Les fonctions asymptotiquement presque-périodiques d'une variable entière et leur application à l'étude de l'itération des transformations continues.

Par

Ky Fan à Paris.

Introduction.

Dans ses publications récentes, M. FRÉCHET[1]) a montré qu'il y a un lien étroit, à la fois analytique et dans la forme des énoncés, entre la théorie ergodique et celle des probabilités en chaîne. Il a utilisé dans la théorie ergodique des procédés qu'il avait ingénieusement employés dans la théorie des probabilités en chaîne[2]). Dans cet ordre d'idées, M. FRÉCHET a introduit les fonctions asymptotiquement presque-périodiques qui sont définies sur une demi-droite positive (c'est-à-dire définies pour les nombres réels $\geqq$ un certain nombre). Il en a fait usage pour obtenir des résultats nouveaux concernant les propriétés moyennes des transformations ponctuelles dépendant du paramètre de temps.

Dans le présent Mémoire, notre but primitif était d'étudier les propriétés moyennes de l'itération des transformations ponctuelles continues dans un espace distancié. De sorte que le paramètre duquel dépend l'itération est un nombre entier positif. Pour employer des méthodes analogues à celles de M. FRÉCHET, il est donc d'abord nécessaire de traiter les fonctions presque-périodiques et les fonctions asymptotiquement presque-périodiques qui sont définies respectivement pour tous les nombres entiers (positifs, négatifs et nul) ou pour tous les entiers positifs et qui prennent leurs valeurs dans un espace distancié[3]). C'est ce qui constituera la première et la seconde sections

---

1) M. FRÉCHET, a) Les fonctions asymptotiquement presque-périodiques. C. R. Acad. Sci. **213** (1941), p. 520–522; b) Sur le théorème ergodique de BIRKHOFF. C. R. Acad. Sci. **213** (1941), p. 607–609; c) Les fonctions asymptotiquement presque-périodiques. Revue Scientifique, 79e année (1941), p. 341–354; d) Une application des fonctions asymptotiquement presque-périodiques à l'étude des familles de transformations ponctuelles et au problème ergodique. Revue Scientifique, 79e année (1941), p. 407–417.

2) M. FRÉCHET, e) Recherches théoriques modernes sur le calcul des probabilités. Second Livre, Paris, 1938; f) Sur l'allure asymptotique des densités itérées dans le problème des probabilités en chaîne. Bull. Soc. Math. France **62** (1934), p. 68–83.

3) Il faut noter que M. J. v. NEUMANN [Almost periodic functions in a group, I. Trans. Amer. Math. Soc. **36** (1934), p. 106] a défini, en généralisant la définition donnée par S. BOCHNER des fonctions presque-périodiques de H. BOHR, les fonctions presque-périodiques, dont les valeurs sont des nombres complexes et dont l'argument est un élément d'un groupe quelconque. Voir aussi M. W. MAAK, Eine neue Definition der fastperiodischen Funktionen. Abhandl. Math. Sem. Hans. Univ. XI (1936), p. 240–244.

de ce travail. Dans la troisième section, nous nous occuperons de l'application de la presque-périodicité et de la presque-périodicité asymptotique à l'étude de l'itération des transformations continues.

En 1939, M. K. Yosida[4]) a déjà appliqué les fonctions asymptotiquement presque-périodiques d'une variable entière à l'étude de l'itération des transformations. Cependant M. Yosida n'a considéré que les transformations linéaires dans un espace de Banach, tandis que nos résultats principaux contenus dans la troisième section s'appliquent à toute transformation continue dans un espace distancié.

Nous remercions bien vivement M. le Professeur M. Fréchet pour ses précieux conseils.

I. Les fonctions presque-périodiques d'une variable entière[5]).

1. *Définition.* Soit $x = p(n)$ une fonction définie pour tous les nombres entiers n, positifs, négatifs et nul, et prenant ses valeurs x dans un espace distancié $\mathcal{E}$. Nous dirons que $x = p(n)$ est une *fonction presque-périodique de la variable entière* n, lorsqu' à tout nombre $\varepsilon > 0$, on peut faire correspondre un entier positif $l = l(\varepsilon)$, appelé *longueur d'inclusion,* tel que parmi $l + 1$ entiers consécutifs quelconques, il existe au moins un entier τ, appelé *presque-période de* $p(n)$ *relative à* ε, pour lequel la distance $\big(p(n),\, p(n+\tau)\big) < \varepsilon$, quel que soit n.

Il est clair que toute fonction périodique de n est une fonction presque-périodique de n. Nous verrons plus loin qu'il existe des fonctions presque-périodiques de n sans être périodiques.

De la définition suit immédiatement qu'avec $p(n)$, la fonction $p(n + n_0)$, où n_0 désigne un nombre entier fixe, est aussi presque-périodique.

2. *Quelques propriétés immédiates.* Etant donnée une fonction presque-périodique $x = p(n)$, soit l une longueur d'inclusion relative à un nombre donné $\varepsilon > 0$. Pour tout entier n_1 et pour tout intervalle $(n_0, n_0 + l)$ de longueur l et à extrémités entières, il y a au moins un entier n_2 compris dans cet intervalle et tel que $\big(p(n_1), p(n_2)\big) < \varepsilon$. En effet, on peut trouver dans l'intervalle $(n_0 - n_1, n_0 - n_1 + l)$ une presque-période τ de $p(n)$ relative à ε. En

[4]) K. Yosida, Asymptotic almost periodicities and ergodic theorems. Proc. Imp. Acad. Japan XV (1939), p. 255—259.

[5]) Dans une lettre à l'auteur, du 6 août 1942, M. Knopp a eu l'obligeance de nous signaler que A. Walther a déjà étudié en 1928 les fonctions presque-périodiques d'une variable entière et de valeurs réelles ou complexes. Voir A. Walther, a) Fastperiodische Folgen und Potenzreihen mit fastperiodischen Koeffizienten, Abhandl. Math. Sem. Hamburg. Univ., VI. (1928), p. 217—234; b) Fastperiodische Folgen und ihre Fouriersche Analyse, Atti del Congresso Internazionale dei Matematici, Bologna (1928), II, p. 289—298).

prenant $n_2 = n_1 + \tau$, on voit que n_2 se trouve dans l'intervalle $(n_0, n_0 + l)$ et que $(p(n_1), p(n_2)) < \varepsilon$.

Désignons maintenant par $X(p, -\infty < n < +\infty)$ l'ensemble des valeurs x de $p(n)$ quand n varie de $-\infty$ à $+\infty$. D'une façon analogue, nous désignons par $X(p, n_0 \leqq n < +\infty)$ l'ensemble des valeurs x de $p(n)$ quand n prend toutes les valeurs entières $\geqq n_0$. En outre, on désigne comme d'habitude, par $\overline{X}$ la fermeture de l'ensemble X. Nous avons alors, d'après ce qui précède, la proposition suivante:

Pour toute fonction presque-périodique $x = p(n)$ d'une variable entière n, on a

$$\overline{X}(p, -\infty < n < +\infty) = \overline{X}(p, n_0 \leqq n < +\infty), \tag{1}$$

quel que soit l'entier n_0. Et de plus, l'ensemble $X(p, -\infty < n < +\infty)$ est totalement borné[6]).

Comme tout ensemble totalement borné dans un espace distancié complet est compact, on a donc:

Si l'espace distancié auquel appartiennent les valeurs x de la fonction presque-périodique $x = p(n)$, est complet, l'ensemble des valeurs x de $p(n)$ quand n varie de $-\infty$ à $+\infty$, est compact.

Supposons maintenant qu'une fonction presque-périodique $p(n)$ tende vers un point x_0 quand n tend vers $+\infty$. A tout $\varepsilon > 0$ donné on peut déterminer un entier $n_0 = n_0(\varepsilon)$ assez grand tel que

$$(p(n),\ x_0) < \varepsilon \qquad \text{pour } n \geqq n_0.$$

On a alors, d'après (1),

$$(p(n),\ x_0) \leqq \varepsilon, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Or, ε peut être pris aussi petit que l'on veut, on a donc $p(n) \equiv x_0$. Ainsi, *la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction presque-périodique de n, $x = p(n)$, soit une constante abstraite x_0 est que $p(n)$ tende vers x_0 quand n tend vers $+\infty$.*

Considérons à présent une suite de fonctions presque-périodiques $p_1(n)$, $p_2(n), \ldots, p_m(n), \ldots$ qui converge vers une fonction limite $p(n)$ et cela uniformément sur l'ensemble des entiers n. A tout $\varepsilon > 0$, on peut faire correspondre un entier positif M tel que

$$(p(n), p_m(n)) < \varepsilon, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;$$

---

[6]) Un ensemble X dans un espace distancié est dit *totalement borné*, si pour tout $\varepsilon > 0$ donné, X peut être décomposé en une somme d'un nombre fini de sous-ensembles de diamètres $\leqq \varepsilon$. Cf. HAUSDORFF, Mengenlehre, 3[e] édition, Berlin-Leipzig, 1935, p. 108.

dès que $m \geqq M$. Dès lors, si τ est une presque-période de $p_M(n)$ relative à ε, on a, quel que soit n,

$$\begin{aligned}(p(n+\tau),\ p(n)) \leqq (p(n+\tau),\ p_M(n+\tau)) + (p_M(n+\tau),\ p_M(n)) + \\ + (p_M(n),\ p(n)) < 3\,\varepsilon.\end{aligned}$$

C'est-à-dire que τ est une presque-période de $p(n)$ relative à $3\,\varepsilon$. Donc: *la limite d'une suite uniformément convergente de fonctions presque-périodiques est elle-même une fonction presque-périodique.*

On démontre facilement la proposition suivante: *Soient $\mathfrak{E}_1$ et $\mathfrak{E}_2$ deux espaces distanciés. Soit $x = p(n)$ une fonction presque-périodique de n et prenant ses valeurs dans $\mathfrak{E}_1$. Si $y = g(x)$ est une fonction définie et uniformément continue sur l'ensemble $X(p, -\infty < n < +\infty)$, prenant ses valeurs dans $\mathfrak{E}_2$, alors $y = g(p(n))$ est presque-périodique.*

On a aussi la proposition suivante: *Soient $\mathfrak{E}_1$ et $\mathfrak{E}_2$ deux espaces distanciés, dont le premier est complet. Soit $x = p(n)$ une fonction presque-périodique de n et prenant ses valeurs x dans $\mathfrak{E}_1$. Si $y = g(x)$ est une fonction définie et continue sur l'ensemble $\overline{X}(p, -\infty < n < +\infty)$ et prenant ses valeurs y dans $\mathfrak{E}_2$, $y = g(p(n))$ est presque-périodique.*

3. *Relations avec les fonctions normales d'une variable entière.* Appelons *fonction normale* une fonction $x = f(n)$, définie pour tous les nombres entiers n, prenant ses valeurs x dans un espace distancié et telle que de toute suite

$$f(n+h_1),\ f(n+h_2),\ \ldots,\ f(n+h_m),\ \ldots,$$

où les h sont des nombres entiers arbitraires, on puisse extraire une suite

$$f(n+k_1),\ f(n+k_2),\ \ldots,\ f(n+k_m),\ \ldots,$$

qui converge uniformément (c'est-à-dire que la convergence est uniforme relativement à l'argument n) vers une fonction limite.

Cette définition est tout à fait analogue à celle des fonctions continues normales d'une variable réelle. Il est bien connu que toute fonction continue normale d'une variable réelle est continue presque-périodique au sens de H. Bohr. Inversement, si l'espace distancié auquel appartiennent les valeurs x d'une fonction continue presque-périodique $x = p(t)$ d'une variable réelle, est complet, $p(t)$ est une fonction continue normale[7]). En suivant dans leurs grandes lignes les démonstrations connues de ces théorèmes, on peut démontrer le théorème suivant:

Toute fonction normale d'une variable entière est presque-périodique. Inversement, si l'espace distancié auquel appartiennent les valeurs x d'une fonction

---

[7]) Cf. J. Favard, Leçons sur les fonctions presque-périodiques, Paris, 1933, p. 77–80.

presque-périodique $x = p(n)$, est complet, $p(n)$ est une fonction normale de la variable entière n.

Soit maintenant $x = p(t)$ une fonction continue normale d'une variable réelle t. Si l'on ne considère que les valeurs entières de t, on obtient une fonction $p(n)$ définie pour tous les nombres entiers. Il est clair que $p(n)$ est une fonction normale de la variable n. Il en résulte donc la proposition suivante: *Soient $\mathcal{E}$ un espace distancié complet et $x = p(t)$ une fonction continue presque-périodique d'une variable réelle t et prenant ses valeurs x dans $\mathcal{E}$. Si l'on ne considère que les valeurs entières de t, la fonction $p(n)$ est une fonction presque-périodique de la variable entière n.*

On a ainsi un moyen de former un grand nombre d'exemples de fonctions presque-périodiques d'une variable entière. Par exemple, la fonction $x = \cos t$ est une fonction continue presque-périodique de la variable réelle t, $x = \cos n$ est donc une fonction presque-périodique de la variable entière n. On observe que $\cos n$ n'est pas une fonction périodique de la variable entière n, bien que $\cos t$ soit une fonction périodique de la variable réelle t.

4. *Cas où les valeurs de la fonction appartiennent à un espace de* Banach. Supposons maintenant que l'espace distancié $\mathcal{E}$ auquel appartiennent les valeurs x d'une fonction presque-périodique $x = p(n)$, soit un espace de Banach. On voit qu'avec $p(n)$, la fonction $r \cdot p(n)$, où r désigne un nombre réel fixe, est aussi presque-périodique; il en est de même de la fonction $p(n) + x_0$, où x_0 est un point fixe dans $\mathcal{E}$ et aussi de la fonction de valeurs numériques $\|p(n)\|$. Cette dernière assertion se démontre en remarquant que

$$\Big|\,\|p(n+\tau)\| - \|p(n)\|\,\Big| \leqq \|p(n+\tau) - p(n)\| = \big(p(n+\tau), p(n)\big).$$

Notons encore que la somme et la différence de deux fonctions presque-périodiques sont encore presque-périodiques, car la somme et la différence de deux fonctions normales sont évidemment des fonctions normales.

Soient $p_1(n)$, $p_2(n)$ deux fonctions presque-périodiques prenant leurs valeurs dans un même espace de Banach. *S'il existe un entier N tel qu'on ait*

$$p_1(n) = p_2(n) \quad \textit{pour } n \geqq N,$$

les deux fonctions $p_1(n)$ et $p_2(n)$ sont nécessairement identiques. En effet, la différence $p_1(n) - p_2(n)$ est une fonction presque-périodique et l'on a $\lim\limits_{n \to +\infty} [p_1(n) - p_2(n)] = 0$. Alors, d'après une proposition donnée au n^o 2, $p_1(n) - p_2(n)$ est identiquement égale au point 0.

Ainsi, une fonction presque-périodique $p(n)$ dont les valeurs appartiennent à un espace de Banach, est complètement déterminée par ses valeurs pour les entiers $\geqq N$, quel que soit N.

5. *Théorème de la moyenne.* Nous allons établir le théorème suivant qui est d'une importance fondamentale:

Théorème de la moyenne. Si $x = p(n)$ est une fonction presque-périodique de n et prend ses valeurs x dans un espace de BANACH, *la moyenne arithmétique*

$$\frac{p(1)+p(2)+\cdots+p(n)}{n} \tag{2}$$

converge vers une limite déterminée quand n tend vers $+\infty$.

Démonstration. D'après une proposition donnée au n^0 2, l'ensemble des valeurs x de $p(n)$ quand n varie sur l'ensemble des entiers, est compact. Dès lors, la norme $\|p(n)\|$ est bornée sur l'ensemble des entiers. Soit B une borne supérieure de $\|p(n)\|$. Soient $\varepsilon > 0$ donné, $l(\varepsilon)$ une longueur d'inclusion de $p(n)$ relative à ε et M un entier > 1. Soit τ_k $(k = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ une presque-période de $p(n)$ relative à ε et telle que

$$kM < \tau_k \leqq kM + l.$$

On a

$$\sum_{i=kM+1}^{(k+1)M} p(i) = \sum_{i=kM+1-\tau_k}^{(k+1)M-\tau_k} p(i+\tau_k)$$

$$= \sum_{i=1}^{M} p(i+\tau_k) + \sum_{i=kM+1-\tau_k}^{0} p(i+\tau_k) - \sum_{i=(k+1)M-\tau_k+1}^{M} p(i+\tau_k).$$

Pour les deux derniers termes, on a

$$\left\| \sum_{i=kM+1-\tau_k}^{0} p(i+\tau_k) \right\| \leqq B(\tau_k - kM) \leqq Bl,$$

$$\left\| \sum_{i=(k+1)M-\tau_k+1}^{M} p(i+\tau_k) \right\| \leqq B(\tau_k - kM) \leqq Bl.$$

D'autre part, nous avons

$$\left\| \sum_{i=1}^{M} p(i+\tau_k) - \sum_{i=1}^{M} p(i) \right\| < M\varepsilon,$$

puisque τ_k est une presque-période de $p(n)$ relative à ε. De là

$$\left\| \frac{1}{nM} \sum_{i=kM+1}^{(k+1)M} p(i) - \frac{1}{nM} \sum_{i=1}^{M} p(i) \right\|$$

$$\leqq \frac{1}{nM} \left\| \sum_{i=kM+1}^{(k+1)M} p(i) - \sum_{i=1}^{M} p(i+\tau_k) \right\| + \frac{1}{nM} \left\| \sum_{i=1}^{M} p(i+\tau_k) - \sum_{i=1}^{M} p(i) \right\|$$

$$= \frac{1}{nM} \left\| \sum_{i=kM+1-\tau_k}^{0} p(i+\tau_k) - \sum_{i=(k+1)M-\tau_k+1}^{M} p(i+\tau_k) \right\| +$$

$$+ \frac{1}{nM} \left\| \sum_{i=1}^{M} p(i+\tau_k) - \sum_{i=1}^{M} p(i) \right\|$$

$$\leqq \frac{2Bl}{nM} + \frac{\varepsilon}{n} = \frac{1}{n}\left(\varepsilon + \frac{2Bl}{M}\right),$$

et par conséquent

$$(3)\quad \left\| \frac{1}{nM}\sum_{i=1}^{nM} p(i) - \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} p(i) \right\|$$

$$\leqq \sum_{k=0}^{n-1} \left\| \frac{1}{nM}\sum_{i=kM+1}^{(k+1)M} p(i) - \frac{1}{nM}\sum_{i=1}^{M} p(i) \right\| \leqq \varepsilon + \frac{2Bl}{M}.$$

Soit maintenant M' un entier compris entre nM et $(n+1)M$:

$$nM < M' \leqq (n+1)M.$$

Nous avons

$$(4)\quad \left\| \frac{1}{M'}\sum_{i=1}^{M'} p(i) - \frac{1}{nM}\sum_{i=1}^{nM} p(i) \right\|$$

$$\leqq \left\| \frac{1}{M'}\sum_{i=1}^{M'} p(i) - \frac{1}{M'}\sum_{i=1}^{nM} p(i) \right\| + \left\| \frac{1}{M'}\sum_{i=1}^{nM} p(i) - \frac{1}{nM}\sum_{i=1}^{nM} p(i) \right\|$$

$$\leqq \frac{BM}{M'} + \frac{1}{n}\left\| \frac{1}{nM}\sum_{i=1}^{nM} p(i) \right\|$$

$$\leqq \frac{B}{n} + \frac{1}{n}\left\| \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} p(i) \right\| + \frac{\varepsilon}{n} + \frac{2Bl}{nM}$$

$$\leqq \frac{2B}{n} + \frac{\varepsilon}{n} + \frac{2Bl}{nM}.$$

De (3) et (4):

$$\left\| \frac{1}{M'}\sum_{i=1}^{M'} p(i) - \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} p(i) \right\|$$

$$\leqq \left\| \frac{1}{M'}\sum_{i=1}^{M'} p(i) - \frac{1}{nM}\sum_{i=1}^{nM} p(i) \right\| + \left\| \frac{1}{nM}\sum_{i=1}^{nM} p(i) - \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} p(i) \right\|$$

$$\leqq \frac{2B}{n} + \frac{\varepsilon}{n} + \frac{2Bl}{nM} + \varepsilon + \frac{2Bl}{M}$$

$$= \frac{2B}{n} + \left(\varepsilon + \frac{2Bl}{M}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqq \frac{2B}{n} + 2\left(\varepsilon + \frac{2Bl}{M}\right).$$

Si nous considérons deux entiers M_1 et M_2, le premier dans l'intervalle $(n_1 M, (n_1+1)M)$, le deuxième dans l'intervalle $(n_2 M, (n_2+1)M)$, les deux entiers n_1, n_2 étant tous les deux plus grands que n, nous aurons alors

$$\begin{aligned}\left\| \frac{1}{M_1} \sum_{i=1}^{M_1} p(i) - \frac{1}{M_2} \sum_{i=1}^{M_2} p(i) \right\| \\ \leqq \left\| \frac{1}{M_1} \sum_{i=1}^{M_1} p(i) - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} p(i) \right\| + \left\| \frac{1}{M_2} \sum_{i=1}^{M_2} p(i) - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} p(i) \right\| \\ \leqq \frac{4B}{n} + 4\left(\varepsilon + \frac{2Bl}{M}\right).\end{aligned}$$

Ceci étant, lorsque ε est donné, nous pouvons choisir tout d'abord M suffisamment grand pour que $\frac{2Bl}{M} \leqq \varepsilon$, puis un entier positif n tel que $\frac{4B}{n} \leqq \varepsilon$, on aura alors

$$\left\| \frac{1}{M_1} \sum_{i=1}^{M_1} p(i) - \frac{1}{M_2} \sum_{i=1}^{M_2} p(i) \right\| \leqq 9\,\varepsilon,$$

pourvu que M_1 et M_2 soient tous les deux supérieurs à nM. La moyenne arithmétique (2) converge donc vers une limite déterminée quand n tend vers $+\infty$. C. q. f. d.

La limite de la moyenne arithmétique (2) est appelée *la moyenne de la fonction* $p(n)$ et sera désignée par $\mathfrak{M}(p)$.

Si, dans la formule (3), nous faisons croître n indéfiniment, nous obtenons

$$\left\| \mathfrak{M}(p) - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} p(i) \right\| \leqq \varepsilon + \frac{2Bl}{M}, \tag{5}$$

inégalité valable quel que soit l'entier positif M.

Les deux fonctions $p(n)$ et $p(n+n_0)$, où n_0 désigne un entier fixe quelconque, sont presque-périodiques en même temps et l'on a

$$\mathfrak{M}(p(n)) = \mathfrak{M}(p(n+n_0)). \tag{6}$$

En effet, on a

$$\begin{aligned}&\frac{p(1+n_0) + p(2+n_0) + \dots + p(n+n_0)}{n} \\ &= \frac{n+n_0}{n} \cdot \frac{p(1) + p(2) + \dots + p(n+n_0)}{n+n_0} - \frac{p(1) + p(2) + \dots + p(n_0)}{n}\end{aligned}$$

et au second membre les deux termes tendent respectivement vers $\mathfrak{M}(p)$ et 0 quand n tend vers $+\infty$.

Comme $p(n+n_0)$ admet les mêmes presque-périodes de $p(n)$ relativement à un même nombre et avec la même longueur d'inclusion, on a, en vertu de (5):

$$\left\| \mathfrak{M}(p(n)) - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} p(i+n_0) \right\| \leqq \varepsilon + \frac{2Bl}{M},$$

quel que soit l'entier n_0. En prenant $n_0 = -(M+1)$, nous avons en particulier

$$\left\| \mathfrak{M}(p(n)) - \frac{1}{M}\left(p(-1) + p(-2) + \cdots + p(-M)\right) \right\| \leqq \varepsilon + \frac{2Bl}{M}.$$

Donc:

$$\mathfrak{M}(p) = \lim_{n \to +\infty} \frac{p(1) + p(2) + \ldots + p(n)}{n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{p(-1) + p(-2) + \ldots + p(-n)}{n}. \tag{7}$$

II. Les fonctions asymptotiquement presque-périodiques d'une variable entière.

6. *Définition et quelques propriétés immédiates.* Nous dirons qu'une fonction $x = f(n)$ définie pour les entiers positifs et prenant ses valeurs x dans un espace distancié $\mathcal{E}$ est *asymptotiquement presque-périodique*, si elle possède la propriété suivante:

Propriété P. *A tout $\varepsilon > 0$ donné correspondent deux entiers positifs l, N tels que parmi $l+1$ entiers positifs consécutifs quelconques se trouve au moins un entier τ pour lequel*

$$(f(n), f(n+\tau)) < \varepsilon \qquad \textit{quand } n \geqq N. \tag{8}$$

Nous dirons que τ est une *presque-période asymptotique de $f(n)$ relative à ε et N.*

On peut mettre la propriété P sous une forme équivalente:

Propriété P bis. *A tout $\varepsilon > 0$ donné correspondent deux entiers positifs l, N tels que parmi $l+1$ entiers consécutifs quelconques (non nécessairement positifs) il y ait au moins un entier τ pour lequel*

$$(f(n), f(n+\tau)) < \varepsilon \qquad \textit{quand } n \geqq N \textit{ et } n+\tau \geqq N. \tag{9}$$

La propriété P bis entraîne évidemment P. Inversement, soit $x = f(n)$ une fonction possédant la propriété P. Si $\varepsilon > 0$ est donné, choisissons l, N suivant la propriété P. Soient $n_0, n_0+1, \ldots, n_0+l$ $l+1$ entiers consécutifs qui ne sont pas tous positifs. Dans le cas où zéro figure parmi ces $l+1$ entiers, on pourra évidemment prendre $\tau = 0$ pour vérifier (9). Dans le cas contraire, ces $l+1$ entiers seront tous négatifs, on pourra d'abord prendre τ' parmi les $l+1$ entiers positifs $-(n_0+l), \ldots, -(n_0+1), -n_0$ de façon à vérifier (8). Posons $\tau = -\tau'$ et $m = n+\tau$, τ sera dans l'intervalle (n_0, n_0+l). On a

$$(f(m), f(m+\tau')) < \varepsilon \qquad \text{quand } m \geqq N;$$

d'où

$$(f(n+\tau), f(n)) < \varepsilon \qquad \text{quand } n+\tau \geqq N \text{ et par suite } n \geqq N.$$

Ainsi, la propriété P entraîne la propriété P bis. Les deux propriétés P et P bis sont donc équivalentes.

Etant donnée une fonction asymptotiquement presque-périodique $x = f(n)$, soient l, N deux entiers positifs correspondant à un nombre $\varepsilon > 0$ donné suivant la propriété P bis. Alors, quels que soient les entiers $n_0 \geqq N$ et $n_1 \geqq N$, il existe au moins un entier positif n_2 tel que

$$n_0 \leqq n_2 \leqq n_0 + l \quad \text{et} \quad (f(n_1), f(n_2)) < \varepsilon. \tag{10}$$

En effet, on peut trouver, d'après la propriété P bis, un entier τ (non nécessairement positif) tel que

$$n_0 - n_1 \leqq \tau \leqq n_0 - n_1 + l \quad \text{et} \quad (f(n_1), f(n_1 + \tau)) < \varepsilon,$$

puisque $n_1 \geqq N$ et $n_1 + \tau \geqq n_0 \geqq N$. En posant $n_2 = n_1 + \tau$, on voit que (10) est vérifié.

De ce fait, on conclut que *l'ensemble* $X(f, 0 < n < +\infty)$ *des valeurs d'une fonction asymptotiquement presque-périodique* $f(n)$, *quand* n *varie sur l'ensemble des entiers positifs, est totalement borné.* Par conséquent, *si l'espace distancié* $\mathfrak{E}$ *auquel appartiennent les valeurs de* $f(n)$, *est complet, l'ensemble* $X(f, 0 < n < +\infty)$ *est compact.*

On établit facilement les propositions suivantes:

Soit une suite de fonctions asymptotiquement presque-périodiques $f_1(n)$, $f_2(n), \ldots, f_m(n), \ldots$ *qui converge vers une fonction limite* $f(n)$ *et cela uniformément sur l'ensemble des entiers positifs* n. $f(n)$ *est elle-même asymptotiquement presque-périodique.*

Soient $\mathfrak{E}_1$ *et* $\mathfrak{E}_2$ *deux espaces distanciés. Soit* $x = f(n)$ *une fonction asymptotiquement presque-périodique de* n *et prenant ses valeurs* x *dans* $\mathfrak{E}_1$. *Si* $y = g(x)$ *est une fonction définie et uniformément continue sur l'ensemble* $X(f, 0 < n < +\infty)$, *prenant ses valeurs dans* $\mathfrak{E}_2$, *alors* $y = g(f(n))$ *est asymptotiquement presque-périodique.*

Soient $\mathfrak{E}_1$ *et* $\mathfrak{E}_2$ *deux espaces distanciés, dont le premier est complet. Soit* $x = f(n)$ *une fonction asymptotiquement presque-périodique de* n *et prenant ses valeurs* x *dans* $\mathfrak{E}_1$. *Si* $y = g(x)$ *est une fonction définie et continue sur l'ensemble* $\overline{X}(f, 0 < n < +\infty)$ *et prenant ses valeurs* y *dans* $\mathfrak{E}_2$, $y = g(f(n))$ *est asymptotiquement presque-périodique.*

7. *Les fonctions asymptotiquement normales d'une variable entière.* Une *fonction asymptotiquement normale* est une fonction $x = f(n)$ définie pour tous les entiers positifs n, prenant ses valeurs x dans un espace distancié et vérifiant la propriété suivante:

Propriété N. *De toute suite d'entiers positifs* h_m, *on peut extraire une suite* k_m, *pour laquelle la suite des fonctions* $f(n + k_m)$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ *converge uniformément sur l'ensemble des entiers positifs.*

On peut mettre la propriété N sous la forme suivante:

Propriété N bis. *De toute suite d'entiers positifs h_m tendant vers $+\infty$, on peut extraire une suite k_m, pour laquelle la suite des fonctions $f(n+k_m)$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ converge uniformément sur l'ensemble des entiers positifs.*

Il est facile de voir que les propriétés N et N bis sont équivalentes.

Théorème 1. *Toute fonction asymptotiquement normale d'une variable entière est asymptotiquement presque-périodique.*

Démonstration. Soit $f(n)$ une fonction asymptotiquement normale. Si elle n'était pas asymptotiquement presque-périodique, il y aurait un nombre $\varepsilon_0 > 0$ auquel ne correspondrait aucun couple l, N. C'est-à-dire que pour tout couple d'entiers positifs l, N, il existerait un intervalle $L_{l,N}$ de longueur l, à extrémités entières positives et ne contenant aucune presque-période asymptotique de $f(n)$ relative à ε_0 et N.

Prenons un entier h_1 dans l'intervalle $L_1' = L_{1,1}$ et un entier h_2 tel que $h_2 - h_1$ soit dans l'intervalle $L_2' = L_{2,2}$. Puis choisissons un intervalle $L_3' = L_{\nu_3, \nu_3}$ tel que $\nu_3 > 2(h_2 - h_1)$; il est dès lors possible de déterminer un entier h_3 de façon que $h_3 - h_1$ et $h_3 - h_2$ soient dans L_3'. En général nous choisissons $L_{m+1}' = L_{\nu_{m+1}, \nu_{m+1}}$ tel que $\nu_{m+1} > \underset{1<\lambda\leqq m}{\mathrm{Max.}}\, 2(h_\lambda - h_1)$, $\nu_{m+1} > \nu_m$ et h_{m+1} de façon que les différences $h_{m+1} - h_\lambda$ $(1 \leqq \lambda \leqq m)$ se trouvent dans L_{m+1}' [8]).

Considérons alors la suite des fonctions

$$f(n+h_1), f(n+h_2), \ldots, f(n+h_m), \ldots, \tag{11}$$

où les h sont les entiers positifs déterminés précédemment. La fonction $f(n)$ étant asymptotiquement normale, on peut extraire de (11) une suite uniformément convergente:

$$f(n+h_{\lambda_1}), f(n+h_{\lambda_2}), \ldots, f(n+h_{\lambda_m}), \ldots.$$

Dès lors, on peut trouver un entier R tel que

$$(f(n+h_{\lambda_{r+s}}), f(n+h_{\lambda_r})) < \varepsilon_0, \quad \text{quand } r \geqq R;\ s = 1, 2, 3, \ldots,$$

quel que soit $n = 1, 2, 3, \ldots$ Donc: pour $r \geqq R$, $s = 1, 2, 3, \ldots$ et $n > h_{\lambda_r}$, on a

$$(f(n+h_{\lambda_{r+s}} - h_{\lambda_r}),\ \ f(n)) < \varepsilon_0.$$

Autrement dit, pour $r \geqq R$ et $s = 1, 2, 3, \ldots$, la différence $h_{\lambda_{r+s}} - h_{\lambda_r}$ est une presque-période asymptotique de $f(n)$ relative à ε_0 et à tout $N > h_{\lambda_r}$.

---

[8]) Il suffit, par exemple, de déterminer h_{m+1} en prenant pour $h_{m+1} - h_1$ l'un des entiers immédiatement voisins du milieu de L_{m+1}'.

La différence $h_{\lambda_{r+s}} - h_{\lambda_r}$ se trouve dans l'intervalle $L'_{\lambda_{r+s}}$. Laissons $r \geqq R$ fixe, nous pouvons prendre s assez grand tel que l'indice N de l'intervalle $L_{N,N} = L'_{\lambda_{r+s}}$ soit plus grand que h_{λ_r}. Pour ce choix de r, s, l'intervalle $L_{N,N} = L'_{\lambda_{r+s}}$ contient une presque-période asymptotique, à savoir $h_{\lambda_{r+s}} - h_{\lambda_r}$, de $f(n)$ relative à ε_0 et N. Nous arrivons ainsi à une contradiction. La fonction $f(n)$ est donc asymptotiquement presque-périodique. C. q. f. d.

Lemme 1. *Soient $f(n)$ une fonction asymptotiquement presque-périodique et*

$$(12) \qquad h_1, h_2, \ldots, h_m, \ldots$$

une suite d'entiers positifs tendant vers $+\infty$. Pour tout $\varepsilon > 0$ donné, on peut trouver un entier $l^* > 0$ et extraire de (12) *une suite*

$$h_{\nu_1}, h_{\nu_2}, \ldots, h_{\nu_m}, \ldots$$

de façon que

$$\left(f(n + h_{\nu_m}),\ f(n + l^*)\right) < \varepsilon, \qquad m = 1, 2, \ldots;\ n = 1, 2, \ldots$$

Démonstration. La fonction $f(n)$ étant asymptotiquement presque-périodique, soient l, N deux entiers positifs correspondant à ε suivant la propriété P. Comme h_m tend vers $+\infty$, on peut supposer

$$h_m > N + l, \quad \text{pour } m \geqq M.$$

Il existe alors une presque-période asymptotique τ_m $(m = M, M+1, \ldots)$ telle que

$$h_m - N - l \leqq \tau_m \leqq h_m - N, \qquad m \geqq M$$

et

$$\left(f(n),\ f(n + \tau_m)\right) < \varepsilon, \qquad m \geqq M;\ n \geqq N.$$

En posant

$$l_m = h_m - \tau_m, \qquad m \geqq M,$$

nous avons

$$\left(f(n + h_m),\ f(n + l_m)\right) < \varepsilon, \quad m \geqq M;\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Or, les entiers l_m sont tous $\geqq N$ et $\leqq N + l$, une infinité d'entre eux sont nécessairement égaux. Soit

$$l_{\nu_1} = l_{\nu_2} = \cdots = l_{\nu_m} = \cdots = l^*.$$

On a alors

$$\left(f(n + h_{\nu_m}),\ f(n + l^*)\right) < \varepsilon, \quad m = 1, 2, 3, \ldots;\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

C. q. f. d.

Théorème 2. *Si l'espace distancié $\mathfrak{E}$ auquel appartiennent les valeurs x d'une fonction asymptotiquement presque-périodique $x = f(n)$, est complet, $f(n)$ est une fonction asymptotiquement normale.*

Démonstration. Considérons une suite infinie

$$f(n+h_1),\, f(n+h_2),\, \ldots,\, f(n+h_m),\, \ldots, \tag{13}$$

où les h sont des entiers positifs tendant vers $+\infty$. Soit $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \cdots > \varepsilon_k > \cdots$ une suite de nombres positifs tendant vers zéro. D'après le lemme précédent, on peut trouver un entier $l^{(1)}$ et extraire de (13) une suite

$$S_1: \qquad f(n+h_{\nu_1}^{(1)}),\ f(n+h_{\nu_2}^{(1)}),\ \ldots,\ f(n+h_{\nu_m}^{(1)}),\ \ldots$$

de façon que

$$\left(f(n+h_{\nu_m}^{(1)}),\quad f(n+l^{(1)})\right) < \varepsilon_1, \qquad m, n = 1, 2, 3, \ldots$$

Puis, on peut trouver un entier $l^{(2)}$ et extraire de la suite S_1 une suite

$$S_2: \qquad f(n+h_{\nu_1}^{(2)}),\ f(n+h_{\nu_2}^{(2)}),\ \ldots,\ f(n+h_{\nu_m}^{(2)}),\ \ldots$$

de façon que

$$\left(f(n+h_{\nu_m}^{(2)}),\quad f(n+l^{(2)})\right) < \varepsilon_2, \qquad m, n = 1, 2, 3, \ldots$$

et ainsi de suite: on peut trouver un entier $l^{(k)}$ et extraire de la suite S_{k-1} une suite

$$S_k: \qquad f(n+h_{\nu_1}^{(k)}),\ f(n+h_{\nu_2}^{(k)}),\ \ldots,\ f(n+h_{\nu_m}^{(k)}),\ \ldots$$

de façon que

$$\left(f(n+h_{\nu_m}^{(k)}),\quad f(n+l^{(k)})\right) < \varepsilon_k, \qquad m, n = 1, 2, 3, \ldots \tag{14}$$

Considérons maintenant la suite des fonctions

$$f(n+h_{\nu_1}^{(1)}),\ f(n+h_{\nu_2}^{(2)}),\ \ldots,\ f(n+h_{\nu_k}^{(k)}),\ \ldots \tag{15}$$

Elle converge uniformément sur l'ensemble des entiers positifs n vers une fonction limite. En effet, soit $\varepsilon > 0$ donné et supposons que l'on ait choisi k assez grand tel que $\varepsilon_k < \frac{\varepsilon}{2}$; on a alors, en vertu de (14),

$$\left(f(n+h_{\nu_{k_1}}^{(k_1)}),\quad f(n+h_{\nu_{k_2}}^{(k_2)})\right) < \varepsilon, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

dès que $k_1, k_2 \geqq k$. L'espace $\mathcal{E}$ étant complet, la suite (15) converge donc uniformément sur l'ensemble des entiers positifs. Ainsi, $f(n)$ est une fonction asymptotiquement normale. C. q. f. d.

8. *Cas où les valeurs de la fonction appartiennent à un espace de* Banach. D'après la définition donnée dans la première section, toute fonction presque-périodique d'une variable entière est définie pour tous les nombres entiers, positifs, négatifs et nul. Soit maintenant $x = p(n)$ une fonction *définie seulement pour les entiers positifs* n. Nous conviendrons de dire que $p(n)$ est presque-périodique, si elle possède la propriété suivante: A tout $\varepsilon > 0$ donné correspond un entier positif l tel que parmi $l+1$ entiers *positifs* consécutifs quelconques se trouve au moins un entier τ pour lequel

$$\left(p(n),\quad p(n+\tau)\right) < \varepsilon, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

On peut démontrer que *toute fonction presque-périodique sur l'ensemble des entiers positifs peut être prolongée d'une façon unique par une fonction presque-périodique sur l'ensemble de tous les nombres entiers.*

Cela étant admis, nous pouvons démontrer le théorème suivant:

Théorème 3. *Toute fonction asymptotiquement presque-périodique $f(n)$, qui prend ses valeurs dans un espace de* BANACH, *est une somme de deux fonctions*

$$f(n) = p(n) + \omega(n), \tag{16}$$

où $p(n)$ est presque-périodique et où $\omega(n)$ tend vers le point 0 quand n tend vers $+\infty$. D'ailleurs, la décomposition (16) de $f(n)$ est unique.

Inversement, toute fonction $f(n)$ de la forme (16) est asymptotiquement presque-périodique.

Démonstration. Etant donnée une fonction asymptotiquement presque-périodique $f(n)$ qui prend ses valeurs dans un espace de BANACH, soit $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \cdots > \varepsilon_k > \cdots$ une suite de nombres positifs tendant vers zéro. A tout ε_k correspondent deux entiers positifs l_k, N_k tels que l'intervalle $(k, k + l_k)$ contienne un entier τ_k pour lequel

$$\|f(n + \tau_k) - f(n)\| < \varepsilon_k, \qquad \text{quand } n \geqq N_k.$$

La fonction $f(n)$ étant asymptotiquement presque-périodique, elle est asymptotiquement normale, puisque tout espace de BANACH est complet. On peut donc extraire de la suite des fonctions $f(n + \tau_k)$ une suite $f(n + \tau_{\nu_k})$ convergeant uniformément vers une fonction $p(n)$.

Posons $\omega(n) = f(n) - p(n)$. Je dis que $\omega(n)$ tend vers le point 0 quand n augmente indéfiniment. Soit en effet $\varepsilon > 0$ donné, on peut prendre k assez grand de façon que

$$\varepsilon_{\nu_k} < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } \underset{0<n<+\infty}{\text{borne sup.}} \| f(n + \tau_{\nu_k}) - p(n) \| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot$$

On aura alors

$$\|\omega(n)\| \leqq \| f(n) - f(n + \tau_{\nu_k})\| + \|f(n + \tau_{\nu_k}) - p(n)\| < \varepsilon \text{ pour } n \geqq N_{\nu_k}.$$

Montrons ensuite que $p(n)$ est presque-périodique. D'après la propriété P, à tout $\varepsilon > 0$ correspondent deux entiers positifs l, N tels que sur tout intervalle de longueur l et à extrémités entières positives se trouve un entier τ pour lequel

$$\|f(n + \tau) - f(n)\| < \varepsilon \qquad \text{quand } n \geqq N.$$

On a donc

$$\|f(n + \tau_{\nu_k} + \tau) - f(n + \tau_{\nu_k})\| < \varepsilon \text{ quand } n + \tau_{\nu_k} \geqq N. \tag{17}$$

Laissons n fixe; pour k assez grand, $n + \tau_{\nu_k}$ sera $\geqq N$ et quand k tend vers $+\infty$, l'inégalité (17) deviendra

$$||p(n + \tau) - p(n)|| \leqq \varepsilon \quad \text{quel que soit l'entier positif } n.$$

Ainsi, $p(n)$ est presque-périodique.

Nous avons ainsi démontré que toute fonction asymptotiquement presque-périodique (dont les valeurs se trouvent dans un espace de Banach) est représentable sous la forme (16).

De plus, la décomposition (16) de $f(n)$ est unique. S'il en existait une autre $f(n) = p_1(n) + \omega_1(n)$ satisfaisant aux mêmes conditions, la différence $p(n) - p_1(n)$ serait une fonction presque-périodique qui tendrait vers 0 quand n augmente indéfiniment. Cette différence est donc identiquement 0.

Reste à montrer que toute fonction $f(n)$ de la forme (16) est asymptotiquement presque-périodique. On a

$$||f(n + \tau) - f(n)|| \leqq ||p(n + \tau) - p(n)|| + ||\omega(n + \tau)|| + ||\omega(n)||.$$

Or, à tout $\varepsilon > 0$ donné correspond un entier positif l tel que parmi $l + 1$ entiers positifs consécutifs quelconques, il y ait au moins un entier τ vérifiant l'inégalité

$$||p(n + \tau) - p(n)|| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

D'autre part, il existe un entier positif N tel que

$$||\omega(n)|| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \text{pour } n \geqq N.$$

Dès lors,

$$||f(n + \tau) - f(n)|| < \varepsilon, \qquad \text{pour } n \geqq N.$$

$f(n)$ est donc asymptotiquement presque-périodique. C. q. f. d.

L'unicité de la décomposition (16) d'une fonction asymptotiquement presque-périodique $f(n)$ permet d'appeler $p(n)$ son *terme principal* et $\omega(n)$ son *terme correctif*.

D'après les théorèmes 1—3, nous avons, dans le cas où l'espace considéré est un espace de Banach, trois définitions équivalentes des fonctions asymptotiquement presque-périodiques: on peut les définir soit comme les fonctions possédant la propriété P (ou P bis), soit comme les fonctions asymptotiquement normales, soit comme les fonctions de la forme (16). Cependant les deux premières définitions présentent sur la dernière l'avantage de garder un sens dans le cas général où l'espace considéré est seulement supposé distancié (au lieu d'être un espace de Banach). D'ailleurs ces deux premières définitions sont équivalentes dans le cas où l'espace en question est distancié complet.

D'après le théorème 3 et le théorème de la moyenne pour les fonctions presque-périodiques, on déduit immédiatement le théorème de la moyenne pour les fonctions asymptotiquement presque-périodiques:

Théorème 4. *Si* $f(n) = p(n) + \omega(n)$ *est une fonction asymptotiquement presque-périodique qui prend ses valeurs dans un espace de* BANACH, *la moyenne arithmétique*

$$\frac{f(1) + f(2) + \ldots + f(n)}{n}$$

converge vers une limite déterminée $\mathfrak{M}(f)$ *qui est égale à la moyenne* $\mathfrak{M}(p)$ *du terme principal* $p(n)$ *de* $f(n)$.

Cette limite $\mathfrak{M}(f)$ sera appelée la *moyenne* de la fonction asymptotiquement presque-périodique $f(n)$. La formule (6) établie pour les fonctions presque-périodiques restera évidemment valable pour les fonctions asymptotiquement presque-périodiques, pourvu que n_0 soit un entier positif.

Restons toujours dans le cas où l'espace auquel appartiennent les valeurs de la fonction, est un espace de BANACH. On voit aisément qu'avec $f(n) = p(n) + \omega(n)$, les fonctions $f(n + n_0)$, $r \cdot f(n)$ et $f(n) + x_0$, où n_0 désigne un entier positif fixe, r un nombre réel fixe, x_0 un point fixe dans l'espace considéré, sont aussi asymptotiquement presque-périodiques, dont les termes principaux sont respectivement $p(n + n_0)$, $r \cdot p(n)$ et $p(n) + x_0$. Il en est de même de la fonction de valeurs numériques $||f(n)||$, qui a $||p(n)||$ pour son terme p incipal. La somme $f_1(n) + f_2(n)$ de deux fonctions asymptotiquement presque-périodiques $f_i(n) = p_i(n) + \omega_i(n)$ $(i = 1, 2)$ est encore asymptotiquement presque-périodique, avec $p_1(n) + p_2(n)$ comme son terme principal.

On peut démontrer sans peine les propositions suivantes qui sont des précisions de deux propositions données au n° 6, où l'espace considéré était seulement supposé distancié:

Soit $\mathcal{E}$ *un espace de* BANACH. *Si une suite de fonctions* $f_1(n)$, $f_2(n)$, …, $f_m(n)$, … , *asymptotiquement presque-périodiques et prenant leurs valeurs dans* $\mathcal{E}$, *converge uniformément sur l'ensemble des entiers positifs* n, *la limite est une fonction asymptotiquement presque-périodique et son terme principal ainsi que son terme correctif sont respectivement les limites uniformes sur l'ensemble des entiers positifs des termes principaux* $p_m(n)$ *et des termes correctifs* $\omega_m(n)$ *de* $f_m(n)$.

Soient $\mathcal{E}_1$ *et* $\mathcal{E}_2$ *deux espaces de* BANACH. *Soit* $x = f(n) = p(n) + \omega(n)$ *une fonction asymptotiquement presque-périodique qui prend ses valeurs* x *dans* $\mathcal{E}_1$. *Si* $y = g(x)$ *est une fonction définie et continue sur l'ensemble* $\overline{X}(f, 0 < n < +\infty)$ *et prenant ses valeurs* y *dans* $\mathcal{E}_2$, *alors* $y = g(f(n))$ *est une fonction asymptotiquement presque-périodique, dont le terme principal est* $g(p(n))$[9].

[9]) On peut démontrer la formule

$$X(p, 0 < n < +\infty) \subset \overline{X}(f, 0 < n < +\infty),$$

a fonction $g(p(n))$ est donc bien définie.

III. Application à l'étude de l'itération des transformations continues.

9. *Itération des homéomorphies.* Enonçons d'abord le théorème suivant:

Théorème 5. *Soient E un ensemble compact et fermé de points d'un espace distancié $\mathcal{E}$ et H une homéomorphie de E en lui-même. En désignant pour tout point x de E, par $H^n x$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) l'image de x par la n^{ieme} itérée de H*[10]*, supposons que les $H^n x$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) considérées comme fonctions de x, soient également continues sur E*[11]*. Alors, pour tout point x_0 de E, $H^n x_0$ est une fonction presque-périodique de n.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $H^n x_0$ est une fonction normale de n. Soit $h_1, h_2, \ldots, h_m, \ldots$ une suite d'entiers arbitraires. Les points $H^{h_m} x_0$ ($m = 1, 2, 3, \ldots$) restent dans l'ensemble compact et fermé E. On peut donc en extraire une suite de points $H^{k_m} x_0$ convergeant vers un point x^* de E. On a

$$(H^{n+k_m} x_0, H^n x^*) = (H^n(H^{k_m} x_0), H^n x^*). \tag{18}$$

D'après l'hypothèse de la continuité égale, à tout $\varepsilon > 0$ correspond un nombre $\eta > 0$ tel que

$$(H^n x, H^n y) < \varepsilon, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

quand x, y sont deux points de E tels que $(x, y) < \eta$. Or, pour m assez grand, $m \geqq M$, on aura $(H^{k_m} x_0, x^*) < \eta$. Donc, le premier membre de (18) sera, comme le second, $< \varepsilon$ pour $m \geqq M$. Ce nombre M, comme η, a été choisi indépendamment de n. Ainsi la suite des fonctions de n, $H^{n+k_m} x_0$ ($m = 1, 2, 3, \ldots$) converge vers la fonction $H^n x^*$, et cela uniformément sur l'ensemble des entiers $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Dès lors, $H^n x_0$ est une fonction normale de n et par conséquent, est une fonction presque-périodique. C. q. f. d.

Corollaire 1. *Sous les hypothèses du théorème 5, si x_0 est un point de E tel que*

$$H^n x_0 \neq x_0$$

pour tout nombre entier $n > 0$[12]*, l'ensemble des points $H^n x_0$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) est homéomorphe à l'ensemble des nombres rationnels.*

Démonstration. Si x_0 est un point de E tel que $H^n x_0 \neq x_0$ pour tout entier positif n, $H^n x_0$ est une fonction presque-périodique telle que ses valeurs correspondant à deux nombres entiers distincts soient toujours distinctes.

---

[10]) On désigne comme d'habitude par H^0 la transformation identique et par H^{-1} l'inverse de H.

[11]) C'est-à-dire qu'à tout $\varepsilon > 0$ donné correspond un nombre $\eta > 0$ tel que, pour tout $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $(H^n x, H^n y) < \varepsilon$ dès que les points x, y dans E vérifient l'inégalité $(x, y) < \eta$.

[12]) Autrement dit, $H^n x_0$ n'est pas une fonction périodique de n.

Dès lors, d'après la définition des fonctions presque-périodiques, on voit immédiatement que l'ensemble des points $H^n x_0$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ est dense en soi. On sait que tout ensemble dénombrable, dense en soi et appartenant à un espace distancié est homéomorphe à l'ensemble des nombres rationnels[13]), l'ensemble des points $H^n x_0$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ est donc homéomorphe à l'ensemble des nombres rationnels. C. q. f. d.

10. *Itération des transformations continues.* Si au lieu d'une homéomorphie, on considère une transformation continue, on obtiendra sous des hypothèses moins strictes un résultat moins précis:

Théorème 6. *Soient E un ensemble compact et fermé de points d'un espace distancié $\mathcal{E}$ et T une transformation ponctuelle continue de E en une partie de E*[14]). *En désignant pour tout point x de E, par $T^n x$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ l'image de x par la $n^{\text{ième}}$ itérée de T, supposons que les $T^n x$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ considérées comme fonctions de x, soient également continues sur E. Alors, pour tout point x_0 de E, $T^n x_0$ est une fonction asymptotiquement presque-périodique de n.*

La démonstration est exactement la même que pour le théorème 5, sauf qu'au lieu de prendre h_m arbitraires, on suppose que h_m est une suite d'entiers positifs. On verra alors que $T^n x_0$ est une fonction asymptotiquement normale de n et par conséquent, est une fonction asymptotiquement presque-périodique.

Il est interéssant de citer un cas particulier où toutes les hypothèses du théorème 6 sont réalisées. On appelle *contraction*[15]) toute transformation ponctuelle T qui transforme un ensemble E d'un espace distancié dans lui-même ou dans un autre et qui vérifie la condition

$$(Tx, Ty) \leqq (x, y),$$

pour tout couple de points x, y de E. Il est facile de constater que *toute contraction qui transforme un ensemble compact et fermé E d'un espace distancié en une partie de E, vérifie toutes les hypothèses du théorème 6.*

Théorème 7. *Sous les hypothèses du théorème 6, soit d'autre part une fonction $f(x)$ définie et continue sur E et prenant ses valeurs dans un espace de* Banach $\mathcal{E}_1$. *Alors, pour tout point x arbitrairement choisi dans E, $f(T^n x)$ est une fonction asymptotiquement presque-périodique de n. En particulier, la limite*

$$\mu(f, x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{f(Tx) + f(T^2 x) + \cdots + f(T^n x)}{n} \tag{19}$$

existe, quel que soit le point x dans E.

---

[13]) Cf. M. Fréchet, g) Les espaces abstraits, Paris, 1928, p. 103.

[14]) Bien entendu, cette partie peut se confondre avec l'ensemble E tout entier.

[15]) Cf. H. Freudenthal et W. Hurewicz, Dehnungen, Verkürzungen, Isometrien. Fund. Math. 26 (1936), p. 120—122.

Pour f fixe, $\mu(f, x)$ est uniformément continue sur E. Et l'on a

$$\mu(f, x) = \mu(f, Tx). \tag{20}$$

Démonstration. En utilisant une proposition donnée à la fin du n° 6 et le théorème 6, on voit immédiatement que pour tout point x de E, $f(T^n x)$ est une fonction asymptotiquement presque-périodique de n. Dès lors, d'après le théorème 4, la limite $\mu(f, x)$ existe. L'égalité (20) résulte immédiatement de la formule (6).

Reste à montrer que $\mu(f, x)$ est uniformément continue sur E. La fonction f étant continue sur l'ensemble compact et fermé E, elle y est uniformément continue. A tout $\varepsilon > 0$ correspond un nombre $\delta > 0$ tel qu'on ait $\|f(z) - f(w)\| < \varepsilon$ pourvu que z, w soient deux points de E vérifiant $(z, w) < \delta$. Or, pour ce nombre δ, on peut trouver un nombre $\eta > 0$ tel que pour tout couple de points x, y de E vérifiant $(x, y) < \eta$, on ait $(T^n x, T^n y) < \delta$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$). On a donc, pour tout couple de points x, y de E satisfaisant à l'inégalité $(x, y) < \eta$:

$$\|\mu(f, x) - \mu(f, y)\| = \left\| \lim_{n \to +\infty} \frac{f(Tx) + \cdots + f(T^n x)}{n} - \lim_{n \to +\infty} \frac{f(Ty) + \cdots + f(T^n y)}{n} \right\|$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left\| \frac{[f(Tx) - f(Ty)] + \cdots + [f(T^n x) - f(T^n y)]}{n} \right\|$$

$$\leqq \operatorname*{borne\ sup.}_{0 < n < +\infty} \frac{1}{n} \{ \|f(Tx) - f(Ty)\| + \cdots + \|f(T^n x) - f(T^n y)\| \} \leqq \varepsilon.$$

Ainsi, $\mu(f, x)$ est uniformément continue sur E. C. q. f. d.

Dans le théorème 7, si l'on suppose $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}$ et $f(x) = x$, on obtient le corollaire suivant:

Corollaire 2. *Si, dans les hypothèses du théorème 6, l'espace $\mathcal{E}$ est un espace de* Banach, *la limite*

$$\mu(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{Tx + T^2 x + \cdots + T^n x}{n} \tag{21}$$

existe, quel que soit x de E. $\mu(x)$ est uniformément continue sur E et l'on a

$$\mu(x) = \mu(Tx). \tag{22}$$

Disons qu'un point y de E est un *point de retour* d'un point x_0 de E, si la suite des points $T^n x_0$ contient une sous-suite convergeant vers y. Comme les points $T^n x_0$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) restent tous dans l'ensemble compact et fermé E, x_0 admet au moins un point de retour. On démontre sans peine le résultat suivant:

Corollaire 3. *Sous les hypothèses du théorème 6, les trois conditions suivantes sont équivalentes:*

1) *La suite des points* $T^n x_0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *est convergente.*
2) *Il n'y a qu'un point de retour de* x_0.
3) *Tout point de retour de* x_0 *est un point fixe dans la transformation* T.

Si, dans les hypothèses du théorème 6, l'espace $\mathcal{E}$ *est un espace de* BANACH, *chacune de ces conditions est une condition nécessaire et suffisante pour que le terme principal de la fonction asymptotiquement presque-périodique* $T^n x_0$ *soit une fonction constante.*

Corollaire 4. *Sous les hypothèses du théorème 6, l'ensemble* E_C *des points* x *de* E *tels que la suite* $T^n x$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *soit convergente est un ensemble fermé. Et la transformation* T *ne fait sortir ni de* E_C, *ni de* $E - E_C$.

Démonstration. Il est évident que la transformation T ne peut faire sortir ni de E_C ni de $E - E_C$. Reste à montrer que E_C est un ensemble fermé.

Considérons une suite de points $x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots$ de E_C telle que $\lim\limits_{m \to +\infty} x_m = x_0$. On a $\lim\limits_{n \to +\infty} T^n x_m = x_m^*$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$. Il s'agit de prouver que la suite $T^n x_0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ est convergente. Les points x_m^* restant tous dans l'ensemble compact et fermé E, on peut supposer que $\lim\limits_{m \to +\infty} x_m^* = x^*$ (en remplaçant au besoin la suite $x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots$ par une sous-suite). On a

$$(T^n x_0, x^*) \leqq (T^n x_0, T^n x_m) + (T^n x_m, x_m^*) + (x_m^*, x^*).$$

D'après $\lim\limits_{m \to +\infty} x_m = x_0$, $\lim\limits_{m \to +\infty} x_m^* = x^*$ et l'hypothèse de la continuité égale, pour tout $\varepsilon > 0$ donné on peut trouver un entier M assez grand indépendant de n tel que

$$(T^n x_0, T^n x_m) < \varepsilon, \quad (x_m^*, x^*) < \varepsilon, \qquad \text{pour } m \geqq M.$$

On a alors

$$(T^n x_0, x^*) < 2\,\varepsilon + (T^n x_M, x_M^*).$$

Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} T^n x_M = x_M^*$, on peut donc déterminer un entier N assez grand tel que

$$(T^n x_M, x_M^*) < \varepsilon, \qquad \text{pour } n \geqq N.$$

Ainsi, nous avons

$$(T^n x_0, x^*) < 3\,\varepsilon, \qquad \text{pour } n \geqq N.$$

La suite des points $T^n x_0$ converge donc vers le point x^*. C'est-à-dire que x_0 appartient à E_C. L'ensemble E_C est donc fermé. C. q. f. d.

11. *Condition de transitivité.* Une fonction $g(x)$ définie et continue sur E et prenant ses valeurs dans un espace distancié sera dite *invariante par rapport à la transformation* T, si elle vérifie l'équation

$$g(x) = g(Tx),$$

quel que soit x de E. D'après le théorème 7, $\mu(f, x)$ est une fonction invariante par rapport à T. On démontre facilement le fait suivant: Pour que $\mu(f, x)$ soit indépendant de x, quelle que soit la fonction $f(x)$ continue sur E et prenant ses valeurs dans un espace de BANACH $\mathcal{E}_1$, il faut et il suffit que toute fonction invariante par rapport à T et prenant ses valeurs dans $\mathcal{E}_1$ soit une fonction constante.

Pour tout point x de E, nous appellerons *successeurs de* x les points $T^n x$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$). L'ensemble des successeurs de x sera désigné par S_x. Nous avons alors le théorème suivant:

Théorème 8. *Sous les hypothèses du théorème 6, pour que $\mu(f, x)$ soit indépendant de x, quelle que soit la fonction f continue sur E et prenant ses valeurs dans un espace de* BANACH *$\mathcal{E}_1$, il faut et il suffit que la condition suivante soit vérifiée:*

Condition de transitivité. *Pour tout couple de points x, y de E, la fermeture de l'ensemble des successeurs de x et celle de l'ensemble des successeurs de y ne sont pas disjointes:*

$$\bar{S}_x \cdot \bar{S}_y \neq 0. \tag{23}$$

Démonstration. Pour montrer que la condition est suffisante, il suffit de prouver que, lorsque la condition de transitivité est réalisée, toute fonction invariante par rapport à T et prenant ses valeurs dans $\mathcal{E}_1$ est une fonction constante. Soit $g(x)$ une fonction invariante par rapport à T et prenant ses valeurs dans $\mathcal{E}_1$. Considérons deux points x, y arbitrairement choisis dans E. D'après la condition de transitivité, il existe un point z tel que $z \in \bar{S}_x \cdot \bar{S}_y$. Le point z appartient à E, puisque E est fermé. D'autre part, la fonction $g(x)$ étant continue sur l'ensemble compact et fermé E, elle y est uniformément continue. Donc, à tout $\varepsilon > 0$ donné correspond un nombre $\delta > 0$ tel que $\|g(x_1) - g(x_2)\| < \varepsilon$ pour tout couple de points x_1, x_2 de E vérifiant l'inégalité $(x_1, x_2) < \delta$. Or, pour ce nombre δ, on peut trouver deux entiers positifs n_1, n_2 tels que

$$(z, T^{n_1} x) < \delta, \quad (z, T^{n_2} y) < \delta;$$

d'où:

$$\|g(z) - g(T^{n_1} x)\| < \varepsilon, \quad \|g(z) - g(T^{n_2} y)\| < \varepsilon.$$

Comme $g(T^{n_1} x) = g(x)$ et $g(T^{n_2} y) = g(y)$, on a donc

$$\|g(z) - g(x)\| < \varepsilon, \quad \|g(z) - g(y)\| < \varepsilon.$$

Le nombre ε peut être pris aussi petit que l'on veut, il en résulte donc $g(x) = g(y) = g(z)$. C'est-à-dire que $g(x)$ est une fonction constante. Et par conséquent, $\mu(f, x)$ est indépendant de x, quelle que soit la fonction continue f.

La condition est nécessaire. En effet, s'il existe deux points x_0, y_0 de E tels que $\bar{S}_{x_0} \cdot \bar{S}_{y_0} = 0$, on peut définir une fonction $g(x)$ continue sur E, prenant ses valeurs dans $\mathcal{E}_1$ et telle que

$$\begin{aligned} g(x) &= a \quad \text{pour} \quad x \in \bar{S}_{x_0}; \\ &= b \quad \text{pour} \quad x \in \bar{S}_{y_0}; \end{aligned}$$

a, b étant deux points distincts de $\mathcal{E}_1$. Pour cette fonction $g(x)$, on aura

$$\mu(g, x_0) = a \neq b = \mu(g, y_0).$$

C. q. f. d.

Un sous-ensemble F de E sera dit *clos par rapport à T*, si la transformation T transforme tout point de F en un point de F:

$$TF \subset F.$$

Il est facile de constater que *la condition de transitivité équivaut à la condition suivante: Deux sous-ensembles non vides de E qui sont fermés et clos par rapport à T, ne sont jamais disjoints.*

D'après le corollaire 2 et le théorème 8, nous avons immédiatement le corollaire suivant:

Corollaire 5. *Si, dans les hypothèses du théorème 6, l'espace $\mathcal{E}$ est un espace de* Banach *et si la transformation T vérifie la condition de transitivité, la limite $\mu(x)$, qui existe partout sur E, de*

$$\frac{Tx + T^2x + \cdots + T^n x}{n},$$

quand n tend vers $+\infty$, est indépendante de x.

Nous avons ici une condition suffisante pour que $\mu(x)$ soit indépendant de x. Mais, comme on le verra sur l'exemple 3 donné plus loin, cette condition n'est nullement nécessaire.

Envisageons maintenant quelques exemples simples:

Exemple 1. Soit E le segment fermé $0 \leqq x \leqq a$ $(a > 0)$ sur la droite des nombres réels. La transformation T définie par

$$Tx = a + (x - a) \cdot b^{-1},$$

b étant un nombre > 1, transforme tout point de E en un point de E. On a

$$|Tx - Ty| = b^{-1} \cdot |x - y| < |x - y|.$$

T est donc une contraction. Les hypothèses du théorème 6 sont alors vérifiées. On a

$$T^n x = a + (x - a) \cdot b^{-n}.$$

Dès lors, a appartient à la fermeture $\bar{S}_x$ de l'ensemble S_x des successeurs de x. La condition de transitivité est donc réalisée. On a

$$\mu(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \left[na + (x - a)(b^{-1} + b^{-2} + \cdots + b^{-n}) \right] = a.$$

Exemple 2. Considérons dans l'espace de Hilbert, l'ensemble compact et fermé E formé par les points $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots)$ tels que $0 \leqq x_k \leqq \frac{1}{k}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. La transformation

$$T x = \left(\frac{1}{1 + x_1}, \quad \frac{1}{2 + x_2}, \ldots, \quad \frac{1}{k + x_k}, \ldots \right),$$

transforme tout point x de E en un point Tx de E. On vérifie facilement que T est une contraction: $(Tx, Ty) \leqq (x, y)$. Les hypothèses du théorème 6 sont donc réalisées. Il est aisé de voir que T vérifie aussi la condition de transitivité. $\mu(x)$ est donc indépendant de x. On trouve effectivement

$$\mu(x) = \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \frac{-2 + \sqrt{8}}{2}, \ldots, \quad \frac{-k + \sqrt{k^2 + 4}}{2}, \ldots \right).$$

Exemple 3. Appelons E le segment fermé $0 \leqq x \leqq 1$ sur la droite des nombres réels et T la transformation

$$T x = 1 - x.$$

Les hypothèses du théorème 6 sont évidemment remplies. Mais T ne vérifie pas la condition de transitivité. On peut trouver une fonction $f(x)$ continue sur E telle que $\mu(f, x)$ soit dépendant de x. On a, par exemple, pour $f(x) = x^2$, $\mu(f, x) = x^2 - x + \frac{1}{2}$. Cependant, $\mu(x)$ est indépendant de x: $\mu(x) = \frac{1}{2}$.

12. *Application à la théorie des probabilités discontinues en chaîne.* Soient $P_{hk}^{(1)}$ $(1 \leqq h, k \leqq m)$ m^2 nombres réels tels que

$$\sum_{k=1}^{m} |P_{hk}^{(1)}| \leqq 1, \qquad 1 \leqq h \leqq m. \tag{24}$$

Appelons E l'ensemble des points $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ de l'espace euclidien à m dimensions tels que $|x_i| \leqq A$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, A étant une constante positive. Soit T la transformation linéaire définie par

$$x_h^{(1)} = \sum_{k=1}^{m} P_{hk}^{(1)} \cdot x_k, \qquad 1 \leqq h \leqq m.$$

T transforme chaque point $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ de E en un point $Tx = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_m^{(1)})$ de E. En effet, on a, en vertu de (24),

$$|x_h^{(1)}| = |\sum_{k=1}^{m} P_{hk}^{(1)} \cdot x_k| \leqq \sum_{k=1}^{m} |P_{hk}^{(1)}| \cdot |x_k| \leqq A \cdot \sum_{k=1}^{m} |P_{hk}^{(1)}| \leqq A.$$

D'autre part, dans l'espace euclidien à m dimensions, on peut prendre pour la distance de deux points $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ et $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ la quantité $\varrho(x, y) = \operatorname{Max.}_{1 \leqq i \leqq m} |x_i - y_i|$; cela n'apporte aucun changement à la structure topologique de l'espace. Nous avons

$$|x_h^{(1)} - y_h^{(1)}| = |\sum_{k=1}^{m} P_{hk}^{(1)} \cdot (x_k - y_k)| \leqq \sum_{k=1}^{m} |P_{hk}^{(1)}| \cdot |x_k - y_k|$$
$$\leqq (\operatorname{Max.}_{1 \leqq k \leqq m} |x_k - y_k|) \cdot \sum_{k=1}^{m} |P_{hk}^{(1)}| \leqq \operatorname{Max.}_{1 \leqq k \leqq m} |x_k - y_k|,$$

d'où

$$\varrho(Tx, Ty) \leqq \varrho(x, y).$$

Cela veut dire que la transformation T est une contraction quand on prend ϱ pour la distance dans l'espace euclidien à m dimensions. Dès lors, $T^n x$ considérées comme fonctions de x sont également continues sur E.

D'après le théorème 6, pour chaque point x de E, $T^n x$ est une fonction asymptotiquement presque-périodique de n. D'autre part, en posant

$$(25) \qquad P_{hk}^{(n)} = \sum_{j=1}^{m} P_{hj}^{(n-1)} \cdot P_{jk}^{(1)}, \qquad 1 \leqq h, k \leqq m;\ n = 2, 3, \ldots,$$

les coordonnées $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}$ du point $T^n x$ sont données par

$$x_h^{(n)} = \sum_{k=1}^{m} P_{hk}^{(n)} \cdot x_k.$$

La $h^{\text{ième}}$ coordonnée x_h d'un point $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ dépend continûment du point x. Il en résulte donc que, pour tout point $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ de E et pour toute valeur fixe de h,

$$\sum_{k=1}^{m} P_{hk}^{(n)} \cdot x_k$$

est une fonction asymptotiquement presque-périodique de n. En particulier, on voit que pour tout couple de h, k, $P_{hk}^{(n)}$ est une fonction asymptotiquement presque-périodique de n. Nous avons ainsi redémontré d'une façon très simple un résultat connu dû à M. Fréchet[16]: *Si les quantités $P_{hk}^{(n)}$ ($1 \leqq h, k \leqq m$; $n = 1, 2, 3, \ldots$) vérifient les relations* (24) *et* (25), *alors pour tout couple fixe de h, k, $P_{hk}^{(n)}$ est une fonction asymptotiquement presque-périodique de n et par conséquent, la suite $P_{hk}^{(1)}, P_{hk}^{(2)}, \ldots, P_{hk}^{(n)}, \ldots$ converge au sens de* Cesàro. Ce

[16]) M. Fréchet, l. c. e), p. 256.

résultat se réduira à un théorème bien connu dans la théorie des probabilités discontinues en chaîne, quand les $P_{hk}^{(n)}$ sont les probabilités de passage pour une chaîne de MARKOFF, constante, simple et à un nombre fini d'états possibles.

13. *Retour au théorème de la moyenne pour les fonctions asymptotiquement presque-périodiques.* Le théorème 7 a été établi en utilisant le théorème de la moyenne pour les fonctions asymptotiquement presque-périodiques d'une variable entière. Nous allons maintenant montrer qu'on peut considérer ce théorème de la moyenne comme un cas particulier du théorème 7.

Considérons l'espace fonctionnel $\mathfrak{F}$ constitué par les fonctions asymptotiquement presque-périodiques d'une variable entière et prenant leurs valeurs dans un espace de BANACH $\mathcal{E}$. On prend dans $\mathfrak{F}$ pour distance de deux points f, g l'expression

$$(f, g) = \underset{0<n<+\infty}{\text{borne sup.}} \|f(n) - g(n)\|.$$

$\mathfrak{F}$ est évidemment un espace de BANACH.

Soit maintenant $g_0(n)$ une fonction asymptotiquement presque-périodique qui prend ses valeurs dans $\mathcal{E}$. Pour démontrer l'existence de la moyenne $\mathfrak{M}(g_0)$, considérons l'ensemble G formé par la fonction $g_0(n)$ et les fonctions de la forme $g_0(n+h)$, où h est un nombre entier positif. D'après la propriété N, G est un ensemble compact dans l'espace $\mathfrak{F}$. La fermeture E de l'ensemble G est donc compact et fermé. Appelons maintenant T la transformation qui transforme un point $f(n)$ de E en $Tf = f(n+1)$. On vérifie sans peine que les hypothèses du théorème 6 sont toutes remplies. Dès lors, d'après le théorème 7, l'expression

$$\frac{g_0(n+1) + g_0(n+2) + \cdots + g_0(n+m)}{m}$$

converge uniformément vers une fonction de n, quand m tend vers $+\infty$. Il en résulte en particulier que la limite de

$$\frac{g_0(1) + g_0(2) + \cdots + g_0(m)}{m}$$

existe, quand m tend vers $+\infty$. Ainsi, on peut déduire du théorème 7 le théorème de la moyenne pour les fonctions asymptotiquement presque-périodiques d'une variable entière.

14. *Décomposabilité et indécomposabilité.* Nous avons obtenu au n° 11 une condition nécessaire et suffisante pour que $\mu(f, x)$ soit indépendant de x, quelle que soit la fonction f continue sur E et prenant ses valeurs dans un espace de BANACH. Considérons maintenant le cas où f est une fonctionnelle réelle et allons étudier l'indépendance presque certaine en introduisant une probabilité de distribution des positions de x dans E.

Restons dans les hypothèses du théorème 6, soit $\mathfrak{K}$ le plus petit corps borelien engendré par ceux de sous-ensembles de E qui sont relativement ouverts dans E. Supposons qu'on ait défini sur $\mathfrak{K}$ une fonction d'ensemble, $P(A)$, complètement additive, de valeurs non négatives et telle que $P(E) = 1$. C'est-à-dire qu'on a défini une probabilité $P(A)$ qu'un point x pris au hasard dans E soit situé dans un ensemble A, A étant un élément quelconque de $\mathfrak{K}$. Pour toute fonctionnelle réelle $f(x)$ définie et continue sur E et pour tout nombre réel r, désignons par $\underset{x}{E}\{\mu(f, x) < r\}$ l'ensemble des points x de E tels que $\mu(f, x) < r$. Il est clair que l'ensemble $\underset{x}{E}\{\mu(f, x) < r\}$ est relativement ouvert dans E et par conséquent il est un élément de $\mathfrak{K}$. Pour chaque f fixe, $\mu(f, x)$ est une variable aléatoire quand on choisit au hasard le point x dans E. Appelons $F(f, r)$ la fonction de répartition de la variable aléatoire $\mu(f, x)$:

$$F(f, r) = P\left(\underset{x}{E}\{\mu(f, x) < r\}\right).$$

Deux cas alors se présentent:

1^er^ cas: Pour au moins une fonctionnelle $f_0(x)$ continue sur E, $F(f_0, r)$ prend au moins une valeur $F(f_0, r_0)$ différente de 0 et 1. Posons

$$E_1 = \underset{x}{E}\{\mu(f_0, x) < r_0\}, \quad E_2 = E - E_1.$$

Les probabilités $P(E_1) = F(f_0, r_0)$ et $P(E_2)$ sont toutes les deux différentes de 0 et 1. Or, d'après (20), les ensembles E_1, E_2 sont clos par rapport à T. Ainsi, dans ce cas, E est *décomposable* [relativement à la fonction d'ensemble $P(A)$], entendant par là que E est une somme de deux ensembles E_1, E_2, disjoints et clos par rapport à T et tels qu'il y ait une probabilité positive qu'un point x pris au hasard dans E soit dans E_1 et une probabilité positive qu'il soit dans E_2.

2^e^ cas: Si E n'est pas décomposable de cette manière, $F(f, r)$ ne peut, quelle que soit la fonctionnelle $f(x)$ continue sur E, prendre que les valeurs 0 et 1. Quand f reste fixe et r varie de $-\infty$ à $+\infty$, $F(f, r)$ ne pouvant décroître, passe donc de la valeur 0 à la valeur 1 pour une certaine valeur r_0 de r (r_0 dépendant de f)[17]. C'est-à-dire que $\mu(f, x)$ prend presque certainement la même valeur r_0.

Nous avons ainsi obtenu le résultat suivant:

Théorème 9. *Sous les hypothèses du théorème 6, soit $\mathfrak{K}$ le plus petit corps borelien engendré par ceux de sous-ensembles de E qui sont relativement ouverts*

---

[17]) L'ensemble E étant compact et fermé, la fonctionnelle $f(x)$ continue sur E y est nécessairement bornée: $a \leqq f(x) \leqq b$. On a donc $a \leqq \mu(f, x) \leqq b$ pour tout point x de E. Dès lors, $F(f, r) = 0$ pour $r \leqq a$ et $F(f, r) = 1$ pour $r > b$.

dans E. Supposons qu'on ait défini, pour tout élément A de $\mathfrak{K}$, une probabilité $P(A)$ qu'un point x pris au hasard dans E soit dans le sous-ensemble A. Alors, ou bien E est décomposable en deux ensembles (appartenant à $\mathfrak{K}$) disjoints, de probabilités positives et clos par rapport à la transformation T; ou bien E n'est pas décomposable de cette manière.

Si, dans le cas indécomposable, f est une fonctionnelle réelle continue sur E la limite $\mu(f, x)$, qui partout existe sur E, de

$$\frac{f(Tx) + f(T^2x) + \cdots + f(T^n x)}{n},$$

quand n tend vers $+\infty$, est presque certainement la même sur E.

Observons enfin qu'on déduit immédiatement du corollaire 4 le fait suivant: *Dans le cas indécomposable, quand on choisit au hasard le point x dans E, la probabilité que la suite $T^n x$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ soit convergente ne peut être que* 0 *ou* 1.

(Eingegangen am 3. Juni 1942.)