

Werk

Titel: Mathematische Zeitschrift

Ort: Berlin

Jahr: 1942

Kollektion: Mathematica

Werk Id: PPN266833020_0048

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN266833020_0048 | LOG_0046

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Über das ϑ im verallgemeinerten Mittelwertsatz der Integralrechnung.

Von

Gerhard Grüß in Freiberg (Sa).

Die Funktion $f(x)$ sei für $a \leq x \leq b$ stetig, g sei ihr absolutes Minimum, G ihr absolutes Maximum im Bereich. Dann kann in der Abschätzung

$$(b - a)g \leq \int_a^b f(x) dx \leq (b - a)G$$

das eine oder das andere Gleichheitszeichen bekanntlich nur gelten, wenn $g = G$, also $f(x)$ in $a \dots b$ konstant ist. Daraus folgt leicht, daß das ϑ in der Gleichung des Mittelwertsatzes

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a)f(a + \vartheta(b - a))$$

nicht nur der Ungleichheit $0 \leq \vartheta \leq 1$, sondern sogar der durch Unterdrückung der Gleichheitszeichen verschärften Abschätzung $0 < \vartheta < 1$ genügt. Im folgenden soll nun gezeigt werden, daß die Aussage des verallgemeinerten Mittelwertsatzes in demselben Sinne verschärft werden kann, was nicht allgemein bekannt zu sein scheint und auch nicht so selbstverständlich ist wie im Fall des gewöhnlichen Mittelwertsatzes.

Sei also $f(x)$ stetig und $p(x)$ eigentlich integrierbar und nicht-negativ im Bereich $a \leq x \leq b$, ferner $g = \min f(x)$ und $G = \max f(x)$ in $a \dots b$. Dann wird behauptet, daß es mindestens eine Zahl ϑ im Innern des Bereiches $0 \dots 1$ gibt, die der Gleichung

$$\int_a^b f(x) p(x) dx = f(a + \vartheta(b - a)) \int_a^b p(x) dx$$

genügt.

Beweis. Aus den Voraussetzungen folgt

$$(+)$$
$$g \int_a^b p(x) dx \leq \int_a^b f(x) p(x) dx \leq G \int_a^b p(x) dx.$$

Wenn nun $\int_a^b p(x) dx = 0$ ist, so wird die Gleichung

$$\int_a^b f(x) p(x) dx = 0 = f(a + \vartheta(b - a)) \cdot 0$$

durch jede beliebige Zahl ϑ im Bereich $0 \leq \vartheta \leq 1$ befriedigt. Sei also $\int_a^b p(x) dx = A > 0$. Dann folgt aus (+)

$$g \leq \frac{\int_a^b f(x) p(x) dx}{\int_a^b p(x) dx} \leq G.$$

Wohlbemerkt kann hier das eine oder andere Gleichheitszeichen gelten, ohne daß $g = G$ wäre! Zum Beispiel ist $g \int_a^b p(x) dx = \int_a^b f(x) p(x) dx$, wenn

$$\begin{aligned} f(x) &= g, & p(x) &= p_0 > 0 \text{ konstant für } a \leq x \leq c, \\ f(x) &= g + \frac{x-c}{b-c} (G - g), & p(x) &= 0 \quad \text{für } c \leq x \leq b \text{ gilt.} \end{aligned}$$

Deshalb ist es hier nicht möglich, so einfach wie im Fall des gewöhnlichen

Mittelwertsatzes zu schließen, daß $\eta = \frac{\int_a^b f(x) p(x) dx}{\int_a^b p(x) dx}$ [außer für $f(x) = \text{konst}$]

größer als g und kleiner als G und daher gleich $f(\xi)$ sein müsse für irgendein $\xi = a + \vartheta(b - a)$ im Innern von $a \dots b$. Vielmehr überlege man so:

Die Behauptung

$$\eta = \frac{\int_a^b f(x) p(x) dx}{\int_a^b p(x) dx} = f(a + \vartheta(b - a)), \quad 0 < \vartheta < 1,$$

ist gewiß richtig, wenn (wie beim Beweis des gewöhnlichen Mittelwertsatzes) $g < \eta < G$, und natürlich auch, wenn $g = \eta = G$ gilt. Es bleibt also nur der Fall zu klären, daß entweder $g = \eta < G$ oder $g < \eta = G$ ist, und man darf sich offensichtlich darauf beschränken, die eine dieser beiden Möglichkeiten zu untersuchen.

Sei etwa $g = \eta < G$, also $g \int_a^b p(x) dx = \int_a^b f(x) p(x) dx$ oder $\int_a^b (f(x) - g) p(x) dx = 0$. Dann nimmt $f(x)$, wie behauptet wird, den Wert $\eta = g$ gewiß im Innern von $a \dots b$ an, wenn nur für irgendein ξ , $a < \xi < b$, $g = \min f(x) = f(\xi)$ ist. Der Fall $f(x) \neq \eta$ für $a < x < b$ kann also überhaupt nur dann eintreten, wenn außer der Voraussetzung $\int_a^b (f(x) - g) p(x) dx = 0$ noch die weitere

erfüllt ist, daß $f(x) > g$ gilt für $a < x < b$, und daher bleibt nur zu zeigen, daß die drei Voraussetzungen:

$$\int_a^b p(x) dx = A > 0, \int_a^b (f(x) - g)p(x) dx = 0, f(x) > g \text{ für } a < x < b$$

nicht miteinander verträglich sind.

In der Tat folgt aus $\int_a^b p(x) dx = A > 0$ und $f(x) - g = q(x) > 0$ für $a < x < b$, daß $\int_a^b (f(x) - g)p(x) dx = \int_a^b q(x) p(x) dx$ positiv ist, also nicht verschwindet. Denn da die Integrale $\int_a^x p(x) dx$ und $\int_x^b p(x) dx$ in x stetig sind, kann die Zahl $\alpha > 0$ so klein gewählt werden, daß $\int_{a+\alpha}^{b-\alpha} p(x) dx > \frac{A}{2}$ gilt; weiter ist die stetige Funktion $q(x) = f(x) - g$ im abgeschlossenen Bereich $a + \alpha \dots b - \alpha$ überall positiv und hat daher ein positives Minimum q_0 . Schließlich ist wegen $q(x) p(x) \geq 0$

$$\int_a^b q(x) p(x) dx \geq \int_{a+\alpha}^{b-\alpha} q(x) p(x) dx \geq q_0 \int_{a+\alpha}^{b-\alpha} p(x) dx > q_0 \cdot \frac{A}{2}$$

positiv.

Damit ist die Behauptung in vollem Umfang bewiesen¹⁾.

¹⁾ Nach Abschluß der Korrekturen bemerke ich erst heute, am 11. Januar 1943, daß E. JACOBSTHAL die hier mitgeteilte Verschärfung des Mittelwertsatzes bereits 1940 in seiner Arbeit „Über den Mittelwertsatz der Integralrechnung“, Det Kongelige Norske Videnskabers Selskab Forhandlingar Bd. XIII, Nr. 8, bewiesen hat. Sein Beweis und der meine sind zwar ähnlich, sie unterscheiden sich aber doch so weit, daß die Veröffentlichung auch meines Beweises gerechtfertigt sein dürfte.

(Eingegangen am 20. August 1942.)