfolge P_n^a, die gegen p konvergiert,

$$\lim_{n\to\infty} X_{u_1,v_1}(P_n^a,p)=-\tfrac{1}{2}c\cos(n_p,\eta),$$
$$\lim_{n\to\infty} Y_{u_1,v_1}(P_n^a,p)=\tfrac{1}{2}c\cos(n_p,\xi).$$

Hieraus erkennt man, daß die Konstante c ungleich Null sein muß. Denn wenn r_{OP} unbeschränkt wächst, so gehen $u_1(P)$ und $v_1(P)$ wie $\frac{1}{r_{OP}}$ gegen Null, während ihre ersten partiellen Ableitungen und χ_1 wie $\frac{1}{r_{OP}^2}$ verschwinden. Man kann also (145) auf den Bereich $R_n^a + S_n^a$ anwenden. Wäre also $c = 0$, so erhielte man im Limes $n \to \infty$, das in R_a

$$u_1(P) \equiv 0, \quad v_1(P) \equiv 0$$

sein müßte. Da aber wegen (56), (58) und (143)

$$\lim_{n\to\infty} u_1(P_n^a) = u_1^a(p) = -f_1(p) + \frac{2}{\pi}\int_{(S)} \{K_{\xi\xi}(p,p')\, f_1(p') + K_{\xi\eta}(p,p')\, g_1(p')\}\, ds = -2 f_1(p),$$

$$\lim_{n\to\infty} v_1(P_n^a) = v_1^a(p) = -g_1(p) + \frac{2}{\pi}\int_{(S)} \{K_{\eta\xi}(p,p')\, f_1(p') + K_{\eta\eta}(p,p')\, g_1(p')\}\, ds = -2 g_1(p)$$

ist, so würde im Widerspruch zu der Bedeutung der Funktionen $f_1(p)$, $g_1(p)$

$$f_1(p) \equiv 0, \quad g_1(p) \equiv 0$$

folgen.

6. Nehmen wir nun an, daß die homogenen Gleichungen (143) neben $f_1(p)$, $g_1(p)$ die Funktionen $\bar{f}_1(p)$, $\bar{g}_1(p)$ als nicht identisch verschwindende Lösung besitzen. Bildet man mit ihnen analog zu (152) die Lösungsfunktionen $\bar{u}_1(P)$, $\bar{v}_1(P)$ von (139), so muß aus den gleichen Gründen wie eben in R

$$X_{\bar{u}_1, \bar{v}_1}(P, p) = -\tfrac{1}{2}\bar{c}\cos(n_p, \eta),$$
$$Y_{\bar{u}_1, \bar{v}_1}(P, p) = \tfrac{1}{2}\bar{c}\cos(n_p, \xi)$$

sein, wo $\bar{c}$ eine nichtverschwindende Konstante ist.

Wählt man nun eine weitere Konstante k so, daß

$$c + k\bar{c} = 0$$

ist, und bestimmt für die Lösungsfunktionen

$$\bar{\bar{f}}_1 = f_1 + k\bar{f}_1, \quad \bar{\bar{g}}_1 = g_1 + k\bar{g}_1$$

die zu (152) analogen Lösungsfunktionen $\bar{\bar{u}}_1(P)$, $\bar{\bar{v}}_1(P)$ von (139), so gilt offensichtlich in ganz R

$$X_{\bar{\bar{u}}_1, \bar{\bar{v}}_1}(P, p) = -\tfrac{1}{2}(c + k\bar{c})\cos(n_p, \eta) = 0,$$
$$Y_{\bar{\bar{u}}_1, \bar{\bar{v}}_1}(P, p) = \tfrac{1}{2}(c + k\bar{c})\cos(n_p, \xi) = 0.$$

Mit dem Schlußverfahren am Ende des letzten Abschnitts erkennt man dann aber, daß

$$\bar{\bar{f}}_1 = 0, \quad \bar{\bar{g}}_1 = 0$$

sein muß, so daß in der Tat eine beliebige Lösung $\bar{f}_1(p)$, $\bar{g}_1(p)$ von (143) ein Vielfaches der Lösung $f_1(p)$, $g_1(p)$ sein muß.

7. Da somit das assoziierte Gleichungssystem (144) die Funktionen

$$f_2(p) = \cos(n_p, \eta), \quad g_2(p) = -\cos(n_p, \xi)$$

als einzige linear unabhängige Lösung besitzt, so lautet die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß das inhomogene System (142) eine Lösung besitzt:

$$\int_{(S)} \{\varrho(p') \cos(n_{p'}, \eta) - \sigma(p') \cos(n_{p'}, \xi)\} \, ds = 0.$$

Erfüllen die gegebenen Randfunktionen diese Bedingung, so existiert also eine Lösung $f(p)$, $g(p)$ von (142).

Die mit ihnen gebildeten Funktionen

$$(158) \quad \begin{aligned} u(P) &= \frac{2}{\pi} \int_{(S)} \{K_{\xi\xi}(P, p') f(p') + K_{\xi\eta}(P, p') g(p')\} \, ds, \\ v(P) &= \frac{2}{\pi} \int_{(S)} \{K_{\eta\xi}(P, p') f(p') + K_{\eta\eta}(P, p') g(p')\} \, ds \end{aligned}$$

lösen alsdann das Problem (139), (140), womit der Nachweis von Satz 11 erbracht ist.

8. Der Hauptsatz III ist alsdann in seinem vollen Umfange zugleich mit dem folgenden Eindeutigkeitssatz bewiesen:

Satz 12. *Sind die Funktionen ϱ und σ auf S stetig und genügen sie der Relation* (137), *so kann es höchstens eine Lösung des Problems* (139), (140) *geben.*

Den Beweis erbringen wir in mehreren Schritten, indem wir mit dem Hilfssatz beginnen: *Das durch Einführung eines Parameters $\varkappa$ ergänzte homogene Integralgleichungssystem* (143)

$$(159) \quad \begin{aligned} f_1(p) + \varkappa \frac{2}{\pi} \int_{(S)} \{K_{\xi\xi}(p, p') f_1(p') + K_{\xi\eta}(p, p') g_1(p')\} \, ds &= 0, \\ g_1(p) + \varkappa \frac{2}{\pi} \int_{(S)} \{K_{\eta\xi}(p, p') f_1(p') + K_{\eta\eta}(p, p') g_1(p')\} \, ds &= 0 \end{aligned}$$

besitzt für $\varkappa = -1$ die Lösung

$$(160) \quad f_1(p) = a_1 \xi(p) + b_1, \quad g_1(p) = a_1 \eta(p) + c_1,$$

wenn a_1, b_1, c_1 beliebige Konstanten sind.

Beweis. Ist $P_1 = (\xi_1, \eta_1)$ ein beliebiger Punkt im Innern von R, der der Mittelpunkt eines ganz in R gelegenen Kreises S_0 sei, und benutzt man die in dem von S und S_0 berandeten Gebiet R_0 definierten Lösungsfunktionen

$$\bar{u}(P) = -\log\frac{1}{r_{PP_1}} + \left(\frac{\partial r_{PP_1}}{\partial \xi}\right)^2, \quad \bar{v}(P) = \frac{\partial r_{PP_1}}{\partial \xi}\,\frac{\partial r_{PP_1}}{\partial \eta}$$

von (139), für die

$$\bar{\vartheta} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} = -2\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{PP_1}}\right)}{\partial \xi}; \quad \bar{\chi} = 2\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{PP_1}}\right)}{\partial \eta}$$

und also

$$X_{\bar{u},\bar{v}}(P,p) = -2\left(\frac{\partial r_{PP_1}}{\partial \eta}\right)^2 \frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{PP_1}}\right)}{\partial n_p},$$

$$Y_{\bar{u},\bar{v}}(P,p) = 2\frac{\partial r_{PP_1}}{\partial \xi}\,\frac{\partial r_{PP_1}}{\partial \eta}\,\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{PP_1}}\right)}{\partial n_p}$$

zu setzen ist, so liefert die Formel (151) bei aus der Potentialtheorie bekanntem Vorgehen, wenn man die Kreisperipherie S_0 auf P_1 zusammenzieht,

$$\begin{aligned} u(\xi_1,\eta_1) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(S)}\{-[u]_S X_{\bar{u},\bar{v}}(p',p') - [v]_S Y_{\bar{u},\bar{v}}(p',p') - \\ &\qquad + [\bar{u}]_S X_{u,v}(p',p') + [\bar{v}]_S Y_{u,v}(p',p')\}\,ds \\ (161) \qquad &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{(S)}\{[u]_S K_{\xi\xi}(P_1,p') + [v]_S K_{\xi\eta}(P_1,p')\}\,ds + \\ &\qquad + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(S)}\{[\bar{u}]_S X_{u,v}(p',p') + [\bar{v}]_S Y_{u,v}(p',p')\}\,ds. \end{aligned}$$

Ebenso findet man bei Benutzung der in dem von S und S_0 berandeten Gebiet definierten Lösungsfunktionen

$$\bar{\bar{u}}(P) = \frac{\partial r_{PP_1}}{\partial \eta}\,\frac{\partial r_{PP_1}}{\partial \xi}, \quad \bar{\bar{v}}(P) = -\log\frac{1}{r_{PP_1}} + \left(\frac{\partial r_{PP_1}}{\partial \eta}\right)^2$$

von (139), für die

$$X_{\bar{\bar{u}},\bar{\bar{v}}}(P,p) = 2\frac{\partial r_{PP_1}}{\partial \eta}\,\frac{\partial r_{PP_1}}{\partial \xi}\,\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{PP_1}}\right)}{\partial n_p},$$

$$Y_{\bar{\bar{u}},\bar{\bar{v}}}(P,p) = -2\left(\frac{\partial r_{PP_1}}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{PP_1}}\right)}{\partial n_p}$$

ist,

$$v(\xi_1, \eta_1) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(S)} \{-[u]_S X_{\bar{\bar{u}},\bar{\bar{v}}}(p', p') - [v]_S Y_{\bar{\bar{u}},\bar{\bar{v}}}(p', p') + $$
$$+ [\bar{\bar{u}}]_S X_{u,v}(p', p') + [\bar{\bar{v}}]_S Y_{u,v}(p', p')\}\, ds$$

(162)
$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{(S)} \{[u]_S K_{\eta\xi}(P_1, p') + [v]_S K_{\eta\eta}(P_1, p')\}\, ds +$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(S)} \{[\bar{u}] X_{u,v}(p', p') + [\bar{v}]_S Y_{u,v}(p', p')\}\, ds.$$

Wählt man nunmehr die Lösungsfunktionen

$$u(\xi, \eta) = a_1\xi + b_1, \quad v(\xi, \eta) = a_1\eta + c_1$$

von (139), so ist

$$X_{u,v}(P, p) = -d\cos(n_p, \eta), \quad Y_{u,v}(P, p) = d\cos(n_p, \xi),$$

wenn d eine Konstante bedeutet. Dann muß aber nach dem Gaussschen Integralsatz

$$\int\limits_{(S)} \{[\bar{u}]_S X_{u,v}(p', p') + [\bar{v}]_S Y_{u,v}(p', p')\}\, ds$$
$$= -d\int\limits_{(S)} \{[\bar{u}]_S \cos(n_{p'}, \eta) - [\bar{v}]_S \cos(n_{p'}, \xi)\}\, ds = 0$$

und ebenso

$$\int\limits_{(S)} \{[u]_S X_{u,v}(p', p') + [\bar{\bar{v}}]_S Y_{u,v}(p', p')\}\, ds = 0$$

sein, da $\bar{u}(P)$ und $\bar{\bar{v}}(P)$ im Punkte P_1 von R nur eine logarithmische Singularität haben, während $\bar{v}(P)$ und $\bar{\bar{u}}(P)$ in ganz R stetig sind. Somit ergeben (161) und (162), wenn man beachtet, daß P_1 ein beliebiger Punkt von R war:

$$a_1\xi + b_1 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{(S)} \{(a_1\xi(p') + b_1)K_{\xi\xi}(P, p') + (a_1\eta(p') + c_1)K_{\xi\eta}(P, p')\}\, ds$$

und

$$a_1\eta + c_1 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{(S)} \{(a_1\xi(p') + b_1)K_{\eta\xi}(P, p') + (a_1\eta(p') + c_1)K_{\eta\eta}(P, p')\}\, ds.$$

Läßt man daher den in R gelegenen Punkt (ξ, η) gegen einen Punkt p von S konvergieren, so erhält man

$$a_1\xi(p) + b_1 = \frac{1}{2}(a_1\xi(p) + b_1) + \frac{1}{\pi}\int\limits_{(S)} \{(a_1\xi(p') + b_1)K_{\xi\xi}(p, p') +$$
$$+ (a_1\eta(p') + c_1)K_{\xi\eta}(p, p')\}\, ds,$$

$$a_1\eta(p) + c_1 = \frac{1}{2}(a_1\eta(p) + c_1) + \frac{1}{\pi}\int\limits_{(S)} \{(a_1\xi(p') + b_1)K_{\eta\xi}(p, p') +$$
$$+ (a_1\eta(p') + c_1)K_{\eta\eta}(p, p')\}\, ds,$$

womit der Hilfssatz bewiesen ist.

9. Weiter gilt der **Hilfssatz**: *Das Integralgleichungssystem* (159) *besitzt keinen komplexen Eigenwert.*

Beweis. Sei $\varkappa = \varkappa_1 + i\varkappa_2$ mit $\varkappa_2 \neq 0$ ein solcher Eigenwert; die zugehörigen nicht identisch verschwindenden Eigenfunktionen seien

$$f_1(p) = f_{11}(p) + i f_{12}(p),$$
$$g_1(p) = g_{11}(p) + i g_{12}(p).$$

Bildet man damit gemäß (152) die Lösungsfunktionen

$$u_1(P) = u_{11}(P) + i u_{12}(P),$$
$$v_1(P) = v_{11}(P) + i v_{12}(P)$$

von (139), so folgt aus

$$(163)\quad \begin{aligned} u_1^i(p) &= f_1(p) + \frac{2}{\pi}\int_{(S)} \{K_{\xi\xi}(p,p') f_1(p') + K_{\xi\eta}(p,p') g_1(p')\}\, ds,\\ u_1^a(p) &= -f_1(p) + \frac{2}{\pi}\int_{(S)} \{K_{\xi\xi}(p,p') f_1(p') + K_{\xi\eta}(p,p') g_1(p')\}\, ds,\\ v_1^i(p) &= g_1(p) + \frac{2}{\pi}\int_{(S)} \{K_{\eta\xi}(p,p') f_1(p') + K_{\eta\eta}(p,p') g_1(p')\}\, ds,\\ v_1^a(p) &= -g_1(p) + \frac{2}{\pi}\int_{(S)} \{K_{\eta\xi}(p,p') f_1(p') + K_{\eta\eta}(p,p') g_1(p')\}\, ds, \end{aligned}$$

indem man die erste bzw. dritte Gleichung mit $\frac{1+\varkappa}{2}$ multipliziert und sie jeweils zu der mit $-\frac{1-\varkappa}{2}$ multiplizierten zweiten bzw. vierten Gleichung hinzuaddiert.

$$\frac{1+\varkappa}{2} u_1^i - \frac{1+\varkappa}{2} u_1^a = f_1 + \varkappa \frac{2}{\pi}\int_{(S)} \{K_{\xi\xi} f_1 + K_{\xi\eta} g_1\}\, ds = 0,$$
$$\frac{1+\varkappa}{2} v_1^i - \frac{1+\varkappa}{2} v_1^a = g_1 + \varkappa \frac{2}{\pi}\int_{(S)} \{K_{\eta\xi} f_1 + K_{\eta\eta} g_1\}\, ds = 0$$

oder, indem man zu Real- und Imaginärteil übergeht,

$$\begin{aligned} (1+\varkappa_1) u_{11}^i - (1-\varkappa_1) u_{11}^a - \varkappa_2 u_{12}^i - \varkappa_2 u_{12}^a &= 0,\\ (1+\varkappa_1) u_{12}^i - (1-\varkappa_1) u_{12}^a + \varkappa_2 u_{11}^i + \varkappa_2 u_{11}^a &= 0,\\ (1+\varkappa_1) v_{11}^i - (1-\varkappa_1) v_{11}^a - \varkappa_2 v_{12}^i - \varkappa_2 v_{12}^a &= 0,\\ (1+\varkappa_1) v_{12}^i - (1-\varkappa_1) v_{12}^a + \varkappa_2 v_{11}^i + \varkappa_2 v_{11}^a &= 0. \end{aligned}$$

Beachtet man nun, daß die mit den Funktionen $u_{11}(P)$, $v_{11}(P)$ bzw. $u_{12}(P)$, $v_{12}(P)$ gebildeten Ausdrücke $X_{u_{11},\,v_{11}}(P,p)$, $Y_{u_{11},\,v_{11}}(P,p)$ bzw. $X_{u_{12},\,v_{12}}(P,p)$, $Y_{u_{12},\,v_{12}}(P,p)$ sich nach den Bemerkungen am Anfang des Abschnitts 5, falls der Punkt P den Kurvenpunkt p passiert, stetig verhalten, so folgt, indem man die erste der zuletzt erhaltenen Gleichungen mit $X_{u_{12}, v_{12}}(p, p)$ multipliziert, sie zu der mit $Y_{u_{12}, v_{12}}(p, p)$ multiplizierten dritten Gleichung addiert und davon die mit $X_{u_{11}, v_{11}}(p, p)$ multiplizierte zweite Gleichung und die mit $Y_{u_{11}, v_{11}}(p, p)$ multiplizierte vierte Gleichung subtrahiert, und indem man alsdann über S integriert wegen (151)

$$
\begin{aligned}
&- \varkappa_2 \Big[\int\limits_{(S)} \{ u^i_{12}(p') X_{u_{12}, v_{12}}(p', p') + v^i_{12}(p') Y_{u_{12}, v_{12}}(p', p') \} \, ds + \\
&\qquad + \int\limits_{(S)} \{ u^i_{11}(p') X_{u_{11}, v_{11}}(p', p') + v^i_{11}(p') Y_{u_{11}, v_{11}}(p', p') \} \, ds \Big] - \\
&- \varkappa_2 \Big[\int\limits_{(S)} \{ u^a_{12}(p') X_{u_{12}, v_{12}}(p', p') + v^a_{12}(p') Y_{u_{12}, v_{12}}(p', p') \} \, ds + \\
&\qquad + \int\limits_{(S)} \{ u^a_{11}(p') X_{u_{11}, v_{11}}(p', p') + v^a_{11}(p') Y_{u_{11}, v_{11}}(p', p') \, ds \Big] = 0.
\end{aligned}
$$

Ebenso findet man

$$
\begin{aligned}
&(1 + \varkappa_1) \Big[\int\limits_{(S)} \{ u^i_{11}(p') X_{u_{11}, v_{11}}(p', p') + v^i_{11}(p') Y_{u_{11}, v_{11}}(p', p') \} \, ds + \\
&\qquad + \int\limits_{(S)} \{ u^i_{12}(p') X_{u_{12}, v_{12}}(p', p') + v^i_{12}(p') Y_{u_{12}, v_{12}}(p', p') \} \, ds \Big] - \\
&- (1 - \varkappa_1) \Big[\int\limits_{(S)} \{ u^a_{11}(p') X_{u_{11}, v^{11}}(p', p') + v^a_{11}(p') Y_{u_{11}, v_{11}}(p', p') \} \, ds + \\
&\qquad + \int\limits_{(S)} \{ u^a_{12}(p') X_{u_{12}, v_{12}}(p', p') + v^a_{12}(p') Y_{u_{12}, v_{12}}(p', p') \} \, ds \Big] = 0.
\end{aligned}
$$

Da die Determinante

$$
\begin{vmatrix} -\varkappa_2, & -\varkappa_2 \\ 1 + \varkappa_1, & -(1 - \varkappa_1) \end{vmatrix} = 2\varkappa_2 \neq 0
$$

ist, so müssen die Ausdrücke in den eckigen Klammern verschwinden, d. h. es muß wegen (145)

$$
\begin{aligned}
&\iint\limits_{(R)} \left\{ \left(\frac{\partial u_{11}}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_{11}}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{11}}{\partial \xi} - \frac{\partial v_{11}}{\partial \eta} \right)^2 \right\} d\xi \, d\eta + \\
&+ \iint\limits_{(R)} \left\{ \left(\frac{\partial u_{12}}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_{12}}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{12}}{\partial \xi} - \frac{\partial v_{12}}{\partial \eta} \right)^2 \right\} d\xi \, d\eta = 0
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
&\iint\limits_{(R_a)} \left\{ \left(\frac{\partial u_{11}}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_{11}}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{11}}{\partial \xi} - \frac{\partial v_{11}}{\partial \eta} \right)^2 \right\} d\xi \, d\eta + \\
&+ \iint\limits_{(R_a)} \left\{ \left(\frac{\partial u_{12}}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_{12}}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{12}}{\partial \xi} - \frac{\partial v_{12}}{\partial \eta} \right)^2 \right\} d\xi \, d\eta = 0
\end{aligned}
$$

sein.

Daraus entnimmt man aber, daß mit geeigneten Konstanten

$$a_{11},\ b_{11},\ c_{11};\quad a'_{11},\ b'_{11},\ c'_{11};\quad a_{12},\ b_{12},\ c_{12};\quad a'_{12},\ b'_{12},\ c'_{12}$$

die Gleichungen

$$u_{11}(P) = a_{11}\xi + b_{11},\quad v_{11}(P) = a_{11}\eta + c_{11} \text{ in } R,$$
$$u_{11}(P) = a'_{11}\xi + b'_{11},\quad v_{11}(P) = a'_{11}\eta + c'_{11} \text{ in } R_a$$

bzw.

$$u_{12}(P) = a_{12}\xi + b_{12},\quad v_{12}(P) = a_{12}\eta + c_{12} \text{ in } R,$$
$$u_{12}(P) = a'_{12}\xi + b'_{12},\quad v_{12}(P) = a'_{12}\eta + c'_{12} \text{ in } R_a$$

bestehen müssen. Da die Funktionen $u_{\mu 1}(P)$ und $v_{\mu 1}(P)$ aber im Unendlichen verschwinden, so ergibt sich

$$a'_{11} = b'_{11} = c'_{11} = a'_{12} = b'_{12} = c'_{12} = 0,$$

d. h.

$$u_1(P) \equiv 0,\quad v_1(P) \equiv 0 \text{ in } R_a.$$

Subtrahiert man alsdann in (163) die zweite Gleichung von der ersten und die vierte von der dritten, so findet man

$$2\,f_1(p) = (a_{11} + i a_{12})\,\xi\,(p) + (b_{11} + i b_{12}),$$
$$2\,g_1(p) = (a_{11} + i a_{12})\,\eta\,(p) + (c_{11} + i c_{12}).$$

Nach dem im vorhergehenden Abschnitt bewiesenen Hilfssatz ist dann aber

$$f_1(p) - \frac{2}{\pi}\int\limits_{(S)} \{K_{\xi\xi}(p, p')f_1(p') + K_{\xi\eta}(p, p')g_1(p')\}\,ds = 0,$$
$$g_1(p) - \frac{2}{\pi}\int\limits_{(S)} \{K_{\eta\xi}(p, p')f_1(p') + K_{\eta\eta}(p, p')\,g_1\,(p')\}\,ds = 0.$$

Wegen (159) mit $\varkappa = \varkappa_1 + i\varkappa_2$ $(\varkappa_2 \neq 0)$ ergibt sich somit

$$f_1(p)\,(1 + \varkappa) = 0,\quad g_1(p)\,(1 + \varkappa) = 0.$$

Da aber $f_1(p)$ und $g_1(p)$ nicht zugleich identisch verschwinden, so muß im Widerspruch zur Annahme

$$\varkappa_2 = 0$$

sein.

10. Wir können nunmehr den folgenden **Hilfssatz** beweisen: *Ist m eine ungerade Zahl, so besitzt das aus* (143) *durch m-fache Iteration hervorgehende homogene Integralgleichungssystem genau eine linear unabhängige Lösung, für die man eine beliebige nicht identisch verschwindende Lösung von* (143) *wählen kann.*

Beweis. Nach dem Vorgang von § 4, Abschnitt 4 schreibe man das System (143) zunächst als eine einzige Integralgleichung

$$f_1^*(p) + \frac{2}{\pi} \int_{(\mathfrak{S})} K(p, p') f_1^*(p')\, ds = 0. \tag{164}$$

Die daraus durch m-fache Iteration hervorgehende Gleichung

$$f^{(m)}(p) + (-1)^{m-1} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{(m)} \int_{(\mathfrak{S})} K^{(m)}(p, p') f^{(m)}(p')\, ds = 0 \tag{165}$$

habe die nichtidentisch verschwindende Lösung $f^{(m)}$. Sind dann $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ die m-ten Einheitswurzeln, bei denen $\varepsilon_1 = 1$ die einzige reelle Wurzel sei, so setze man

$$\begin{aligned} (166)\quad & m\,\varphi_\mu(p) \\ &= f^{(m)}(p) - \varepsilon_\mu \frac{2}{\pi} \int_{(\mathfrak{S})} K(p, p') f^{(m)}(p')\, ds + \varepsilon_\mu^2 \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \int_{(\mathfrak{S})} K^{(2)}(p, p') f^{(m)}(p')\, ds + \\ &\quad \cdots + (-1)^{m-1} \varepsilon_\mu^{m-1} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{m-1} \int_{(\mathfrak{S})} K^{(m-1)}(p, p') f^{(m)}(p')\, ds. \end{aligned}$$

Die m-Funktionen $\varphi_\mu(p)$ können nicht sämtlich identisch verschwinden, da man sonst durch Addition bei Beachtung von

$$\sum_{\mu=1}^{m} \varepsilon_\mu^\varrho = 0 \quad (\varrho = 1, 2, \ldots, m-1) \tag{167}$$

auf

$$f^{(m)}(p) \equiv 0$$

schließen könnte.

Verschwinde also für ein gewisses μ die Funktion $\varphi_\mu(p)$ nicht identisch. Es folgt

$$\begin{aligned} & m \frac{2}{\pi} \int_{(\mathfrak{S})} K(p, p')\, \varphi_\mu(p')\, ds \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{(\mathfrak{S})} K(p, p') f^{(m)}(p')\, ds - \varepsilon_\mu \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \int_{(\mathfrak{S})} K^{(2)}(p, p') f^{(m)}(p')\, ds + \\ &\quad \cdots + (-1)^{m-1} \varepsilon_\mu^{m-1} \left(\frac{2}{\pi}\right)^m \int_{(\mathfrak{S})} K^{(m)}(p, p') f^{(m)}(p')\, ds \\ &= -\frac{m\,\varphi_\mu(p) + f^{(m)}(p)}{\varepsilon_\mu} + (-1)^{m-1} \varepsilon_\mu^{m-1} \left(\frac{2}{\pi}\right)^m \int_{(\mathfrak{S})} K^{(m)}(p, p') f^{(m)}(p')\, ds \end{aligned}$$

und also bei Beachtung von (165)

$$\varphi_\mu(p) + \varepsilon_\mu \frac{2}{\pi} \int_{(\mathfrak{S})} K(p, p')\, \varphi_\mu(p')\, ds = 0. \tag{168}$$

Auf Grund des im Abschnitt 9 bewiesenen Hilfssatzes muß dann ε_μ reell, d. h. $\varepsilon_\mu = \varepsilon_1 = 1$ sein. Der einzige nichtverschwindende Ausdruck der Form (166) ist also der für $\mu = 1$, der wegen (168) gleich einem Vielfachen einer nicht-identisch verschwindenden Lösung $f_1^*(p)$ von (164) sein muß:

$$m\,\varphi_1(p) = f^{(m)}(p) - \frac{2}{\pi}\int\limits_{(\mathfrak{S})} K(p, p')\, f^{(m)}(p')\,ds + \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \int\limits_{(\mathfrak{S})} K^{(2)}(p, p') f^{(m)}(p')\,ds + \cdots + (-1)^{m-1}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{m-1}\int\limits_{(\mathfrak{S})} K^{(m-1)}(p, p') f^{(m)}(p')\,ds = k_1 f_1^*(p).$$

Durch Addition der Gleichungen (166) erhält man also bei Beachtung von (167)

$$m f^{(m)}(p) = k_1 f_1^*(p),$$

womit der Hilfssatz bewiesen ist.

11. Man wähle nun die ungerade Zahl m so groß, daß der iterierte Kern $K^{(m)}(p, q)$ auf seinem Definitionsbereich durchweg stetig ist. Nach dem eben bewiesenen Hilfssatz verschwindet die für den Kern

$$(169)\qquad (-1)^m \left(\frac{2}{\pi}\right)^m K^{(m)}(p, q)$$

gebildete Fredholmsche Unterdeterminante

$$D^{(m)}\binom{p}{q}$$

nicht identisch in den auf $\mathfrak{S}$ gelegenen Punkten p und q; es wird also ein solches Punktepaar p_1, q_1 geben, daß

$$(170)\qquad D^{(m)}\binom{p_1}{q_1} \neq 0$$

ist.

Bildet man ebenfalls für den Kern (169) die Fredholmsche Unterdeterminante

$$D^{(m)}\binom{p\; p_1}{q\; q_1},$$

und setzt man

$$\Omega(p, q) = -\frac{2}{\pi} K(p, q) + \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 K^{(2)}(p, q) - + \cdots + (-1)^m \left(\frac{2}{\pi}\right)^m K(p, q),$$

$$(171)\qquad \Gamma^{(m)}(p, q) = \frac{D^{(m)}\binom{p,\, p_1}{q,\, q_1}}{D^{(m)}\binom{p_1}{q_1}},$$

$$\Gamma(p, q) = \Omega(p, q) + \int\limits_{(\mathfrak{S})} \Omega(p, p')\, \Gamma^{(m)}(p', q)\,ds,$$

so beweist man mit der im Abschnitt 3 von § 5 benutzten Methode, daß die Funktion

$$f^*(p) = \varrho^*(p) + \int_{(\mathfrak{S})} \Gamma(p, p')\, \varrho^*(p')\, ds \tag{172}$$

stets eine Lösung der dem inhomogenen System (142) äquivalenten Integralgleichung

$$f^*(p) + \frac{2}{\pi} \int_{(\mathfrak{S})} K(p, p') f^*(p')\, ds = \varrho^*(p) \tag{173}$$

ist.

12. Wir sind nunmehr in der Lage, den im 8. Abschnitt bereits formulierten Satz 12 zu beweisen. Sind die S_n wieder die in R gelegenen, gegen S mit wachsendem n konvergierenden Approximationskurven, und stellt das Funktionenpaar $u(P)$, $v(P)$ eine beliebige Lösung des Problems (139), (140) dar, so verstehe man unter

$$u_{(n)}(P), \quad v_{(n)}(P)$$

die zu dem Gebiet R_n gehörigen Lösungsfunktionen der Gleichungen (139) von der Form (158), die bei Annäherung an die Berandung S_n von R_n gegen die dort von den Funktionen $u(P)$, $v(P)$ angenommenen Werte konvergieren, also

$$\begin{aligned} u_{(n)}(P) &= \frac{2}{\pi} \int_{(S_n)} \{K_{\xi\xi,n}(P, p') f_{(n)}(p') + K_{\xi\eta,n}(P, p') g_{(n)}(p')\}\, ds, \\ v_{(n)}(P) &= \frac{2}{\pi} \int_{(S_n)} \{K_{\eta\xi,\eta}(P, p') f_{(n)}(p') + K_{\eta\eta,n}(P, p') g_{(n)}(p')\}\, ds, \end{aligned} \tag{174}$$

wobei wir für die Funktionen $f_{(n)}(p)$, $g_{(n)}(p)$ die zu (172) analog gebauten, auf die Kurven $S_{(n)}$ bezüglichen Lösungen des Integralgleichungssystems

$$\begin{aligned} f_{(n)}(p) + \frac{2}{\pi} \int_{(S_n)} \{K_{\xi\xi,n}(p, p') f_{(n)}(p') + K_{\xi\eta,n}(p, p') g_{(n)}(p')\}\, ds &= [u]_{S_n}, \\ g_{(n)}(p) + \frac{2}{\pi} \int_{(S_n)} \{K_{\eta\xi,n}(p, p') f_{(n)}(p') + K_{\eta\eta,n}(p, p') g_{(n)}(p')\}\, ds &= [v]_{S_n} \end{aligned} \tag{175}$$

wählen.

Wir behaupten, daß innerhalb R_n

$$u_{(n)}(P) \equiv u(P), \quad v_{(n)}(P) \equiv v(P) \tag{176}$$

sein muß. Da nämlich $u_{(n)}(P)$ und $v_{(n)}(P)$ in $R_n + S_n$ stetige partielle Ableitungen erster Ordnung besitzen, so gilt dasselbe von den Differenzfunktionen

$$\bar{u}_{(n)}(P) = u_{(n)}(P) - u(P), \quad \bar{v}_{(n)}(P) = v_{(n)}(P) - v(P).$$

Wählt man zu der Potentialfunktion

$$\bar{\vartheta}_{(n)}(P) = \frac{\partial \bar{u}_{(n)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{v}_{(n)}}{\partial \eta} = \frac{\partial u_{(n)}}{\partial \xi} + \frac{\partial v_{(n)}}{\partial \eta} - \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial \xi}\int\limits_{(S_n)} f_{(n)}(p')\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}ds + \frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial \eta}\int\limits_{(S_n)} g_{(n)}(p')\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}ds - \vartheta$$

als konjugierte Potentialfunktion die Funktion

$$\bar{\chi}_{(n)}(P) = -\frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial \eta}\int\limits_{(S_n)} f_{(n)}(p')\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}ds + \frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial \xi}\int\limits_{(S_n)} g_{(n)}(p')\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}ds -$$

$$-\int\limits_{(C)}\left\{\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi}d\eta - \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta}d\xi\right\},$$

wobei C eine in R_n gelegene Kurve bedeutet, die von einem beliebigen festen Punkt P_0 zu dem variablen Punkt P verläuft, so ist $\bar{\chi}_{(n)}(P)$ in $R_n + S_n$ stetig. Da aber die Randwerte der Funktionen $\bar{u}_{(n)}(P)$, $\bar{v}_{(n)}(P)$, die sich ergeben, wenn sich der in R_n gelegene Punkt P der Berandung S_n nähert, verschwinden, so folgt aus dem für den Bereich $R_n + S_n$ benutzten Integralsatz (145), daß in R_n, wie behauptet

$$\bar{u}_{(n)}(P) = u_{(n)}(P) - u(P) \equiv 0, \quad \bar{v}_{(n)}(P) = v_{(n)}(P) - v(P) \equiv 0$$

sein muß.

Sind nun die in (171) auftretenden, auf $\mathfrak{S}$ gelegenen Punkte p_1 und q_1 so gewählt, daß (170) gilt, und sind p_{1n}, q_{1n} zwei auf den $\mathfrak{S}_{(n)}$ gelegene Punktfolgen mit

$$p_{1n} \underset{(n)}{\longrightarrow} p_1, \quad q_{1n} \underset{(n)}{\longrightarrow} q_1,$$

so muß von einem gewissen n ab auch

$$D^{(m)}\binom{p_{1n}}{q_{1n}} \neq 0$$

sein, und man erkennt, daß bei unbegrenzt wachsendem n die Funktionen $f_{(n)}(p)$, $g_{(n)}(p)$ gegen die durch (172) gegebenen Lösungen von (142) und damit die Funktionen (174) gegen die wohlbestimmten Lösungsfunktionen (158) des Problems (139), (140) konvergieren. Wegen (176) ist also eine beliebige Lösung $u(P)$, $v(P)$ mit der durch (158) gegebenen Lösung identisch und damit eindeutig bestimmt.

§ 7.

Das äußere Problem in der Ebene.

1. In diesem letzten Paragraphen beweisen wir den folgenden Existenz- und Eindeutigkeitssatz:

Hauptsatz IV. *Genügt die Randkurve des einfach zusammenhängenden, ganz im Endlichen gelegenen Gebietes R den in § 1 genannten Voraussetzungen, und sind die auf S definierten Funktionen ϱ und σ dort stetig und genügen sie der Relation*

$$\int_{(S)} \{\varrho(p') \cos(n_{p'}, \eta) - \sigma(p') \cos(n_{p'}, \xi)\} \, ds = 0, \tag{177}$$

dann gibt es (bis auf eine additive Konstante) genau eine im Außengebiet R_a von R eindeutige biharmonische Funktion U, deren partielle Ableitungen erster Ordnung in $R_a + S$ stetig sind, auf S bzw. mit ϱ und σ übereinstimmen und im Unendlichen sich beschränkt verhalten, während die partiellen Ableitungen zweiter Ordnungen im Unendlichen wie $\frac{1}{r^2_{OP}}$ verschwinden[54]).

Existiert im Gebiet R_a eine biharmonische Funktion mit den verlangten Eigenschaften, so gilt wieder mit

$$u = \frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad v = \frac{\partial U}{\partial \eta}, \quad \vartheta = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} = \Delta U \tag{178}$$

offensichtlich

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \xi}, \quad \Delta \vartheta = 0 \tag{179}$$

und

$$[u]_S = \varrho, \quad [v]_S = \sigma. \tag{180}$$

Hinsichtlich des Problems (179), (180) besteht aber der in den nächsten Abschnitten zu beweisende

Satz 13. *Sind die Funktionen ϱ und σ auf S stetig, so gibt es eine Lösung u, v des Problems* (179), (180), *die im Unendlichen sich beschränkt verhält, während ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung wie $\frac{1}{r^2_{OP}}$ verschwinden.*

Beim Vergleich dieses Satzes mit dem entsprechenden Satz 11 für das innere Problem im ebenen Fall fällt auf, daß hier die Voraussetzung (177)

---

[54]) Es würde genügen vorauszusetzen, daß die partiellen Ableitungen erster Ordnung von U sich im Unendlichen beschränkt verhalten und daß für $r_{OP} \to \infty$

$$\lim (r_{OP} D^2 U) = 0$$

ist — eine Bemerkung, die sich sinngemäß auch auf die folgenden Sätze 13 und 14 übertragen läßt.

nicht benötigt wird. Will man aber umgekehrt von einer Lösung u, v von (179), (180) ausgehend eine in R_a eindeutige biharmonische Funktion U finden, für die (178) gilt, indem man

$$U(P) = \int\limits_{(C)} \{u\,d\xi + v\,d\eta\}$$

setzt, wobei C eine ganz in R_a verlaufende Kurve darstellt, die einen beliebig gewählten, aber festen Punkt P_0 mit einem variablen Punkt P verbindet, so müssen die gegebenen Randfunktionen offenbar notwendig der Gleichung (177) genügen. Verzichtet man jedoch auf die Eindeutigkeit von U, so kann die Voraussetzung (177), die für das innere Problem immer gefordert werden mußte, entbehrt werden.

2. Mit den durch (141) gegebenen Kernen betrachte man das inhomogene Integralgleichungssystem

$$(181)\quad \begin{aligned} f(p) - \frac{2}{\pi}\int\limits_{(S)} \{K_{\xi\xi}(p, p')f(p') + K_{\xi\eta}(p, p')g(p')\}ds &= \varrho(p), \\ g(p) - \frac{2}{\pi}\int\limits_{(S)} \{K_{\eta\xi}(p, p')f(p') + K_{\eta\eta}(p, p')g(p')\}ds &= \sigma(p). \end{aligned}$$

Das zugehörige homogene System

$$(182)\quad \begin{aligned} f_1(p) - \frac{2}{\pi}\int\limits_{(S)} \{K_{\xi\xi}(p, p')f_1(p') + K_{\xi\eta}(p, p')g_1(p')\}ds &= 0, \\ g_1(p) - \frac{2}{\pi}\int\limits_{(S)} \{K_{\eta\xi}(p, p')f_1(p') + K_{\eta\eta}(p, p')g_1(p')\}ds &= 0 \end{aligned}$$

besitzt nach dem Hilfssatz im Abschnitt 8 von § 6 die drei linear unabhängigen Lösungen

$$(183)\quad \begin{aligned} f_{11}(p) &= \xi(p), & g_{11}(p) &= \eta(p), \\ f_{12}(p) &= k, & g_{12}(p) &= 0, \\ f_{13}(p) &= 0, & g_{13}(p) &= l. \end{aligned}$$

Als Hilfssatz wollen wir nunmehr beweisen: *Jede beliebige Lösung* $f_1(p), g_1(p)$ *von* (182) *ist von den durch* (183) *gegebenen Lösungen linear abhängig.*

Beweis. Mit Hilfe von $f_1(p)$ und $g_1(p)$ bilde man die durch

$$(184)\quad \begin{aligned} u_1(P) &= \frac{2}{\pi}\int\limits_{(S)} \{K_{\xi\xi}(P, p')f_1(p') + K_{\xi\eta}(P, p')g_1(p')\}ds, \\ v_1(P) &= \frac{2}{\pi}\int\limits_{(S)} \{K_{\eta\xi}(P, p')f_1(p') + K_{\eta\eta}(P, p')g_1(p')\}ds \end{aligned}$$

gegebenen Funktionen, die sowohl im Gebiet R als auch im Gebiet R_a Lösungen der Differentialgleichungen (179) darstellen. Für sie bestehen bei Beachtung von (55), (56), (57), (58) und (182) die Limesrelationen

$$
(185)\quad
\begin{aligned}
&\lim_{P_n^a \to p} u_1(P_n^a) = f_1(p) - \frac{2}{\pi} \int\limits_{(S)} \{K_{\xi\xi}(p, p') f_1(p') + \\
&\qquad\qquad + K_{\xi\eta}(p, p') g_1(p')\} \, ds = 0, \\
&\lim_{P_n^a \to p} v_1(P_n^a) = g_1(p) - \frac{2}{\pi} \int\limits_{(S)} \{K_{\eta\xi}(p, p') f_1(p') + \\
&\qquad\qquad + K_{\eta\eta}(p, p') g_1(p')\} \, ds = 0, \\
&\lim_{P_n^i \to p} u_1(P_n^i) = f_1(p) + \frac{2}{\pi} \int\limits_{(S)} \{K_{\xi\xi}(p, p') f_1(p') + \\
&\qquad\qquad + K_{\xi\eta}(p, p') g_1(p')\} \, ds = 2 f_1(p), \\
&\lim_{P_n^i \to p} v_1(P_n^i) = g_1(p) + \frac{2}{\pi} \int\limits_{(S)} \{K_{\eta\xi}(p, p') f_1(p') + \\
&\qquad\qquad + K_{\eta\eta}(p, p') g_1(p')\} \, ds = 2 g_1(p).
\end{aligned}
$$

Da die partiellen Ableitungen erster Ordnung von u_1, v_1 in $R + S$ als auch in $R_a + S$ stetig sind und zusammen mit der zu

$$
\vartheta_1 = \frac{2}{\pi} \frac{\partial}{\partial \xi} \int\limits_{(S)} f_1(p') \frac{\partial \left(\log \frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}} ds + \frac{2}{\pi} \frac{\partial}{\partial \eta} \int\limits_{(S)} g_1(p') \frac{\partial \left(\log \frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}} ds
$$

konjugierten Potentialfunktion

$$
\chi_1 = -\frac{2}{\pi} \frac{\partial}{\partial \eta} \int\limits_{(S)} f_1(p') \frac{\partial \left(\log \frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}} ds + \frac{2}{\pi} \frac{\partial}{\partial \xi} \int\limits_{(S)} g_1(p') \frac{\partial \left(\log \frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}} ds
$$

im Unendlichen wie $\frac{1}{r_{OP}^2}$ verschwinden, und u_1 und v_1 dort ebenfalls verschwinden, so folgt aus der auf das Gebiet R_a bezüglichen Relation (145) bei Beachtung der ersten beiden Gleichungen (185), daß im Gebiet R_a

$$
u_1(P) \equiv 0 \quad \text{und} \quad v_1(P) \equiv 0
$$

sein muß. Da somit auch $\vartheta_1(P)$ in R_a identisch verschwindet, so gilt das auch für die konjugierte Potentialfunktion $\chi_1(P)$, die ja im Unendlichen von vornherein verschwindet.

Damit bekommt man für die durch (147) gegebenen Ausdrücke, die sich nach den Bemerkungen im Abschnitt 5 von § 6 beim Durchgang durch die Fläche stetig verhalten, zunächst

$$\lim_{P_n^a \to p} X_{u_1, v_1}(P_n^a, p) = 0,$$

$$\lim_{P_n^a \to p} Y_{u_1, v_1}(P_n^a, p) = 0$$

und also auch

$$\lim_{P_n^i \to p} X_{u_1, v_1}(P_n^i, p) = 0,$$

$$\lim_{P_n^i \to p} Y_{u_1, v_1}(P_n^i, p) = 0.$$

Aus (145) folgt dann aber unmittelbar, daß im Gebiet R

$$u_1(P) \equiv a_1 \xi + b_1, \quad v_1(P) \equiv a_1 \eta + c_1$$

sein muß, wo a_1, b_1, c_1 Konstanten sind. Wegen der beiden letzten Gleichungen von (185) hat man also

$$f_1(p) = \tfrac{1}{2}(a_1 \xi(p) + b_1), \quad g_1(p) = \tfrac{1}{2}(a_1 \eta(p) + c_1),$$

womit der Hilfssatz bewiesen ist.

3. Das zu dem System (182) assoziierte Gleichungssystem

$$(186) \quad \begin{aligned} f_2(p) - \frac{2}{\pi} \int_{(S)} \{K_{\xi\xi}(p', p) f_2(p') + K_{\xi\eta}(p', p) g_2(p')\} \, ds &= 0, \\ g_2(p) - \frac{2}{\pi} \int_{(S)} \{K_{\eta\xi}(p', p) f_2(p') + K_{\eta\eta}(p', p) g_2(p')\} \, ds &= 0 \end{aligned}$$

besitzt dann ebenfalls genau drei linear unabhängige Lösungen

$$f_{21}(p), \; g_{21}(p); \quad f_{22}(p), \; g_{22}(p); \quad f_{23}(p), \; g_{23}(p),$$

so daß man als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß das System (181) eine Lösung besitzt

$$(187) \quad \begin{aligned} \int_{(S)} \{\varrho(p') f_{21}(p') + \sigma(p') g_{21}(p')\} \, ds &= 0, \\ \int_{(S)} \{\varrho(p') f_{22}(p') + \sigma(p') g_{22}(p')\} \, ds &= 0, \\ \int_{(S)} \{\varrho(p') f_{23}(p') + \sigma(p') g_{23}(p')\} \, ds &= 0 \end{aligned}$$

erhält.

Erfüllen die gegebenen Randfunktionen diese Bedingungen, so liefern die mit einer Lösung $f(p)$, $g(p)$ des Systems (181) gebildeten Funktionen

$$(188)\qquad \begin{aligned} u(P) &= \frac{2}{\pi}\int\limits_{(S)} \{K_{\xi\xi}(P, p')f(p') + K_{\xi\eta}(P, p')g(p')\}\, ds,\\ v(P) &= \frac{2}{\pi}\int\limits_{(S)} \{K_{\eta\xi}(P, p')f(p') + K_{\eta\eta}(P, p')g(p')\}\, ds \end{aligned}$$

offenbar eine Lösung des Problems (179), (180).

4. Der Fall, daß die Bedingungen (187) nicht erfüllt sind, erfordert eine ähnliche Sonderbetrachtung, wie sie beim äußeren Problem im Raume durchgeführt wurde. Liegt der Ursprung 0 des ξ, η-Koordinatensystems im Gebiet R, so genügen die Funktionen

$$(189)\qquad u_0(P) = \frac{\xi}{r_{OP}^2}, \quad v_0(P) = \frac{\eta}{r_{OP}^2}$$

im Gebiet R_a den Differentialgleichungen (179). Wir behaupten, daß diese Funktionen sich n i c h t in der Form

$$(190)\qquad \begin{aligned} u_0(P) &= \frac{2}{\pi}\int\limits_{(S)} \{K_{\xi\xi}(P, p')f_0(p') + K_{\xi\eta}(P,p')g_0(p')\}\, ds,\\ v_0(P) &= \frac{2}{\pi}\int\limits_{(S)} \{K_{\eta\xi}(P, p')f_0(p') + K_{\eta\eta}(P, p')g_0(p')\}\, ds \end{aligned}$$

mit auf S stetigen Funktionen $f_0(p)$ und $g_0(p)$ darstellen lassen. Da nämlich nach (141) ausführlich geschrieben

$$K_{\xi\xi}(P, p) = \frac{\cos^2(r_{pP}, \eta)\cos(r_{pP}, n_p)}{r_{pP}}$$

und

$$K_{\xi\eta}(P, p) = -\frac{\cos(r_{pP}, \xi)\cos(r_{pP}, \eta)\cos(r_{pP}. n_p)}{r_{pP}}$$

ist, und gleichmäßig für alle Punkte p auf S, falls der Punkt P auf der positiven ξ-Achse ins Unendliche rückt, die Limesbeziehungen

$$\frac{r_{OP}}{r_{pP}} \to 1, \quad \cos(r_{pP}, \xi) \to 1, \quad \cos(r_{pP}, \eta) \to 0, \quad \cos(r_{pP}, n_p) \to \cos(\xi, n_p)$$

bestehen, so wird für die auf der rechten Seite von (190) gegebene Funktion $u_0(P)$ bei diesem Grenzübergang

$$r_{OP}u_0(P) \to 0,$$

im Gegensatz zu dem Limesverhalten der auf der rechten Seite von (189) gegebenen Funktion $u_0(P)$, für die

$$r_{OP}u_0(P) = \frac{\xi}{r_{OP}} \to 1$$

sein muß.

5. Verschwinden nun für die gegebenen Randfunktionen ϱ, σ die linken Seiten von (187) nicht gleichzeitig, so behaupten wir, daß sich drei Konstanten h, k, l so bestimmen lassen, daß die Bedingungen (187) für die neuen Randfunktionen

$$\bar{\varrho}(p) = \varrho(p) - h\frac{\xi(p)}{r_{Op}^2} - k, \quad \bar{\sigma}(p) = \sigma(p) - h\frac{\eta(p)}{r_{Op}^2} - l \tag{191}$$

erfüllt sind. Dazu müßten die drei Konstanten aus dem linearen inhomogenen Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
&h\int\limits_{(S)}\left\{\frac{\xi(p')}{r_{Op'}^2}f_{21}(p') + \frac{\eta(p')}{r_{Op'}^2}g_{21}(p')\right\}ds + k\int\limits_{(S)}f_{21}(p')ds + l\int\limits_{(S)}g_{21}(p')ds \\
&\qquad\qquad = \int\limits_{(S)}\{\varrho(p')f_{21}(p') + \sigma(p')g_{21}(p')\}ds, \\
&h\int\limits_{(S)}\left\{\frac{\xi(p')}{r_{Op'}^2}f_{22}(p') + \frac{\eta(p')}{r_{Op'}^2}g_{22}(p')\right\}ds + k\int\limits_{(S)}f_{22}(p')ds + l\int\limits_{(S)}g_{22}(p')ds \\
&\qquad\qquad = \int\limits_{(S)}\{\varrho(p')f_{22}(p') + \sigma(p')g_{22}(p')\}ds, \\
&h\int\limits_{(S)}\left\{\frac{\xi(p')}{r_{Op'}^2}f_{23}(p') + \frac{\eta(p')}{r_{Op'}^2}g_{23}(p')\right\}ds + k\int\limits_{(S)}f_{23}(p')ds + l\int\limits_{(S)}g_{23}(p')ds \\
&\qquad\qquad = \int\limits_{(S)}\{\varrho(p')f_{23}(p') + \sigma(p')g_{23}(p')\}ds
\end{aligned} \tag{192}$$

ermittelt werden. Die Koeffizientendeterminante dieses Gleichungssystems ist, wie alsbald gezeigt werden wird, ungleich Null, so daß eine solche Bestimmung stets eindeutig möglich ist.

Es existieren also zwei Funktionen $\bar{f}(p)$ und $\bar{g}(p)$ als Lösungen eines inhomogenen Integralgleichungssystems der Form (181), bei dem als inhomogene Bestandteile statt ϱ und σ die durch (191) gegebenen Funktionen gewählt sind. Die mit ihnen gebildeten Funktionen

$$\begin{aligned}
u(P) &= \frac{2}{\pi}\int\limits_{(S)}\{K_{\xi\xi}(P, p')\bar{f}(p') + K_{\xi\eta}(P, p')\bar{g}(p')\}ds + h\frac{\xi}{r_{OP}^2} + k, \\
v(P) &= \frac{2}{\pi}\int\limits_{(S)}\{K_{\eta\xi}(P, p')\bar{f}(p') + K_{\eta\eta}(P, p')\bar{g}(p')\}ds + h\frac{\eta}{r_{OP}^2} + l
\end{aligned} \tag{193}$$

lösen alsdann offenbar das Problem (178), (179), womit Satz 13 ganz allgemein bewiesen ist.

Die für den Fall der Gültigkeit von (187) durch (190) gegebene Lösung ist offenbar in (193) mitenthalten, da in diesem Fall die sich aus (192) ergebenden Konstanten h, k, l sämtlich verschwinden müssen.

6. Nehmen wir, um den Beweis zu vervollständigen, an, daß die erwähnte Koeffizientendeterminante gleich Null ist. Das zu (192) gehörige, für $\varrho = \sigma = 0$ sich ergebende homogene lineare Gleichungssystem besitzt dann eine nicht triviale Lösung h, k, l. Also gibt es zwei Funktionen $\bar{\bar{f}}(p)$ und $\bar{\bar{g}}(p)$, die einem inhomogenen Integralgleichungssystem der Form (181) genügen, dessen inhomogene Bestandteile die Funktionen

$$h\frac{\xi(p)}{r_{Op}^2} + k, \quad h\frac{\eta(p)}{r_{Op}^2} + l \tag{194}$$

sind. Die mit $\bar{\bar{f}}$, $\bar{\bar{g}}$ gebildeten Funktionen

$$\begin{aligned} \bar{\bar{u}}(P) &= \frac{2}{\pi}\int\limits_{(S)} \{K_{\xi\xi}(P,p')\bar{\bar{f}}(p') + K_{\xi\eta}(P,p')\bar{\bar{g}}(p')\}\,ds, \\ \bar{\bar{v}}(P) &= \frac{2}{\pi}\int\limits_{(S)} \{K_{\eta\xi}(P,p')\bar{\bar{f}}(p') + K_{\eta\eta}(P,p')\bar{\bar{g}}(p')\}\,ds \end{aligned} \tag{195}$$

von der Form (188) genügen im Gebiet R_a den Differentialgleichungen (179) und nehmen auf S die Randwerte

$$[\bar{\bar{u}}]_S = h\frac{\xi(p)}{r_{Op}^2} + k, \quad [\bar{\bar{v}}]_S = h\frac{\eta(p)}{r_{Op}^2} + l \tag{196}$$

an. Die Funktionen

$$u^*(P) = \bar{\bar{u}}(P) - \left(h\frac{\xi}{r_{OP}^2} + k\right), \quad v^*(P) = \bar{\bar{v}}(P) - \left(h\frac{\eta}{r_{OP}^2} + l\right) \tag{197}$$

sind dann im Gebiet R_a ebenfalls Lösungen der Gleichungen (179) und konvergieren bei Annäherung an S wegen (196) gegen die Randwerte

$$[u^*]_S = 0, \quad [v^*]_S = 0. \tag{198}$$

Da die Funktionen (194) auf S Tangentialableitungen besitzen, die einer gleichmäßigen H-Bedingung genügen, so gilt dasselbe von den Funktionen $\bar{\bar{f}}(p)$, $\bar{\bar{g}}(p)$, und damit existieren von den Funktionen (197) in $R_a + S$ die im Unendlichen wie $\frac{1}{r_{OP}^2}$ verschwindenden ersten partiellen Ableitungen.

Wählt man als zu

$$\vartheta^* = \frac{\partial u^*}{\partial \xi} + \frac{\partial v^*}{\partial \eta} = \frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial \xi}\int\limits_{(S)} \bar{\bar{f}}(p')\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\,ds + \\ + \frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial \eta}\int\limits_{(S)} \bar{\bar{g}}(p')\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\,ds$$

konjugierte Potentialfunktion

$$\chi^* = -\frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial\xi}\int\limits_{(S)} \overline{\overline{f}}(p')\,\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\,ds + \frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial\xi}\int\limits_{(S)} \overline{\overline{g}}(p')\,\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\,ds,$$

so ist χ^* in $R_a + S$ stetig und verschwindet im Unendlichen ebenfalls wie $\frac{1}{r_{OP}^2}$.
Da somit die mit diesem χ^* gebildeten Funktionen

$$X_{u^*,v^*}(P,p), \quad Y_{u^*,v^*}(P,p)$$

in $R_a + S$ stetig sind und im Unendlichen wie $\frac{1}{r_{OP}^2}$ gegen Null gehen, während die Funktionen u^*, v^* selbst im Unendlichen sich beschränkt verhalten und auf S wegen (198) verschwindende Randwerte annehmen, so folgt aus dem auf $R_a + S$ angewandten Integralsatz (145), daß in R_a

$$u^*(P) \equiv 0, \quad v^*(P) \equiv 0,$$

d. h. wegen (197)

$$h\,\frac{\xi}{r_{OP}^2} + k \equiv \overline{\overline{u}}\,(P), \quad h\,\frac{\eta}{r_{OP}^2} + l \equiv \overline{\overline{v}}\,(P)$$

sein muß. Das ist aber nach dem im Abschnitt 4 Bewiesenen nicht möglich, so daß wir bei der zu Beginn dieses Abschnitts gemachten Annahme zu einem Widerspruch gelangt sind.

7. Schreibt man das Integralgleichungssystem für die Funktionen $\overline{f}(p)$, $\overline{g}(p)$ als eine einzige Integralgleichung in der Form

$$\overline{f}^*(p) - \frac{2}{\pi}\int\limits_{(\mathfrak{S})} K(p,p')\,\overline{f}^*(p')\,ds = \overline{\varrho}^*(p), \tag{199}$$

so sei die ungerade Zahl m so gewählt, daß der iterierte Kern $K^{(m)}(p,q)$ auf seinem Definitionsbereich stetig ist. Man überlegt dann genau wie in § 6, daß der Kern

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^m K^{(m)}(p,q) \tag{200}$$

genau drei linear unabhängige Eigenfunktionen besitzt, so daß die für ihn gebildete Fredholmsche Determinante

$$D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix}$$

nicht identisch in den auf $\mathfrak{S}$ variierenden Größen $p_1, p_2, p_3;\ q_1, q_2, q_3$ verschwindet. Wir wählen für diese sechs Größen ein spezielles Wertesystem, für das diese Determinante nicht verschwindet.

Bildet man weiter für den Kern (200) die FREDHOLMsche Unterdeterminante

$$D^{(m)}\begin{pmatrix} p\, p_1\, p_2\, p_3 \\ q\, q_1\, q_2\, q_3 \end{pmatrix}$$

und setzt man

$$\Omega(p,q) = \left(\frac{2}{\pi}\right) K(p,q) + \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 K(p,q) + \cdots + \left(\frac{2}{\pi}\right)^m K^{(m)}(p,q),$$

$$\Gamma^{(m)}(p,q) = \frac{D^{(m)}\begin{pmatrix} p\, p_1\, p_2\, p_3 \\ q\, q_1\, q_2\, q_3 \end{pmatrix}}{D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1\, p_2\, p_3 \\ q_1\, q_2\, q_3 \end{pmatrix}},$$

$$\Gamma(p,q) = \Omega(p,q) + \int\limits_{(\mathfrak{S})} \Omega(p,p')\,\Gamma^{(m)}(p',q)\,ds,$$

so wähle man für $\bar{f}^*(p)$ im Hinblick auf eine spätere Anwendung die durch

$$\bar{f}^*(p) = \bar{\varrho}^*(p) + \int\limits_{(\mathfrak{S})} \Gamma(p,p')\,\bar{\varrho}^*(p')\,ds \tag{201}$$

gegebene Lösung der Integralgleichung (199).

Die drei linear unabhängigen Lösungen

$$f_{21}(p),\ g_{21}(p);\quad f_{22}(p),\ g_{22}(p);\quad f_{23}(p),\ g_{23}(p)$$

des assoziierten homogenen Systems (186) denke man sich ferner durch die drei linear unabhängigen Lösungen

$$f_{21}^*(p) = D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1\, p_2\, p_3 \\ p\;\, q_2\, q_3 \end{pmatrix},\ f_{22}^*(p) = D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1\, p_2\, p_3 \\ q_1\, p\;\, q_3 \end{pmatrix},\ f_{23}^*(p) = D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1\, p_2\, p_3 \\ q_1\, q_2\, p \end{pmatrix} \tag{202}$$

der zu (186) äquivalenten Integralgleichung

$$f_2^*(p) - \frac{2}{\pi}\int\limits_{(\mathfrak{S})} K(p',p)\,f_2^*(p')\,ds = 0$$

gegeben.

8. Den Satz 13 ergänzen wir zum Schluß durch folgenden Eindeutigkeitssatz:

Satz 14. *Sind die Funktionen ϱ und σ auf S stetig, so kann es höchstens eine Lösung des Problems* (179), (180) *geben, die sich im Unendlichen beschränkt verhält, während ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung wie* $\frac{1}{r_{0P}^2}$ *verschwinden.*

Genügen die gegebenen Randfunktionen ϱ und σ der Bedingung (177), so beweisen die Sätze 13 und 14 zusammengenommen den Hauptsatz IV.

Beweis von Satz 14. Sind die S_n^a wieder die in R_a gelegenen gegen S konvergierenden Approximationskurven, und stellt das Funktionenpaar $u(P)$,

$v(P)$ eine beliebige Lösung des Problems (179), (180) dar, so verstehe man unter

$$u_{(n)}(P), \quad v_{(n)}(P)$$

die zu dem Gebiet R_n^a gehörigen Lösungsfunktionen der Gleichungen (179) von der Form (193), die bei Annäherung an die Berandung S_n^a von R_n^a gegen die dort von den Funktionen $u(P)$, $v(P)$ angenommenen Werte konvergieren, also

$$(203)\quad \begin{aligned} u_{(n)}(P) &= \frac{2}{\pi}\int\limits_{(S_n^a)} \{K_{\xi\xi,n}(P,p')f_{(n)}(p') + K_{\xi\eta,n}(P,p')g_{(n)}(p')\}\,ds + \\ &\qquad + h_n\frac{\xi}{r_{OP}^2} + k_n, \\ v_{(n)}(P) &= \frac{2}{\pi}\int\limits_{(S_n^a)} \{K_{\eta\xi,n}(P,p')f_{(n)}(p') + K_{\eta\eta,n}(P,p')g_{(n)}(p')\}\,ds + \\ &\qquad + h_n\frac{\eta}{r_{OP}^2} + l_n, \end{aligned}$$

wobei wir für die Funktionen $f_{(n)}(p)$, $g_{(n)}(p)$ die zu (201) analog gebauten, auf die Kurven S_n^a bezüglichen Lösungen des Integralgleichungssystems

$$\begin{aligned} f_{(n)}(p) - \frac{2}{\pi}\int\limits_{(S_n^a)} \{K_{\xi\xi,n}(p,p')f_{(n)}(p') + K_{\xi\eta,n}(p,p')g_{(n)}(p')\}\,ds \\ = \left[u - h_n\frac{\xi(P)}{r_{OP}^2} - k_n\right]_{S_n^a}, \\ g_{(n)}(p) - \frac{2}{\pi}\int\limits_{(S_n^a)} \{K_{\eta\xi,n}(p,p')f_{(n)}(p') + K_{\eta\eta,n}(p,p')g_{(n)}(p')\}\,ds \\ = \left[v - h_n\frac{\eta(P)}{r_{OP}^2} - l_n\right]_{S_n^a} \end{aligned}$$

wählen.

Wir behaupten, daß innerhalb R_n^a

$$(204)\qquad u_{(n)}(P) \equiv u(P), \quad v_{(n)}(P) \equiv v(P)$$

sein muß. Da nämlich $u_{(n)}(P)$ und $v_{(n)}(P)$ in $R_n^a + S_n^a$ stetige partielle Ableitungen erster Ordnung besitzen, so gilt dasselbe von den Differenzfunktionen

$$\bar{u}_{(n)}(P) = u_{(n)}(P) - u(P), \quad \bar{v}_{(n)}(P) = v_{(n)}(P) - v(P).$$

Zu der Potentialfunktion

$$\vartheta = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta},$$

deren partielle Ableitungen erster Ordnung im Unendlichen wie $\frac{1}{r_{OP}^3}$ verschwinden, gehört nun die im Gebiet R_a eindeutige konjugierte Potentialfunktion

$$(205)\qquad \chi(P) = \int\limits_{(C)} \left\{\frac{\partial\chi}{\partial\xi}d\xi + \frac{\partial\chi}{\partial\eta}d\eta\right\} = \int\limits_{(C)} \left\{\frac{\partial\vartheta}{\partial\xi}d\eta - \frac{\partial\vartheta}{\partial\eta}d\xi\right\},$$

wobei C eine ganz in R_a gelegene Kurve bedeutet, die von einem beliebigen festen Punkt P_0 zu dem variablen Punkt P verläuft. Daß $\chi(P)$ durch (205) in R_a wirklich als eindeutige Funktion erklärt wird, folgt daraus, daß

$$(206) \qquad \oint\limits_{(C)} \left\{\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} d\eta - \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} d\xi\right\} = 0$$

ist, wenn über irgendeine in R_a gelegene geschlossene Kurve C integriert wird, auch dann, wenn C das Gebiet R in seinem Innern enthält. Denn versteht man im letzteren Falle unter K_0 einen Kreis um den in R gelegenen Ursprung 0 des Koordinatensystems, der C und damit auch R in seinem Innern enthält, so muß nach dem Gaussschen Integralsatz, da in dem zwischen C und K gelegenen Teilgebiet von R_a

$$\Delta\vartheta = 0$$

ist,

$$\oint\limits_{C} \left\{\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} d\eta - \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} d\xi\right\} = \oint\limits_{K_0} \left\{\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} d\eta - \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} d\xi\right\}$$

sein. Da aber das rechts stehende Integral, wenn der Radius von K_0 unbegrenzt wächst, gegen 0 konvergiert, so ist (206) bewiesen.

Die durch (205) gegebene Funktion $\chi(P)$ verschwindet im Unendlichen offenbar wie $\frac{1}{r^2_{0P}}$. Wählt man nun zu der Potentialfunktion

$$\begin{aligned}\overline{\vartheta}_{(n)}(P) &= \frac{\partial \overline{u_{(n)}}}{\partial \xi} + \frac{\partial \overline{v_{(n)}}}{\partial \eta} - \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial \xi}\int\limits_{(S_n^a)} f_{(n)}(p') \frac{\partial\left(\log \frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}} ds + \frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial \eta}\int\limits_{(S_n^a)} g_{(n)}(p') \frac{\partial\left(\log \frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}} ds - \vartheta\end{aligned}$$

als in R_a eindeutige konjugierte Potentialfunktion die Funktion

$$\begin{aligned}\overline{\chi}_{(n)}(P) = &-\frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial \eta}\int\limits_{(S_n^a)} f_{(n)}(p') \frac{\partial\left(\log \frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}} ds + \frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial \xi}\int\limits_{(S_n^a)} g_{(n)}(p') \frac{\partial\left(\log \frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}} ds - \\ &-\int\limits_{(C)} \left\{\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} d\eta - \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} d\xi\right\},\end{aligned}$$

so ist $\overline{\chi}_{(n)}(P)$ in $R_n^a + S_n^a$ stetig und verschwindet ebenso wie die ersten partiellen Ableitungen von $\overline{u_{(n)}}$ und $\overline{v_{(n)}}$ im Unendlichen wie $\frac{1}{r^2_{0P}}$. Da aber die Randwerte der Funktionen $\overline{u_{(n)}}(P)$, $\overline{v_{(n)}}(P)$, die sich ergeben, wenn der in R_n^a gelegene Punkt P gegen die Berandung S_n^a konvergiert, verschwinden, und die Funktionen selbst sich im Unendlichen beschränkt verhalten, so folgt aus dem auf $R_n^a + S_n^a$ angewandten Integralsatz (145), daß, wie behauptet,

$$\overline{u_{(n)}}(P) = u_{(n)}(P) - u(P) \equiv 0, \quad \overline{v_{(n)}}(P) = v_{(n)}(P) - v(P) \equiv 0$$

sein muß.

Sind nun $p_{1n}, p_{2n}, p_{3n}; q_{1n}, q_{2n}, q_{3n}$ sechs auf den $\mathfrak{S}_{(n)}$ gelegene Punktfolgen, für die die Limesbeziehungen

$$p_{1n} \xrightarrow[(n)]{} p_1, \quad p_{2n} \xrightarrow[(n)]{} p_2, \quad p_{3n} \xrightarrow[(n)]{} p_3,$$
$$q_{1n} \xrightarrow[(n)]{} q_1, \quad q_{2n} \xrightarrow[(n)]{} q_2, \quad q_{3n} \xrightarrow[(n)]{} q_3$$

bestehen, so muß von einem gewissen n ab

$$D_{(n)}^{(m)}\begin{pmatrix} p_{1n} & p_{2n} & p_{3n} \\ q_{1n} & q_{2n} & q_{3n} \end{pmatrix} \neq 0$$

sein, und man erkennt, daß bei unbegrenzt wachsendem n die Funktionen $f_{(n)}(p), g_{(n)}(p)$ gegen die durch (201) gegebenen Funktionen $\overline{f}(p), \overline{g}(p)$ konvergieren, wenn man noch beachtet, daß die Konstanten h_n, k_n, l_n, die mit Hilfe der durch (202) gegebenen Funktionen

$$f_{21,n}(p), \; g_{21,n}(p); \quad f_{22,n}(p), \; g_{22,n}(p); \quad f_{23,n}(p), \; g_{23,n}(p)$$

gewonnen werden, für $n \to \infty$ gegen die aus dem Gleichungssystem (192) zu bestimmenden Konstanten h, k, l konvergieren.

Damit konvergieren aber die Funktionen (203) gegen die durch (193) gegebenen Lösungsfunktionen des Problems (179), (180). Wegen (204) ist also eine beliebige Lösung $u(P), v(P)$ mit der Lösung (193) identisch und damit eindeutig bestimmt.

(Eingegangen am 22. Mai 1942.)