Über gewisse Halbverbände und kommutative Semigruppen.

Zweiter Teil.

Von

Fritz Klein-Barmen in Wuppertal.

Einleitung.

Wie im ersten Teil der Arbeit[1]) dargelegt worden ist, entspringen *Halbverband* und *kommutative Semigruppe* einer gemeinsamen Wurzel, und zwar wurde das *Holoid* als der beide umfassende Operationsbereich aufgezeigt. Das Holoid erweist sich damit als ein Fundamentalbegriff, nicht in bezug auf die *inhaltliche*, wohl aber in bezug auf die *formale* Seite der Mathematik[2]). Die große Bedeutung, die diesem Begriff zukommt, läßt es nicht zu, daß das Holoid nur so nebenbei am Rande irgendeiner Abhandlung erwähnt wird, sondern macht es zur wissenschaftlichen Pflicht, das Holoid in den Mittelpunkt einer eigenen Untersuchung zu stellen.

---

[1]) Über gewisse Halbverbände und kommutative Semigruppen. Erster Teil. Math. Zeitschr. **48** (1942), S. 275–288 = [H/S. 1]. Die Kenntnis dieser Arbeit wird vorausgesetzt.

[2]) Daß in jeder Erkenntnis, insbesondere in jeder *mathematischen* Erkenntnis, eine *anschaulich-inhaltliche* Komponente mit einer *begrifflich-formalen* Komponente verschmolzen ist, darüber herrscht seit langem volle Einmütigkeit. Dagegen scheiden sich die Geister sofort, sobald man nach dem Anteil fragt, den jede der beiden Komponenten an der mathematischen Erkenntnis hat. Dieser Kampf an den Grenzen der Mathematik ist so alt wie die Mathematik selbst. Sein Rhythmus wird in erster Linie von den epochalen und säkularen weltanschaulichen Strömungen, sodann aber auch von Offensivgeist, Temperament und Charakter der angetretenen Kämpfer bestimmt. Zu den Stürmern und Drängern gehört M. STECK, der mit seiner Streitschrift „Das Hauptproblem der Mathematik" (Berlin 1942) zum Angriff schreitet. Der Verfasser liegt vor allem in Fehde mit den Richtungen, die den logischen Gehalt der mathematischen Erkenntnis betonen, also mit den Richtungen, deren führende Männer D. HILBERT, B. RUSSELL und H. SCHOLZ sind. Eine besonders scharfe Attacke reitet STECK gegen die Logistik, die ihm eine gänzlich hohle Nuß am Baum der mathematischen Erkenntnis ist. Als Philosoph bekennt sich M. STECK zu KANT; genauer dürfte seine Position in der Nachbarschaft der FRIESschen Schule zu suchen sein, deren Exponent in philosophischer Hinsicht bekanntlich LEONARD NELSON, in mathematischer Hinsicht GERHARD HESSENBERG ist. Doch muß ich gestehen, daß es für einen Mathematiker

Nachdem wir im ersten Teil die Theorie der Holoide in großen Zügen entwickelt haben, wollen wir nunmehr auf einzelne Punkte genauer eingehen. Im vorliegenden zweiten Teil beschäftigen wir uns mit den *linearen* Holoiden, deren Herausstellung im Hinblick auf die linearen Verbände und Semigruppen wünschenswert ist. Wenn auch die Struktur des linearen Holoids von nur wenigen und überdies recht einfachen Gesetzen bestimmt wird und infolgedessen leicht zu übersehen ist, so darf man doch nicht glauben, daß es sich bei diesem Holoid um nichts weiter als um eine farblose und verwaschene Verallgemeinerung von Verband und Semigruppe handelt; im Gegenteil, bei näherem Zusehen wird man bald gewahr, daß das lineare Holoid ein Operationsbereich mit sehr merkwürdigen und charakteristischen Eigenschaften ist und deshalb an sich Interesse verdient.

Im einzelnen liegt der Arbeit der folgende Plan zugrunde. § 1 enthält einen auf die Bedürfnisse der vorliegenden Untersuchung zugeschnittenen Auszug aus der allgemeinen Theorie; wegen der Beweise der Sätze verweisen wir auf [H/S. 1]. Durch ein zusätzliches Axiom gelangen wir in § 2 zum linearen Holoid. In einer Reihe von Sätzen arbeiten wir die besonderen Eigenschaften desselben heraus. § 3 stellt den Kern der Arbeit dar. Wir entwickeln darin eine Regel, die es gestattet, das Ergebnis der Verknüpfung von irgendwelchen Elementen des Holoids anzugeben. Die Regel kann leicht gehandhabt werden und ist deswegen für die Praxis des Holoidkalküls von Wichtigkeit.

Da man, was Sinn und Wesen der *axiomatischen Methode* anbetrifft, neuerdings auf die verschiedensten Ansichten stößt, möchte ich mich, um hinsichtlich meiner Auffassung keine Mißverständnisse aufkommen zu lassen, auch einmal kurz über diesen Punkt äußern. Meine Ausführungen tragen provisorischen Charakter; ich hoffe, demnächst Gelegenheit zu einer ausführlichen Darstellung zu finden.

Die logische Analyse der Begriffe einer mathematischen Disziplin führt, wenn sie weit genug getrieben wird, schließlich auf Begriffe, die man nicht

---

schwierig ist, die Position eines Ontologen richtig auszumachen. Wenn es sich bei dem STECKschen Buch auch vornehmlich um eine Streitschrift handelt, die als solche an den Geschmack und die Neigungen des Lesers appellieren darf, wobei es auf die Güte der Argumentation weniger ankommt, so müssen doch die Waffen stark befremden, deren sich STECK bedient, um Männer abzutun, die sich um die deutsche Mathematik sehr verdient gemacht haben.

Meine Ausführungen werden dem einen oder dem anderen an dieser Stelle vielleicht ungewöhnlich vorkommen. Ich mußte mich aber äußern, weil es in diesem Kampf für manchen unter uns um den Sinn und damit um den Wert der Arbeit seines Lebens geht.

mehr reduzieren kann oder nicht mehr reduzieren will. Bei einem systematischen Aufbau der betreffenden Theorie fungieren diese Begriffe als nichtdefinierte Grundbegriffe. Ich sehe als derartige Grundbegriffe u. a. die Begriffe *Menge*, *Beziehung* und *Verknüpfung* an. Nach meiner Ansicht ist eine strenge Definition derselben nicht möglich, was natürlich keineswegs ausschließt, daß diese Begriffe mehr oder weniger vollständig beschrieben, umschrieben oder erläutert werden können. Doch verzichte ich auf eine Beschreibung, weil ich glaube voraussetzen zu dürfen, daß der Leser weiß, was unter einer Menge, unter einer Beziehung und unter einer Verknüpfung zu verstehen ist. Betonen will ich nur, daß ich diese Begriffe als *inhaltlich* fundiert ansehe. Das soll besagen, daß wir uns dieser Begriffe durch Anschauung und Erfahrung *bewußt* werden; es soll aber nicht besagen, daß diese Begriffe erst durch Anschauung oder Erfahrung in unserem Bewußtsein *erzeugt* werden. Diese Begriffe ruhen zunächst verborgen in unserem Denkvermögen; Anschauung und Erfahrung sind nur die Gelegenheitsursachen, die uns auf unseren Besitz aufmerksam machen. Noch mehr: Die genannten Begriffe sind Kategorien, Kantische Kategorien. Sie sind es, die in das Chaos der uns durch die Sinne vermittelten Eindrücke Ordnung bringen und uns damit die Umwelt verständlich machen.

Damit glaube ich, meine prinzipielle Einstellung zu einer Kernfrage der Axiomatik einigermaßen deutlich umrissen zu haben. Vermutlich wird den Radikalen verschiedener Richtungen dieser Standpunkt als rückständig erscheinen; sie werden ihn vielleicht nachsichtig und herablassend als „naiv" bezeichnen. Doch sei ihnen das nicht übel genommen; es soll uns auch nicht weiter beunruhigen.

Betrachten wir nun ein Axiomensystem. Dasselbe hat als Unterlage eine Menge, deren Elemente einer Beziehung oder einer Verknüpfung fähig sind. Vorläufig haben wir es nur mit Verknüpfungen zu tun. Die Leistung eines Axiomensystems besteht nach unserer Auffassung darin, daß es die unterlegte Menge zugleich mit einer gewissen Verknüpfung näher bestimmt. Nach dieser Auffassung ist die axiomatische Methode nichts anderes als eine Methode der *Spezifikation*, indem die allgemeinen Begriffe der Menge und Verknüpfung durch zusätzliche Bedingungen, wie sie in den Axiomen vorliegen, eingeschränkt werden.

Diese Auffassung, daß nämlich durch ein vorgegebenes Axiomensystem eine *spezielle* Menge in Verbindung mit einer *speziellen* Verknüpfung definiert wird, liegt der modernen *algebraischen* Axiomatik zugrunde, wie sie bei der Aufstellung der Begriffe Verband und Gruppe, Ring, Körper usw. zum Ausdruck kommt; man vergleiche auch die Definition des Holoids in Erklärung 1 der vorliegenden Arbeit.

Dagegen nimmt die *geometrische* Axiomatik bei der üblichen Behandlung eine leichte Akzentverschiebung vor. Danach definiert ein geometrisches Axiomensystem nicht die unterlegte Menge selbst, d. h. nicht den Raum, sondern implizite die Elemente, aus denen die unterlegte Menge, also der Raum, besteht. Dieser Unterschied gegenüber der algebraischen Axiomatik spiegelt sich darin wider, daß z. B. Hilbert die *Elemente* durch besondere Namen — Punkt, Gerade, Ebene — auszeichnet, dagegen die unterlegte Menge, von der niemals die Rede ist, namenlos läßt. Die algebraische Axiomatik verfährt gerade umgekehrt.

Wir machen noch darauf aufmerksam, daß wir in dieser Arbeit nur solche Holoide zulassen, die entweder aus *endlich vielen* oder aus *abzählbar vielen* Elementen bestehen. Höhere Mächtigkeiten werden absichtlich nicht in Betracht gezogen[3]). Das im Wesen der natürlichen Zahlen verankerte Schlußverfahren der vollständigen Induktion wird weitgehend in Anspruch genommen.

§ 1.

Das Holoid.

Erklärung 1. Eine Menge M heiße ein *Holoid* in bezug auf eine durch $\bigcirc$ symbolisierte Verknüpfung, kurz ein $\mathfrak{H}(\bigcirc)$, wenn die folgenden fünf *Axiome* in Kraft sind:

A I. Sind a, b zwei beliebige Elemente aus M, so gibt es in M ein eindeutig bestimmtes Element c derart, daß — in dieser Reihenfolge —

$$a \bigcirc b = c$$

gilt.

A II. Für drei beliebige Elemente a, b, c aus M gilt

$$(a \bigcirc b) \bigcirc c = a \bigcirc (b \bigcirc c).$$

A III. Für zwei beliebige Elemente a, b aus M gilt

$$a \bigcirc b = b \bigcirc a.$$

A IV. Es gibt in M ein Element e derart, daß für jedes Element a aus M

$$a \bigcirc e = a$$

gilt.

---

[3]) Ich bin nicht mehr restlos davon überzeugt, daß unendliche Mengen, die nicht abzählbar sind, widerspruchslos gedacht werden können.

A V. Sind a, b und x, y Elemente aus M derart, daß

$$a = b \bigcirc x, \quad b = a \bigcirc y$$

gilt, so ist

$$a = b.$$

Die Verknüpfung $\bigcirc$ werde als „Multiplikation" bezeichnet. Demgemäß verwenden wir auch die Ausdrücke „Produkt", „Faktoren" und „Potenz". Wir stellen die Potenz in der üblichen Weise dar. Die Potenzregeln der gewöhnlichen Algebra sind in Kraft:

$$(1) \qquad a^m \bigcirc a^n = a^{m+n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}, \quad a^m \bigcirc b^m = (a \bigcirc b)^m,$$

wobei m und n natürliche Zahlen sind.

Erklärung 2. Ein Holoid werde als *endlich* oder *unendlich* bezeichnet, je nachdem es aus endlich oder unendlich vielen Elementen besteht. Unter der *Ordnung* eines endlichen Holoids werde die Anzahl der verschiedenen Elemente verstanden, aus denen das Holoid besteht.

Das Element e des Axioms A IV ist eindeutig bestimmt; es wird als die *untere Spitze* oder als das *unterste* Element von M bezeichnet. Setzt man, wenn a ein beliebiges Element aus M ist,

$$a^0 = e,$$

so gelten die Formeln (1) nicht nur für natürliche, sondern bereits für *nichtnegative* ganze Zahlen m und n.

Für endliche, aber nicht mehr für unendliche Holoide läßt sich die Existenz einer *oberen Spitze* oder eines *obersten* Elementes beweisen, worunter ein Element f zu verstehen ist derart, daß für jedes Element a aus M

$$a \bigcirc f = f$$

gilt.

Wegen des Axioms A I kann man jedem endlichen Holoid in einfacher Weise eine quadratische Tafel zuordnen, aus der sofort das Produkt zweier Elemente abgelesen werden kann. Das Schema, das seit langem bekannt ist und in Theorie und Praxis vielfach Anwendung gefunden hat, wird folgendermaßen hergestellt. Man bringe die Elemente des Holoids, die zu diesem Zweck mit

$$a_1, a_2, \ldots, a_m$$

bezeichnet seien, in den Feldern eines passend eingerichteten Quadrates unter, und zwar ordne man die Elemente so ein, daß das Durchschnittsfeld der i-ten Zeile und der k-ten Spalte von dem Element $a_i \bigcirc a_k$ eingenommen wird. Das ausgefüllte Quadrat ist wegen A III symmetrisch in bezug auf die von links oben nach rechts unten verlaufende Diagonale. Die Leerform sieht so aus:

	a_1	a_2	.	.	.	a_m	
a_1							a_1
a_2							a_2
.							.
.							.
.							.
a_m							a_m
	a_1	a_2	.	.	.	a_m	

Erklärung 3. Sind a, b Elemente aus M, wobei M ein $\mathfrak{H}(\bigcirc)$ ist, so sei dann und nur dann

$$a \supseteq b,$$

wenn es in M wenigstens ein Element x gibt derart, daß

$$a = b \bigcirc x$$

gilt. Mit $a \supseteq b$ sei $b \subseteq a$ gleichbedeutend. Findet $a \supseteq b$ statt, so heiße a ein *Oberelement* von b und umgekehrt b ein *Unterelement* von a. Daß a ein Oberelement bzw. Unterelement von b ist, drücken wir auch durch die Wendung aus: a befindet sich „oberhalb" bzw. „unterhalb" von b. Für

$$a \supseteq b,\ b \supseteq c \quad \text{bzw.} \quad a \subseteq b,\ b \subseteq c$$

werde kürzer

$$a \supseteq b \supseteq c \quad \text{bzw.} \quad a \subseteq b \subseteq c$$

geschrieben. Gilt

$$a \supseteq b \supseteq c \quad \text{oder} \quad a \subseteq b \subseteq c,$$

so sagen wir, daß sich b „zwischen" a und c befindet.

Die Beziehung $\supseteq$ ist transitiv und reflexiv. Ferner kommen ihr die in den folgenden Sätzen ausgesprochenen Eigenschaften zu.

Satz 1. 1. *Für jedes a gilt $a \supseteq e$ und, falls das oberste Element existiert, das dann mit f bezeichnet sei, auch $f \supseteq a$.*

Satz 1. 2. *Mit*

$$a \supseteq b, \quad b \supseteq a$$

gilt $a = b$.

Satz 2. 1. *Sind*

$$a_1, \ldots, a_n \tag{2}$$

Elemente aus M derart, daß

$$\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu = e$$

gilt, so ist

$$a_\nu = e \qquad (\nu = 1, \ldots, n)..$$

Satz 2. 2. *Zu vorgegebenen Elementen* (2) *gibt es mindestens ein Element x derart, daß gilt*

$$x \supseteq a_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Satz 2. 3. *Mit*

$$a_\nu \supseteq b_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

gilt

$$\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu \supseteq \prod_{\nu=1}^{n} b_\nu .$$

Satz 2. 4. *Für $n \geqq k$ gilt*

$$\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu \supseteq \prod_{\varkappa=1}^{k} a_\varkappa .$$

Erklärung 4. Daß

$$a \supseteq b, \quad a \neq b$$

stattfindet, werde auch durch

$$a \supset b$$

zum Ausdruck gebracht. Mit $a \supset b$ sei $b \subset a$ gleichbedeutend. Für

$$a \supset b,\ b \supset c \quad \text{bzw.} \quad a \subset b,\ b \subset c$$

werde kürzer

$$a \supset b \supset c \quad \text{bzw.} \quad a \subset b \subset c$$

geschrieben.

Satz 3. *Mit*

$$a \supset b,\ b \supseteq c \quad \textit{bzw.} \quad a \supseteq b,\ b \supset c$$

gilt $a \supset c$.

Erklärung 5. Es seien a, b Elemente aus M derart, daß $a \supset b$ gilt. Gibt es in M kein Element x derart, daß

$$a \supset x \supset b$$

gilt, so heiße a ein *oberer Nachbar* von b und umgekehrt b ein *unterer Nachbar* von a.

Satz 4. *Ist M ein endliches Holoid und sind a, b Elemente aus M derart, daß $a \supset b$ gilt, so hat a mindestens einen unteren Nachbarn und b mindestens einen oberen Nachbarn.*

Erklärung 6. Ein von e verschiedenes Element a aus M, das nur e und a als Unterelemente hat, heiße ein *Primelement* von M.

Ohne weiteres erkennt man, daß jedes Primelement ein oberer Nachbar von e ist und umgekehrt.

Erklärung 7. Ein Element a aus M derart, daß

$$a \bigcirc a = a$$

gilt, heiße *idempotent*.

Ersichtlich sind die untere und obere Spitze von M idempotente Elemente. Demnach besitzt jedes Holoid mindestens ein idempotentes Element und jedes *endliche* Holoid, das aus mehr als einem Element besteht, mindestens zwei idempotente Elemente.

Man kann die endlichen Holoide folgendermaßen veranschaulichen. Wir deuten die Elemente eines derartigen Operationsbereiches als Punkte der Ebene oder des Raumes. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf den Fall der Ebene. Dann und nur dann, wenn zwei Elemente des Holoids Nachbarn sind, seien die entsprechenden Bildpunkte durch eine Strecke verbunden. Die Strecke kann eine beliebige Richtung haben; sie soll nur nicht waagerecht verlaufen. Dabei sei die Anordnung der Bildpunkte derart, daß der Bildpunkt von a oberhalb des Bildpunktes von b liegt, wenn a ein oberer Nachbar von b ist. Das Bild eines Holoids erster Ordnung ist ein einzelner Punkt; einem Holoid zweiter Ordnung entspricht eine Strecke und einem Holoid dritter Ordnung ein Streckenzug, wie er in Fig. 1 dargestellt ist. Topologisch gesehen gibt es also nur je einen Typus von Holoiden der ersten, zweiten und dritten Ordnung. Dagegen verteilen sich die Holoide höherer Ordnung jeweils auf verschiedene Typen. So gibt es zwei Typen von Holoiden vierter Ordnung, fünf Typen von Holoiden fünfter Ordnung und 15 Typen von Holoiden sechster Ordnung[4]).

Fig. 1.

[4]) Die Typen von der ersten bis zur sechsten Ordnung sind bekannt; die Bilder derselben stimmen, wie man sich leicht überzeugt, mit den in [Verb. 2], S. 613 angegebenen Streckenkomplexen überein. ([Verb. 2] = Grundzüge der Theorie der Verbände. Math. Annalen **111** (1935), S. 596—621).

Die Aufgabe, die verschiedenen Holoidtypen festzustellen, läuft auf das topologische Problem hinaus, alle Streckenkomplexe anzugeben, die den folgenden Bedingungen genügen:

α) Jeder Komplex enthält genau einen untersten und genau einen obersten Punkt.

β) Kein Komplex enthält einen dreieckigen Teilkomplex vom Typus der Fig. 2.

Die Bedingung α) bedarf keiner Erläuterung. Die Bedingung β) soll verhindern, daß zwei Punkte des Komplexes — z. B. a und c in Fig. 2 — zugleich benachbart und nicht benachbart sind.

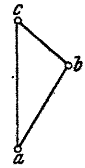

Fig. 2.

§ 2.

Das lineare Holoid.

Um weiter zu kommen, muß man aus der zunächst unübersehbaren Masse der Holoide gewisse Klassen herausgreifen, die sich durch besondere Eigenschaften auszeichnen. Von welchen Gesichtspunkten man sich bei der Auswahl leiten läßt, d. h. welches Ausleseprinzip man dabei benutzt, hängt davon ab, in welcher Richtung man die Theorie ausbauen will. Hier interessieren uns diejenigen Holoide, die dem folgenden *Axiom* genügen:

A VI. Sind a, b zwei verschiedene Elemente aus M, so gibt es in M entweder ein Element x derart, daß gilt

$$a = b \bigcirc x,$$

oder ein Element y derart, daß gilt

$$b = a \bigcirc y.$$

Für zwei beliebige Elemente a, b eines derartigen Holoids findet also

$$a \supseteq b \quad \text{oder} \quad a \subseteq b$$

statt, wobei auch beide Relationen zugleich bestehen können. Das Axiom A VI erhebt somit die Beziehung $\supseteq$ zu einer linearen Ordnungsbeziehung. Dieser Umstand rechtfertigt die folgende Namensgebung.

Erklärung 8. Ein dem Axiom A VI genügendes Holoid heiße *linear*.

Das Bild eines linearen Holoids ist ein einfacher offener Streckenzug (vgl. Fig. 1), woraus sofort ersichtlich ist, daß jedes Element eines linearen Holoids höchstens einen oberen und höchstens einen unteren Nachbarn hat. Damit hängt zusammen, daß jedes lineare und endliche Holoid ein einziges Primelement besitzt, wenn man von dem trivialen Fall absieht, daß überhaupt nur ein Element vorhanden ist. Es gibt lineare Holoide jeder Ordnung;

insbesondere sind alle Holoide von der ersten bis zur dritten Ordnung linear. Erst von der vierten Ordnung an gehören zu jeder Ordnung sowohl lineare als auch nichtlineare Typen.

Weiterhin sei M ein lineares Holoid. Für manche Betrachtungen empfiehlt es sich, den Linearcharakter von M dadurch zum Ausdruck zu bringen, daß man die Elemente von M mit

$$p^{[0]},\ p^{[1]},\ p^{[2]},\ \ldots$$

bezeichnet derart, daß

$$p^{[0]} = e$$

gilt und jedes $p^{[\alpha+1]}$ der obere Nachbar von $p^{[\alpha]}$ ist. Bei dieser Bezeichnungsweise findet

$$p^{[0]} \subset p^{[1]} \subset p^{[2]} \subset \cdots$$

statt. Für $p^{[1]}$ werde auch p geschrieben. Den Anschluß an die alte Bezeichnung der Elemente — kleine lateinische Buchstaben — denken wir uns durch

$$p^{[\alpha]} = a, \quad p^{[\beta]} = b, \ \ldots$$

vermittelt. Mit

$$a \supseteq b \quad \text{bzw.} \quad a \supset b$$

gilt dann

$$\alpha \geqq \beta \quad \text{bzw.} \quad \alpha > \beta$$

und umgekehrt.

Zwischen den Elementen $p^{[\alpha]}$ und p^{α} ist scharf zu unterscheiden; $p^{[\alpha]}$ kann ein ganz beliebiges Element von M bedeuten, während unter p^{α} die α-te Potenz des Primelementes p zu verstehen ist. Zwar ist

$$p^{[0]} = p^0 = e, \quad p^{[1]} = p^1 = p;$$

dagegen gilt für $\alpha \geqq 2$ im allgemeinen nicht

$$p^{[\alpha]} = p^{\alpha}.$$

Auf das zwischen $p^{[\alpha]}$ und p^{α} bestehende Abhängigkeitsverhältnis kommen wir noch ausführlich zu sprechen.

Satz 5. *Mit*

$$a \bigcirc c \supset b \bigcirc c$$

gilt

$$a \supset b.$$

Beweis. Wäre die Behauptung falsch, so müßte

$$a \subseteq b$$

und somit nach Satz 2. 3

$$a \bigcirc c \subseteq b \bigcirc c$$

sein, was der Voraussetzung widerspricht.

Anmerkung. Der Satz 5 gilt nicht mehr für nichtlineare Holoide, wie das Holoid der Fig. 3 zeigt.

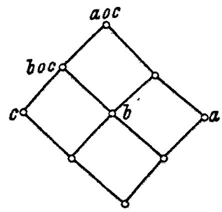

Fig. 3.

Satz 6. *Mit*

(3) $$p^{[\alpha]} \circ p^{[\beta]} \subseteq p^{[\gamma]}$$

gilt

(4) $$p^{[\alpha]} \circ p^{[\beta+1]} \subseteq p^{[\gamma+1]}$$

vorausgesetzt, daß $p^{[\gamma+1]}$ *existiert.*

Beweis. Nach (3) ist

$$p^{[\alpha]} \subset p^{[\gamma+1]}.$$

Gemäß Erklärung 3 gibt es mindestens ein ξ derart, daß

(5) $$p^{[\alpha]} \circ p^{[\xi]} = p^{[\gamma+1]}$$

gilt. Wegen (3) ist

$$p^{[\alpha]} \circ p^{[\xi]} \supset p^{[\alpha]} \circ p^{[\beta]},$$

so daß nach Satz 5

(6) $$\xi > \beta$$

ist.

Mit $p^{[\gamma+1]}$ existiert auch $p^{[\beta+1]}$ und somit auch $p^{[\alpha]} \circ p^{[\beta+1]}$. Wäre nun (4) falsch, so müßte

$$p^{[\alpha]} \circ p^{[\beta+1]} \supset p^{[\gamma+1]}$$

und wegen (5)

$$p^{[\alpha]} \circ p^{[\beta+1]} \supset p^{[\alpha]} \circ p^{[\xi]}$$

sein, so daß — wieder nach Satz 5 —

$$\beta + 1 > \xi$$

wäre, was im Widerspruch mit (6) steht. Infolgedessen ist (4) richtig.

Satz 7. 1. *Für zwei beliebige Elemente* $p^{[\alpha]}$ *und* $p^{[\beta]}$ *gilt*

$$p^{[\alpha]} \circ p^{[\beta]} \subseteq p^{[\alpha+\beta]}$$

vorausgesetzt, daß $p^{[\alpha+\beta]}$ *existiert.*

Beweis. Es ist

$$p^{[\alpha]} \circ p^{[0]} = p^{[\alpha]}$$

und somit nach Satz 6

$$p^{[\alpha]} \circ p^{[1]} \subseteq p^{[\alpha+1]},$$
$$p^{[\alpha]} \circ p^{[2]} \subseteq p^{[\alpha+2]},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$p^{[\alpha]} \circ p^{[\beta]} \subseteq p^{[\alpha+\beta]}.$$

Satz 7. 2. *Sind*

$$p^{[\alpha]}, \quad p^{[\beta]}, \quad p^{[\gamma]}$$

Elemente aus M derart, daß

$$p^{[\alpha]} \circ p^{[\beta]} = p^{[\gamma]}$$

ist, so gilt

$$\alpha + \beta \geqq \gamma \geqq \max(\alpha, \beta).$$

Beweis. Die Abschätzung nach oben ist in Satz 7. 1 bewiesen; die Abschätzung nach unten ist trivial.

Satz 7. 3. *Existiert* $p^{[\alpha]}$, *so gilt*

$$p^{\alpha} \subseteq p^{[\alpha]}. \tag{7}$$

Beweis. Die Relation (7) trifft für $\alpha = 0$ und für $\alpha = 1$ zu. Ist (7) für irgendein α richtig, so folgt

$$p^{\alpha+1} \subseteq p^{[\alpha]} \circ p.$$

Existiert $p^{[\alpha+1]}$, so ist nach Satz 7. 1

$$p^{[\alpha]} \circ p \subseteq p^{[\alpha+1]},$$

so daß auch

$$p^{\alpha+1} \subseteq p^{[\alpha+1]}$$

richtig ist.

Eine Bemerkung. Dem linearen Holoid M kann man eine zahlentheoretische Funktion $\mathfrak{f}(\alpha, \beta)$ dadurch zuordnen, daß man, wenn

$$a \circ b = c, \quad \text{d. h. } p^{[\alpha]} \circ p^{[\beta]} = p^{[\gamma]}$$

stattfindet,

$$\mathfrak{f}(\alpha, \beta) = \gamma$$

setzt. Über diese Funktion ist folgendes zu sagen. Nach A I existiert, wenn *M unendlich* ist, $\mathfrak{f}(\alpha, \beta)$ für *jedes* Paar von nichtnegativen ganzen Zahlen α, β; ist M dagegen *endlich*, so darf man für α, β nur zwei beliebige Zahlen aus der Reihe

$$0, 1, \ldots, \mu$$

nehmen, wobei $p^{[\mu]}$ das oberste Element von M ist. Weiter bedingt A III, daß $\mathfrak{f}(\alpha, \beta)$ symmetrisch in den Argumenten ist. Nach A IV gilt ferner

$$\mathfrak{f}(\alpha, 0) = \alpha,$$

und A V stellt fest, daß aus

$$\alpha = \mathfrak{f}(\beta, \xi), \quad \beta = \mathfrak{f}(\alpha, \eta)$$

die Identität von α und β folgt. Schließlich findet nach Satz 7. 2

$$\alpha + \beta \geqq \mathfrak{f}(\alpha, \beta) \geqq \max(\alpha, \beta) \tag{8}$$

statt. Einer bestimmten Realisierung der Verknüpfung $\circ$ entspricht eine bestimmte Realisierung der Funktion $\mathfrak{f}(\alpha, \beta)$ und umgekehrt. Somit ist die

Aufgabe, alle Verknüpfungen $\bigcirc$ festzustellen, die dem System der Axiome A I bis A VI genügen, äquivalent mit der Aufgabe, alle Funktionen $\mathfrak{f}(\alpha, \beta)$ festzustellen, die die erwähnten (und noch weitere) Eigenschaften besitzen. Der durch die Relation (8) ausgedrückten Eigenschaft kommt insofern eine besondere Bedeutung zu, als die darin auftretenden Funktionen, nämlich die Majorante $\alpha + \beta$ und die Minorante $\max(\alpha, \beta)$, zwei Funktionen sind, die für $\mathfrak{f}(\alpha, \beta)$ genommen werden können. Das läßt sich leicht verifizieren. Im ersten Fall ist M eine *Semigruppe* in bezug auf die Verknüpfung $\bigcirc$, im zweiten Fall ein *Halbverband* in bezug auf $\bigcirc$.

§ 3.

Bestimmung von $x \bigcirc y$.

Wir beginnen mit einem einfachen Hilfssatz.

Satz 8. *Mit*

$$p^{[\xi]} \bigcirc p^{[\eta]} = p^{[\eta]}$$

gilt

$$p^{[\xi]} \bigcirc p^{[\eta+1]} = p^{[\eta+1]}$$

vorausgesetzt, daß $p^{[\eta+1]}$ *existiert.*

Beweis. Nach Satz 6 ist

$$p^{[\xi]} \bigcirc p^{[\eta+1]} \subseteq p^{[\eta+1]};$$

trivial ist

$$p^{[\xi]} \bigcirc p^{[\eta+1]} \supseteq p^{[\eta+1]}.$$

Aus den beiden Relationen folgt nach Satz 1. 2 die Behauptung.

Nun läßt sich leicht der erste *Hauptsatz* beweisen:

Satz 9. *Mit*

$$p^{[\xi]} \supseteq p^{[\varrho]} \supseteq p^{[\eta]},$$

wobei $p^{[\varrho]}$ *ein idempotentes Element ist, gilt*

$$p^{[\xi]} \bigcirc p^{[\eta]} = p^{[\xi]}.$$

Beweis. Wegen

$$p^{[\varrho]} \bigcirc p^{[\varrho]} = p^{[\varrho]}$$

findet nach Satz 8

$$p^{[\xi]} \bigcirc p^{[\varrho]} = p^{[\xi]}$$

statt. In Verbindung mit

$$p^{[\xi]} \bigcirc p^{[\varrho]} \supseteq p^{[\xi]} \bigcirc p^{[\eta]} \supseteq p^{[\xi]}$$

ergibt sich

$$p^{[\xi]} \supseteq p^{[\xi]} \bigcirc p^{[\eta]} \supseteq p^{[\xi]},$$

woraus die Behauptung nach Satz 1. 2 folgt.

Die Bedeutung des Satzes 9 beruht darauf, daß vermöge desselben der Wert des Produktes $x \bigcirc y$ für den Fall bestimmt wird, daß sich zwischen x und y mindestens ein idempotentes Element befindet. Der zweite Hauptsatz (Satz 12), dem wir uns nun zuwenden, liefert den Wert des Produktes für den Fall, daß sich zwischen den beiden Faktoren kein idempotentes Element befindet. Zunächst einige Hilfssätze.

Satz 10. 1. *Es seien $p^{[\varrho]}$ und $p^{[\sigma]}$ zwei idempotente Elemente, zwischen denen sich kein weiteres idempotentes Element befindet; es sei $\varrho < \sigma$. Ist dann ξ eine ganze Zahl derart, daß*

$$\varrho \leqq \xi < \sigma \tag{9}$$

stattfindet, so gilt

$$p^{[\xi]} \bigcirc p^{[\varrho+1]} = p^{[\xi+1]}. \tag{10}$$

Beweis. Wir wenden das Verfahren der vollständigen Induktion an. Nach Satz 9 gilt

$$p^{[\varrho]} \bigcirc p^{[\varrho+1]} = p^{[\varrho+1]},$$

so daß die Behauptung des Satzes für $\xi = \varrho$ zutrifft. Es sei nun α eine feste Zahl mit

$$\varrho \leqq \alpha < \sigma, \tag{11}$$

und (10) möge für

$$\xi = \varrho, \varrho + 1, \ldots, \alpha$$

richtig sein. Dann ist zu zeigen, daß bei der über (11) hinausgehenden Bedingung

$$\alpha + 1 < \sigma \tag{12}$$

die Relation (10) auch für $\xi = \alpha + 1$ zutrifft, d. h. daß

$$p^{[\alpha+1]} \bigcirc p^{[\varrho+1]} = p^{[\alpha+2]} \tag{13}$$

gilt.

Wir führen den Nachweis indirekt. Wäre (13) falsch, so müßte wegen

$$p^{[\alpha]} \bigcirc p^{[\varrho+1]} = p^{[\alpha+1]}$$

und Satz 6

$$p^{[\alpha+1]} \bigcirc p^{[\varrho+1]} = p^{[\alpha+1]} \tag{14}$$

sein. Folgendermaßen läßt sich aus (14) ein Widerspruch herausarbeiten.

Zunächst ersieht man aus (14), daß

$$\alpha + 1 \neq \varrho + 1$$

ist, denn andernfalls wäre $p^{[\alpha+1]}$ ein idempotentes Element, was wegen (12) ausgeschlossen ist. Da wegen (14) aber auch

$$\alpha + 1 \geqq \varrho + 1$$

sein muß, findet

$$\alpha \geqq \varrho + 1 \tag{15}$$

statt. Wir multiplizieren nun (14) mit $p^{[\varrho+1]}$, wodurch sich

$$p^{[\alpha+1]} \circ p^{[\varrho+1]} \circ p^{[\varrho+1]} = p^{[\alpha+1]} \circ p^{[\varrho+1]},$$

also nach (14)

$$p^{[\alpha+1]} \circ p^{[\varrho+1]} \circ p^{[\varrho+1]} = p^{[\alpha+1]}$$

ergibt. Wegen (15) dürfen wir das Produkt

$$p^{[\varrho+1]} \circ p^{[\varrho+1]}$$

gemäß (10) ausrechnen, wodurch wir

(16) $$p^{[\alpha+1]} \circ p^{[\varrho+2]} = p^{[\alpha+1]}$$

erhalten.

Aus (16) ersieht man, daß

$$\alpha + 1 \neq \varrho + 2$$

ist, denn andernfalls wäre $p^{[\alpha+1]}$ ein idempotentes Element, was, wie bereits bemerkt, ausgeschlossen ist. Da wegen (16) aber auch

$$\alpha + 1 \geqq \varrho + 2$$

sein muß, findet

(17) $$\alpha \geqq \varrho + 2$$

statt. Wir verfahren nun mit (16) wie soeben mit (14), d. h. wir multiplizieren (16) mit $p^{[\varrho+1]}$, wodurch sich wegen (14)

$$p^{[\alpha+1]} \circ p^{[\varrho+2]} \circ p^{[\varrho+1]} = p^{[\alpha+1]}$$

ergibt. Wegen (17) dürfen wir das Produkt

$$p^{[\varrho+2]} \circ p^{[\varrho+1]}$$

gemäß (10) ausrechnen, wodurch wir

(18) $$p^{[\alpha+1]} \circ p^{[\varrho+3]} = p^{[\alpha+1]}$$

erhalten.

In dieser Weise fahren wir fort. Hat man etwa die Relation

$$p^{[\alpha+1]} \circ p^{[\varrho+h]} = p^{[\alpha+1]}$$

erreicht, so folgt

$$\alpha \geqq \varrho + h$$

und daraus weiter

$$p^{[\alpha+1]} \circ p^{[\varrho+h+1]} = p^{[\alpha+1]}.$$

Das Verfahren kann also beliebig weit fortgesetzt werden und führt somit auf den Widerspruch, daß α größer als eine beliebig vorgegebene Zahl sein muß. Die Quelle des Widerspruchs ist (14). Diese Relation muß infolgedessen falsch und demnach (13) richtig sein. Damit ist der Satz in vollem Umfang bewiesen.

Der nächste Satz ist eine Verallgemeinerung des Satzes 10. 1.

Satz 10. 2. *Es seien* $p^{[\varrho]}$ *und* $p^{[\sigma]}$ *zwei idempotente Elemente, zwischen denen sich kein weiteres idempotentes Element befindet; es sei* $\varrho < \sigma$. *Sind dann* ξ, η *zwei ganze Zahlen derart, daß*

(19) $$\varrho \leqq \xi \leqq \sigma, \quad \varrho \leqq \eta \leqq \sigma, \quad \xi + \eta \leqq \varrho + \sigma$$

stattfindet, so gilt

(20) $$p^{[\xi]} \circ p^{[\eta]} = p^{[\xi+\eta-\varrho]}.$$

Beweis. Unbeschadet der Allgemeinheit darf $\xi \geqq \eta$ angenommen werden. Es werde

$$\xi + \eta = \zeta$$

gesetzt. Wegen (19) gilt

$$2\,\varrho \leqq \zeta \leqq \varrho + \sigma.$$

Da $p^{[\varrho]}$ idempotent ist, findet

$$p^{[\varrho]} \circ p^{[\varrho]} = p^{[\varrho]}$$

statt, so daß (20) für

$$\xi = \varrho, \ \eta = \varrho, \quad \text{d. h.} \ \zeta = 2\,\varrho$$

zutrifft. Es sei nun α eine feste Zahl mit

(21) $$2\,\varrho \leqq \alpha \leqq \varrho + \sigma,$$

und (20) möge für

$$\zeta = 2\,\varrho, \ 2\,\varrho + 1, \ \ldots, \ \alpha$$

richtig sein. Dann ist zu zeigen, daß bei der über (21) hinausgehenden Bedingung

(22) $$\alpha + 1 \leqq \varrho + \sigma$$

die Relation (20) auch für $\zeta = \alpha + 1$ zutrifft, d. h. daß

(23) $$p^{[\xi]} \circ p^{[\eta]} = p^{[\alpha+1-\varrho]}$$

gilt.

Der Nachweis verläuft folgendermaßen. Wegen

(24) $$\xi + \eta = \alpha + 1$$

kann nicht zugleich

$$\xi = 0, \quad \eta = 0$$

sein. Da wir $\xi \geqq \eta$ angenommen haben, ist infolgedessen $\xi > 0$ und somit $\xi - 1 \geqq 0$. Wegen (24) ist

(25) $$(\xi - 1) + \eta = \alpha,$$

wobei nach dem eben Bemerkten kein Summand negativ ist. Die Zerlegung (25) liefert gemäß (20)

$$p^{[\xi-1]} \circ p^{[\eta]} = p^{[\alpha-\varrho]}.$$

Wir multiplizieren mit $p^{[\varrho+1]}$, wodurch sich

$$p^{[\xi-1]} \circ p^{[\varrho+1]} \circ p^{[\eta]} = p^{[\alpha-\varrho]} \circ p^{[\varrho+1]} \tag{26}$$

ergibt. Nun ist nach (24)

$$\xi - 1 = \alpha - \eta \leqq \alpha - \varrho$$

und nach (22)

$$\alpha - \varrho \leqq \sigma - 1,$$

so daß

$$\xi - 1 < \sigma$$

ist; das Produkt

$$p^{[\xi-1]} \circ p^{[\varrho+1]}$$

darf also nach Satz 10. 1 ausgerechnet werden. Da ferner nach (22)

$$\alpha - \varrho < \sigma$$

ist, darf auch das Produkt

$$p^{[\alpha-\varrho]} \circ p^{[\varrho+1]}$$

nach Satz 10. 1 ausgerechnet werden. Dadurch geht aber (26) in die behauptete Relation (23) über.

Der folgende Satz läßt sich ohne das Schlußverfahren der vollständigen Induktion beweisen. Übrigens ist der Beweis nicht so subtil wie die vorhergehenden.

Satz 11. *Es seien $p^{[\varrho]}$ und $p^{[\sigma]}$ zwei idempotente Elemente, zwischen denen sich kein weiteres idempotentes Element befindet; es sei $\varrho < \sigma$. Sind dann ξ, η zwei ganze Zahlen derart, daß*

$$\varrho \leqq \xi \leqq \sigma, \quad \varrho \leqq \eta \leqq \sigma, \quad \xi + \eta \geqq \varrho + \sigma \tag{27}$$

stattfindet, so gilt

$$p^{[\xi]} \circ p^{[\eta]} = p^{[\sigma]}. \tag{28}$$

Beweis. Wegen (27) lassen sich — im allgemeinen sogar auf verschiedene Weisen — zwei ganze Zahlen ξ' und η' so wählen, daß

$$\varrho \leqq \xi' \leqq \xi, \quad \varrho \leqq \eta' \leqq \eta, \quad \xi' + \eta' = \varrho + \sigma \tag{29}$$

ist. Auf die Zahlen ξ' und η' darf aber der Satz 10. 2 angewendet werden, der

$$p^{[\xi']} \circ p^{[\eta']} = p^{[\sigma]}$$

liefert. Wegen (29) folgt weiter

$$p^{[\xi]} \circ p^{[\eta]} \supseteq p^{[\sigma]}. \tag{30}$$

Durch Multiplikation der beiden aus (27) fließenden Relationen

$$p^{[\xi]} \subseteqq p^{[\sigma]}, \quad p^{[\eta]} \subseteqq p^{[\sigma]}$$

ergibt sich andererseits

$$p^{[\xi]} \bigcirc p^{[\eta]} \subseteqq p^{[\sigma]}. \tag{31}$$

Aus (30) und (31) folgt nach Satz 1. 2 die Behauptung.

Die Sätze 10. 2 und 11 lassen sich ohne weiteres zusammenfassen; wir erhalten so den zweiten *Hauptsatz:*

Satz 12. *Es seien $p^{[\varrho]}$ und $p^{[\sigma]}$ zwei idempotente Elemente, zwischen denen sich kein weiteres idempotentes Element befindet; es sei $\varrho < \sigma$. Sind dann ξ, η zwei ganze Zahlen derart, daß*

$$\varrho \leqq \xi \leqq \sigma, \quad \varrho \leqq \eta \leqq \sigma$$

stattfindet, so gilt

$$p^{[\xi]} \bigcirc p^{[\eta]} = p^{[\min(\xi+\eta-\varrho,\, \sigma)]}.$$

Die vorhergehenden Ausführungen bedürfen noch einer Ergänzung. Wir haben bereits darauf hingewiesen, daß jedes *endliche* Holoid ein oberstes Element besitzt und daß dasselbe idempotent ist. Demgegenüber kann für ein *unendliches* Holoid der Fall eintreten, daß ein idempotentes Element $p^{[\varrho]}$ vorhanden ist derart, daß sich oberhalb von $p^{[\varrho]}$ kein weiteres idempotentes Element befindet. Dabei liegen oberhalb von $p^{[\varrho]}$ selbstverständlich noch beliebig viele Elemente des Holoids. Das zur Vorbereitung für den folgenden Satz.

Satz 13. *Es sei M ein unendliches lineares Holoid. M enthalte nur endlich viele idempotente Elemente. Es sei $p^{[\varrho]}$ das oberste idempotente Element von M. Sind dann ξ, η zwei ganze Zahlen derart, daß*

$$\varrho \leqq \xi, \quad \varrho \leqq \eta$$

stattfindet, so gilt

$$p^{[\xi]} \bigcirc p^{[\eta]} = p^{[\xi+\eta-\varrho]}.$$

Dieser Satz wird ähnlich wie die Sätze 10. 1 und 10. 2 bewiesen. Wir überlassen die Durchführung dem Leser.

Vermöge der Sätze 9, 12 und 13 läßt sich die Feinstruktur der linearen Holoide weitgehend übersehen. Insbesondere erkennt man, daß die idempotenten Elemente das Rückgrat der Holoide bilden. In der folgenden Erklärung legen wir diese zunächst nur bildlich genommene Bezeichnung offiziell fest.

Erklärung 9. Unter dem *Rückgrat* eines Holoids werde die Menge der idempotenten Elemente des Holoids verstanden.

Es sei N das Rückgrat des linearen Holoids M. Zu den Elementen von N gehört stets die untere Spitze von M. Besitzt M eine obere Spitze, so gehört auch diese zu den Elementen von N.

Wir wollen die Hauptergebnisse der Arbeit noch einmal zusammenstellen:

I. Ist $p^{[\varrho]}$ ein Element aus N und sind $p^{[\xi]}$, $p^{[\eta]}$ zwei Elemente aus M derart, daß

$$\xi \geqq \varrho \geqq \eta \quad \text{oder} \quad \xi \leqq \varrho \leqq \eta$$

stattfindet, so gilt

$$p^{[\xi]} \circ p^{[\eta]} = p^{[\max(\xi,\, \eta)]}.$$

II. Sind $p^{[\varrho]}$ und $p^{[\sigma]}$, wobei $\varrho < \sigma$ sei, zwei Elemente aus N, zwischen denen sich kein weiteres Element aus N befindet, und sind $p^{[\xi]}$, $p^{[\eta]}$ zwei Elemente aus M derart, daß

$$\varrho \leqq \xi \leqq \sigma, \quad \varrho \leqq \eta \leqq \sigma$$

stattfindet, so gilt

$$p^{[\xi]} \circ p^{[\eta]} = p^{[\min(\xi+\eta-\varrho,\, \sigma)]}.$$

III. (Nur für den Fall, daß M unendlich, N dagegen endlich ist.) Ist $p^{[\varrho]}$ das oberste Element von N und sind $p^{[\xi]}$, $p^{[\eta]}$ zwei Elemente aus M derart, daß

$$\varrho \leqq \xi, \quad \varrho \leqq \eta$$

stattfindet, so gilt

$$p^{[\xi]} \circ p^{[\eta]} = p^{[\xi+\eta-\varrho]}.$$

Zum Schluß noch zwei Bemerkungen. Erstens: Welche Elemente das Rückgrat von M bilden, wird durch das System der Axiome A I bis A VI in keiner Weise festgelegt. Oder anders ausgedrückt: Das genannte Axiomensystem ist insofern unvollständig, als es, wenn es ein bestimmtes Holoid definieren soll, durch genaue Festsetzungen hinsichtlich der *Anzahl* der idempotenten Elemente und *Einbettung* derselben in M ergänzt werden muß, wobei zu beachten ist, daß ganz beliebige Elemente von M zu idempotenten Elementen erhoben werden können. Oder noch anders: Zwei lineare Holoide sind dann und nur dann *isomorph*, wenn sie von derselben Ordnung sind, gleichviel idempotente Elemente besitzen und wenn die Verteilung der letzteren bei beiden Holoiden dieselbe ist. Das Gesicht eines Holoids, d. h. seine Individualität, wird also in letzter Instanz von den idempotenten Elementen geprägt.

Zweitens: In § 1 wurde darauf hingewiesen, daß jedem Holoid eine gewisse quadratische Tafel zugeordnet werden kann. Handelt es sich dabei um ein lineares Holoid, so empfiehlt es sich, bei der Konstruktion der Tafel einige Abänderungen vorzunehmen. So beginne man die Numerierung nicht mit 1, sondern mit 0; die Elemente von M seien also

$$a_0, \ldots, a_m,$$

wobei

$$a_\mu = p^{[\mu]} \qquad (\mu = 0, \ldots, m)$$

sei. Sodann schreibe man in die Felder der Tafel nicht die Elemente selbst, sondern nur deren Indizes. Beispielsweise gehört zu dem aus den sechs Elementen

$$p^{[0]}, \ldots, p^{[5]}$$

bestehenden linearen Holoid, dessen idempotente Elemente

$$p^{[0]},\ p^{[2]},\ p^{[5]}$$

sind, die folgende Tafel:

	0	1	2	3	4	5	
0	0	1	2	3	4	5	0
1	1	2	2	3	4	5	1
2	2	2	2	3	4	5	2
3	3	3	3	4	5	5	3
4	4	4	4	5	5	5	4
5	5	5	5	5	5	5	5
	0	1	2	3	4	5	

Fig. 4.

Fig. 4 stellt das Bild dieses Holoids dar; die besonders gekennzeichneten Punkte entsprechen den idempotenten Elementen.

(Eingegangen am 31. Juli 1942.)