Über das ϑ im verallgemeinerten Mittelwertsatz der Integralrechnung.

Von

Gerhard Grüß in Freiberg (Sa).

Die Funktion $f(x)$ sei für $a \leqq x \leqq b$ stetig, g sei ihr absolutes Minimum, G ihr absolutes Maximum im Bereich. Dann kann in der Abschätzung

$$(b-a)\,g \leqq \int_a^b f(x)\,dx \leqq (b-a)\,G$$

das eine oder das andere Gleichheitszeichen bekanntlich nur gelten, wenn $g = G$, also $f(x)$ in $a \ldots b$ konstant ist. Daraus folgt leicht, daß das ϑ in der Gleichung des Mittelwertsatzes

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(a+\vartheta(b-a))$$

nicht nur der Ungleichheit $0 \leqq \vartheta \leqq 1$, sondern sogar der durch Unterdrückung der Gleichheitszeichen verschärften Abschätzung $0 < \vartheta < 1$ genügt. Im folgenden soll nun gezeigt werden, daß die Aussage des verallgemeinerten Mittelwertsatzes in demselben Sinne verschärft werden kann, was nicht allgemein bekannt zu sein scheint und auch nicht so selbstverständlich ist wie im Fall des gewöhnlichen Mittelwertsatzes.

Sei also $f(x)$ stetig und $p(x)$ eigentlich integrierbar und nicht-negativ im Bereich $a \leqq x \leqq b$, ferner $g = \min f(x)$ und $G = \max f(x)$ in $a \ldots b$. Dann wird behauptet, daß es mindestens eine Zahl ϑ im *Innern* des Bereiches $0 \ldots 1$ gibt, die der Gleichung

$$\int_a^b f(x)\,p(x)\,dx = f(a+\vartheta(b-a))\int_a^b p(x)\,dx$$

genügt.

Beweis. Aus den Voraussetzungen folgt

$$(+) \qquad g\int_a^b p(x)\,dx \leqq \int_a^b f(x)\,p(x)\,dx \leqq G\int_a^b p(x)\,dx.$$

Wenn nun $\int_a^b p(x)\,dx = 0$ ist, so wird die Gleichung

$$\int_a^b f(x)\,p(x)\,dx = 0 = f(a+\vartheta(b-a))\cdot 0$$

durch *jede* beliebige Zahl ϑ im Bereich $0 \leqq \vartheta \leqq 1$ befriedigt. Sei also $\int\limits_a^b p(x)dx = A > 0$. Dann folgt aus (+)

$$g \leqq \frac{\int\limits_a^b f(x)\,p(x)\,dx}{\int\limits_a^b p(x)\,dx} \leqq G.$$

Wohlbemerkt kann hier das eine oder andere Gleichheitszeichen gelten, ohne daß $g = G$ wäre! Zum Beispiel ist $g\int\limits_a^b p(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,p(x)\,dx$, wenn

$$\begin{aligned} &f(x) = g, && p(x) = p_0 > 0 \text{ konstant für } a \leqq x \leqq c,\\ &f(x) = g + \frac{x-c}{b-c}(G-g), && p(x) = 0 \qquad \text{für } c \leqq x \leqq b \text{ gilt.}\end{aligned}$$

Deshalb ist es hier nicht möglich, so einfach wie im Fall des gewöhnlichen Mittelwertsatzes zu schließen, daß $\eta = \frac{\int\limits_a^b f(x)\,p(x)\,dx}{\int\limits_a^b p(x)\,dx}$ [außer für $f(x) =$ konst] größer als g und kleiner als G und daher gleich $f(\xi)$ sein müsse für irgendein $\xi = a + \vartheta(b-a)$ im Innern von $a \ldots b$. Vielmehr überlege man so:

Die Behauptung

$$\eta = \frac{\int\limits_a^b f(x)\,p(x)\,dx}{\int\limits_a^b p(x)\,dx} = f\big(a + \vartheta\,(b-a)\big), \qquad 0 < \vartheta < 1,$$

ist gewiß richtig, wenn (wie beim Beweis des gewöhnlichen Mittelwertsatzes) $g < \eta < G$, und natürlich auch, wenn $g = \eta = G$ gilt. Es bleibt also nur der Fall zu klären, daß entweder $g = \eta < G$ oder $g < \eta = G$ ist, und man darf sich offensichtlich darauf beschränken, die eine dieser beiden Möglichkeiten zu untersuchen.

Sei etwa $g = \eta < G$, also $g\int\limits_a^b p(x)dx = \int\limits_a^b f(x)p(x)dx$ oder $\int\limits_a^b (f(x)-g)\,p(x)\,dx = 0$. Dann nimmt $f(x)$, wie behauptet wird, den Wert $\eta = g$ gewiß im *Innern* von $a \ldots b$ an, wenn nur für irgendein ξ, $a < \xi < b$, $g = \min f(x) = f(\xi)$ ist. Der Fall $f(x) \neq \eta$ für $a < x < b$ kann also überhaupt nur dann eintreten, wenn außer der Voraussetzung $\int\limits_a^b (f(x) - g)\,p(x)\,dx = 0$ noch die weitere erfüllt ist, daß $f(x) > g$ gilt für $a < x < b$, und daher bleibt nur zu zeigen, daß die drei Voraussetzungen:

$$\int_a^b p(x)\,dx = A > 0,\ \int_a^b (f(x)-g)\,p(x)\,dx = 0,\ f(x) > g \quad \text{für} \quad a < x < b$$

nicht miteinander verträglich sind.

In der Tat folgt aus $\int_a^b p(x)\,dx = A > 0$ und $f(x) - g = q(x) > 0$ für $a < x < b$, daß $\int_a^b (f(x)-g)\,p(x)\,dx = \int_a^b q(x)\,p(x)\,dx$ positiv ist, also nicht verschwindet. Denn da die Integrale $\int_a^x p(x)\,dx$ und $\int_x^b p(x)\,dx$ in x stetig sind, kann die Zahl $\alpha > 0$ so klein gewählt werden, daß $\int_{a+\alpha}^{b-\alpha} p(x)\,dx > \frac{A}{2}$ gilt; weiter ist die stetige Funktion $q(x) = f(x) - g$ im abgeschlossenen Bereich $a + \alpha \ldots b - \alpha$ überall positiv und hat daher ein positives Minimum q_0. Schließlich ist wegen $q(x)\,p(x) \geqq 0$

$$\int_a^b q(x)\,p(x)\,dx \geqq \int_{a+\alpha}^{b-\alpha} q(x)\,p(x)\,dx \geqq q_0 \int_{a+\alpha}^{b-\alpha} p(x)\,dx > q_0 \cdot \frac{A}{2}$$

positiv.

Damit ist die Behauptung in vollem Umfang bewiesen[1]).

[1]) Nach Abschluß der Korrekturen bemerke ich erst heute, am 11. Januar 1943, daß E. JACOBSTHAL die hier mitgeteilte Verschärfung des Mittelwertsatzes bereits 1940 in seiner Abeit „Über den Mittelwertsatz der Integralrechnung", Det Kongelige Norske Videnskabers Selskab Forhandlinger Bd. XIII, Nr. 8, bewiesen hat. Sein Beweis und der meine sind zwar ähnlich, sie unterscheiden sich aber doch so weit, daß die Veröffentlichung auch meines Beweises gerechtfertigt sein dürfte.

(Eingegangen am 20. August 1942.)