## Werk

**Titel:** Mathematische Zeitschrift

**Ort:** Berlin

**Jahr:** 1942

**Kollektion:** Mathematica

**Werk Id:** PPN266833020_0048

**PURL:** http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN266833020_0048|LOG_0049

# Über den Flächeninhalt dehnungsbeschränkter Flächen.

Von

Georg Nöbeling in Erlangen.

## Einleitung.

Bei der Frage nach der Eindeutigkeit des Flächeninhalts verweist man gern auf die bekannte Arbeit von A. KOLMOGOROFF [1]), in welcher u. a. bewiesen wird, daß die von ihm axiomatisch eingeführten Maße — wir nennen sie kurz KOLMOGOROFF-Maße — für jede dehnungsbeschränkte Fläche [2]) zusammenfallen und gleich dem klassischen Integral für den Flächeninhalt sind. Damit wäre die Eindeutigkeitsfrage für die dehnungsbeschränkten Flächen erledigt, *wenn* die zahlreichen, von anderen Autoren angegebenen Flächenmaße KOLMOGOROFF-Maße wären. Dies ist aber keineswegs der Fall[3]): weder das JANZEN-Maß, noch das GROSSsche Minimalmaß, noch das integralgeometrische FAVARD-Maß ist ein KOLMOGOROFF-Maß (das HAUSDORFF-Maß ist ein KOLMOGOROFF-Maß; bei anderen Maßen ist diese Frage noch ungeklärt).

Bezüglich der Eindeutigkeitsfrage besteht also noch eine Lücke. Wir wollen sie ausfüllen, indem wir zeigen, daß alle genannten Maße, und dazu noch einige andere, für jede dehnungsbeschränkte Fläche zusammenfallen und gleich dem klassischen Integral sind. Dies ist — sogleich für die $k$-dimensionalen Flächen im $R_n$ durchgeführt — der wesentliche Inhalt der vorliegenden Arbeit[4]).

---

1) A. KOLMOGOROFF, Ein Beitrag zur Maßtheorie. Math. Annalen **107** (1933), S. 351—366.

2) Eine dehnungsbeschränkte Fläche ist ein dehnungsbeschränktes Bild $\pi(\widetilde{M}) = M$ eines abgeschlossenen Quadrates $\widetilde{M}$; dabei heißt eine Abbildung $\pi$ dehnungsbeschränkt, wenn für je zwei Punkte $p$ und $q$ des Urbildes die Abstandsungleichung $\overline{\pi(p), \pi(q)} \leqq c \cdot \overline{pq}$ gilt ($c$ eine Konstante). Die Dehnungsbeschränktheit ist gleichbedeutend mit der Rektifizierbarkeit im Sinne von H. LEBESGUE, d. h. der Beschränktheit der totalen Differenzenquotienten der die Abbildung $\pi$ vermittelnden Funktionen. Jede stetig differenzierbare Fläche ist dehnungsbeschränkt.

3) G. NÖBELING, Über die Flächenmaße im Euklidischen Raum. Erscheint demnächst in den Math. Annalen.

4) Wir haben der KOLMOGOROFF-Arbeit[1]) auch in methodischer Hinsicht vieles entnommen. Beispielsweise haben unsere Sätze 1 und 2 ihre genauen Analoga bei KOLMOGOROFF. Ebenso ist unser Hilfssatz einschließlich des Beweises fast derselbe wie der entscheidende Hilfssatz bei KOLMOGOROFF, dessen Beweis leider durch Druckfehler entstellt ist.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß die Voraussetzung der Dehnungsbeschränktheit vielleicht abgeschwächt oder durch eine andere ersetzt werden kann, daß aber irgendeine derartige Voraussetzung für die Eindeutigkeit des Flächeninhalts unentbehrlich ist. Denn für beliebige topologische, zweidimensionale Flächen (topologische Bilder der Quadratfläche) im Euklidischen $R_k$ fallen die verschiedenen Flächenmaße im allgemeinen nicht zusammen[3]).

## § 1.
## Die Sätze.

Es seien $R_n$ und $R_k$ ein $n$- bzw. $k$-dimensionaler Cartesischer Raum ($n > k$) mit rechtwinkligen Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ bzw. $y_1, \ldots, y_k$.

**Satz 1.** *Es sei $M = \pi(\widetilde{M}) \subset R_n$ ein dehnungsbeschränktes Bild einer analytischen*[5]) *Menge $\widetilde{M} \subset R_k$*[6]). *Dann haben für $M$ die $k$-dimensionalen Maße*[7]) *von* Janzen, Carathéodory, Gross, Hausdorff, Favard, Kolmogoroff *und* Gillespie *sämtlich denselben Wert $\mu(M)$.*

Die dehnungsbeschränkte Abbildung $\pi$ des Satzes 1 werde durch die Funktionen $x_i = x_i(y_1, \ldots, y_k)$ $(i = 1, \ldots, n)$ oder in vektorieller Schreibweise durch $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(\mathfrak{y})$ oder $\mathfrak{x} = \pi(\mathfrak{y})$ gegeben. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $\pi$ sofort in einer offenen Obermenge von $\widetilde{M}$, sogar im

---

[5]) Es sei $R$ ein metrischer Raum. Dann heißt eine Teilmenge $M$ von $R$ analytisch oder Suslinsch in $R$, wenn $M$ folgendermaßen darstellbar ist: Jedem System $n_1, \ldots, n_j$ endlich vieler natürlicher Zahlen sei eine offene Menge $M_{n_1 \ldots n_j} \subset R$ zugeordnet; zu jeder Folge $\nu = \{n_j\}$ natürlicher Zahlen werde der Durchschnitt $M_\nu = M_{n_1} \cdot M_{n_1 n_2} \ldots$ gebildet; dann ist $M = \sum M_\nu$, wobei über alle Folgen $\nu$ natürlicher Zahlen summiert wird. — Man kommt zu denselben analytischen Mengen, wenn man statt der offenen Mengen abgeschlossene Mengen benutzt. Außerdem kann man $M_{n_1} \supset M_{n_1 n_2} \supset \ldots$ annehmen (Monotonie des erzeugenden Systems). — Jede in $R$ Borelsche Menge ist analytisch in $R$. — Ist $R$ ein vollständiger, metrischer Raum und $A$ analytisch in $R$, so ist $A$ auch analytisch in jedem anderen, $A$ enthaltenden metrischen Raum; man nennt daher $A$ in diesem Fall absolut analytisch. Wir haben es im folgenden nur mit absolut analytischen Mengen zu tun. — Jede analytische Menge eines Euklidischen Raumes ist Lebesgue-meßbar. — Zur Theorie der analytischen Mengen vgl. z. B. F. Hausdorff, Mengenlehre, Leipzig 1927; H. Hahn, Reelle Funktionen, Leipzig 1932; N. Lusin, Leçons sur les ensembles analytiques, Paris 1930.

[6]) Wir treffen für alles weitere die folgende Verabredung: Bei der betrachteten Abbildung $\pi$ werden Bildmenge und Urbildmenge stets mit demselben Buchstaben bezeichnet; zur Unterscheidung trägt der Buchstabe der Urbildmenge das Zeichen $\sim$.

[7]) Zur Definition dieser Maße vgl. G. Nöbeling, Über die Länge der Euklidischen Kontinuen. Jahresbericht der DMV **52** (1942), S. 132 oder a. a. O.[3]), sowie die daselbst genannte Originalliteratur. Man überträgt die in den genannten beiden Arbeiten für $k = 1$ oder $k = 2$ angegebenen Definitionen ohne weiteres auf beliebiges $k$. Soweit die beiden Arbeiten die im folgenden von uns betrachteten Maße nicht enthalten, führen wir die Definitionen an den betreffenden Stellen der vorliegenden Arbeit an.

ganzen $R_k$, als definiert annehmen[8]). Dann sind auf einer maßgleichen Teilmenge $\widetilde{M}'$ von $\widetilde{M}$ die partiellen Ableitungen $\frac{\partial x_i}{\partial y_j}$ vorhanden und meßbar[9]). Dasselbe gilt infolgedessen auch für

$$D(\mathfrak{y}) = \sqrt{\sum \left(\frac{\partial(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})}{\partial(y_1, \ldots, y_k)}\right)^2},$$

wobei über alle Kombinationen $i_1 \ldots i_k$ von Indizes $\leqq n$ summiert wird. Auf $\widetilde{M} - \widetilde{M}'$ setzen wir $D(\mathfrak{y}) = 0$. Also ist das klassische Lebesgue-Integral

$$I(\widetilde{M}) = \int_{\widetilde{M}} D(\mathfrak{y})\, dy_1 \ldots dy_k \leqq +\infty$$

vorhanden.

**Satz 2.** *Es sei $M = \pi(\widetilde{M}) \subset R_n$ ein umkehrbar eindeutiges, dehnungsbeschränktes Bild einer analytischen Menge $\widetilde{M} \subset R_k$. Dann ist $\mu(M) = I(\widetilde{M})$.*

Nun sei $\widetilde{F}$ der $k$-dimensionale Einheitswürfel des $R_k$ und $F = \pi(\widetilde{F})$ ein eindeutiges, stetiges Bild $\subset R_n$ von $\widetilde{F}$. Dann heißt $F = \pi(\widetilde{F})$ eine stetige, $k$-dimensionale Fläche (gleichgültig, ob $F$ als Punktmenge $k$-dimensional ist oder nicht; maßgebend ist also die Dimension des Urbildes). Ist dabei die Abbildung $\pi$ dehnungsbeschränkt, so nennen wir auch die stetige Fläche $F = \pi(\widetilde{F})$ dehnungsbeschränkt.

**Satz 3.** *Es sei $F = \pi(\widetilde{F})$ eine stetige, $k$-dimensionale, dehnungsbeschränkte Fläche im $R_n$. Dann haben für $F$ auch die $k$-dimensionalen Flächenmaße von* Lebesgue, Peano *und* Radó *den Wert $I(\widetilde{F})$.*

## § 2.

## Ein Hilfssatz.

Zunächst führen wir folgende Bezeichnungen ein. Allgemein bezeichnen wir, wenn $L$ ein linearer Teilraum des $R_n$ ist, mit $\pi_L$ die Orthogonalprojektion in $L$ und setzen $\pi_L(N) = N_L$ für eine beliebige Menge oder einen Punkt $N$ des $R_n$.

**Hilfssatz.** Durch die Gleichungen $x_i = x_i(y_1, \ldots, y_k)$ $(i = 1, \ldots, n)$ sei eine dehnungsbeschränkte Abbildung $\pi$ des $R_k$ in den $R_n$ gegeben. Auf der kompakten Menge $\widetilde{P}$ des $R_k$ seien die Funktionen $x_i$ gleichmäßig total differen-

---

[8]) M. D. Kirszbraun, Über die zusammenziehenden und Lipschitzsche Transformationen. Fund. Math. **22** (1934), S. 77—108.

[9]) H. Rademacher, Über partielle und totale Differenzierbarkeit ... Math. Annalen **79** (1918), S. 340—359; vgl. auch O. Haupt u. G. Aumann, Differential- und Integralrechnung, Leipzig 1938, Bd. 3, S. 134.

zierbar[10]). Es sei $\mathfrak{y}_0$ ein Punkt von $\widetilde{P}$, $\mathfrak{x}_0 = \pi(\mathfrak{y}_0)$ sein Bild und $T$ der durch die $k$ Vektoren $\left\{\frac{\partial x_1}{\partial y_j}, \ldots, \frac{\partial x_n}{\partial y_j}\right\}$ $(j = 1, \ldots, k)$ im Punkt $\mathfrak{x}_0 = \pi(\mathfrak{y}_0)$ aufgespannte, höchstens $k$-dimensionale, lineare, tangentiale Teilraum des $R_n$. Weiter sei $\widetilde{Q}$ eine Teilmenge von $\widetilde{P}$; die obere Grenze der Abstände ihrer Punkte von $\mathfrak{y}_0$ heiße $d$; es sei $Q = \pi(\widetilde{Q})$. Schließlich sei ein $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gilt[11]):

(1) $m(Q_T) = I(\widetilde{Q}) + \delta \cdot m(\widetilde{Q})$ mit $|\delta| < \varepsilon$ für hinreichend kleines $d$.

Beweis. Wir beweisen gleichzeitig mit (1) noch eine zweite Behauptung. Es sei $E$ eine $k$-dimensionale Ebene des $R_n$ und $c(E)$ im Falle $\dim T = k$ der Faktor, mit dem sich die ($k$-dimensionalen) Inhalte der Teilmengen von $T$ bei Projektion in $E$ multiplizieren; im Falle $\dim T < k$ sei $c(E) = \frac{1}{\sqrt{l}}$ mit $l = \binom{n}{k}$. Die zweite Behauptung lautet dann:

(2) $m(Q_E) = c(E) \cdot I(\widetilde{Q}) + \delta \cdot m(\widetilde{Q})$ mit $|\delta| < \varepsilon$ für hinreichend kleines $d$.

Um (1) und (2) zu beweisen, bezeichnen wir mit $\alpha$ die affine Abbildung

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{x}_0 + (\mathfrak{y} - \mathfrak{y}_0) \cdot \frac{\partial \mathfrak{x}(\mathfrak{y}_0)}{\partial \mathfrak{y}}, \tag{3}$$

wobei ein Vektor als einzeilige Matrix aufzufassen ist, $\frac{\partial \mathfrak{x}(\mathfrak{y}_0)}{\partial \mathfrak{y}}$ die $k$-zeilige und $n$-spaltige Funktionalmatrix $\left(\frac{\partial \mathfrak{x}_i}{\partial \mathfrak{y}_j}\right)$ an der Stelle $\mathfrak{y}_0$ bedeutet und das Matrizenprodukt $(\mathfrak{y} - \mathfrak{y}_0) \cdot \frac{\partial \mathfrak{x}(\mathfrak{y}_0)}{\partial \mathfrak{y}}$ Zeile mal Spalte zu nehmen ist. Für ein beliebiges

---

[10]) Das heißt folgendes: Erstens existieren in jedem Punkt $\mathfrak{y} = (y_1, \ldots, y_k)$ von $\widetilde{P}$ die partiellen Ableitungen $\frac{\partial x_i}{\partial y_j}$, deren $k$-zeilige und $n$-spaltige Matrix wir mit $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \mathfrak{y}}$ bezeichnen. Zweitens existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart, daß für je zwei Punkte $\mathfrak{y}' = (y'_1, \ldots, y'_k) \in R_k$, $\mathfrak{y} = (y_1, \ldots, y_k) \in \widetilde{P}$ mit dem Abstand $|\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}| < \delta$ und ihre Bildpunkte $\mathfrak{x}' = (x'_1, \ldots, x'_n)$, $\mathfrak{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ gilt:

$$x'_i = x_i + \sum_{j=1}^{k} (y'_j - y_j) \frac{\partial x_i}{\partial y_j} + d_i \sqrt{\sum_{j=1}^{k} (y'_j - y_j)^2}$$

mit $\sqrt{\Sigma d_i^2} < \varepsilon$ oder vektoriell:

(*) $\mathfrak{x}' = \mathfrak{x} + (\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}) \cdot \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \mathfrak{y}} + \mathfrak{d} \cdot |\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}|$ mit $|\mathfrak{d}| < \varepsilon$ für $|\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}| < \delta$, $\mathfrak{y} \in \widetilde{P}$

[vgl. die Erläuterungen im Text zu (3)]. — Wählt man $y'_j = y_j + h$ für ein festes $j$ und $y'_j = y_j$ für die übrigen $j$, so ergibt sich $\frac{1}{h}(x'_i - x_i) = \frac{\partial x_i}{\partial y_j} + d_i$ mit $\sqrt{\Sigma d_i^2} < \varepsilon$ für $|h| < \delta$ und beliebiges $\mathfrak{y} \in \widetilde{P}$; also ist $\frac{\partial x_i}{\partial y_j}$ stetig auf $\widetilde{P}$.

[11]) $m$ bedeutet das äußere Lebesguesche Maß im $R_k$ bzw. einer $k$-dimensionalen Ebene des $R_n$.

$\varepsilon_1 > 0$ existiert dann ein $d(\varepsilon_1) > 0$ derart, daß für je zwei Punkte $\mathfrak{y}'$ und $\mathfrak{y}''$ aus $\widetilde{P}$ mit Abständen $\leqq d(\varepsilon_1)$ von $\mathfrak{y}_0$ die Ungleichung

$$(4) \qquad |\mathfrak{x}'_E - \mathfrak{x}''_E| = |\mathfrak{z}'_E - \mathfrak{z}''_E| + \zeta \cdot |\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}''| \quad \text{mit} \quad |\zeta| < \varepsilon_1$$

gilt [12]).

Wir unterscheiden weiter zwei Fälle.

Erster Fall: $\dim T_E = k$. Dann ist auch $\dim T = k$, also $D(\mathfrak{y}_0) \neq 0$. Außerdem ist $c(E) > 0$. Ist speziell $E = T$, so ist $c(T) = 1$ und (2) ist identisch mit (1). Wir brauchen also nur (2) zu beweisen.

Aus (4) folgt, da wegen $D(\mathfrak{y}_0) \neq 0$ und $\dim T_E = k$ die affine Abbildung $\alpha_E = \pi_E \alpha$ nicht ausgeartet ist und daher der Quotient $|\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}''| / |\mathfrak{z}'_E - \mathfrak{z}''_E|$ eine endliche obere Schranke $t$ besitzt, die Ungleichung

$$(5) \qquad (1 - t\varepsilon_1) \cdot |\mathfrak{z}'_E - \mathfrak{z}''_E| \leqq |\mathfrak{x}'_E - \mathfrak{x}''_E| \leqq (1 + t\varepsilon_1) \cdot |\mathfrak{z}'_E - \mathfrak{z}''_E|.$$

Da der Lebesguesche Inhalt $m$ bei dehnungsloser Abbildung nicht größer wird[1]), also bei dehnungsbeschränkter Abbildung sich höchstens mit der $k$-ten Potenz der Dehnungsschranke multipliziert, folgt aus (5), wenn $d < d(\varepsilon_1)$ ist:

$$(1 - t\varepsilon_1)^k \cdot m(\alpha_E(\widetilde{Q})) \leqq m(Q_E) \leqq (1 + t\varepsilon_1)^k \cdot m(\alpha_E(\widetilde{Q})),$$

also

$$(6) \qquad m(Q_E) = m(\alpha_E(\widetilde{Q})) + \iota \cdot m(\alpha_E(\widetilde{Q})) \quad \text{mit} \quad |\iota| < (1 + t\,\varepsilon_1)^k - 1 = \varepsilon_2.$$

Nun ist $\alpha_E(\widetilde{Q}) = \pi_E \alpha(\widetilde{Q})$ und daher $m(\alpha_E(\widetilde{Q})) = c(E) \cdot m(\alpha(\widetilde{Q}))$. Da $\alpha$ die affine Abbildung (3) ist, gilt weiter $m(\alpha(\widetilde{Q})) = m(\widetilde{Q}) \cdot D(\mathfrak{y}_0)$. Wegen der Stetigkeit von $D(\mathfrak{y})$ auf $\widetilde{P}$[10]) ist $m(\widetilde{Q}) \cdot D(\mathfrak{y}_0) = I(\widetilde{Q}) + \varkappa \cdot m(\widetilde{Q})$ mit $|\varkappa| < \varepsilon_2$ für hinreichend kleines $d$. Hieraus und aus (6) folgt, wenn man $\varepsilon_1$ und damit $\varepsilon_2$ hinreichend klein wählt, sofort die Behauptung (2).

Zweiter Fall: $\dim T_E < k$. Dann sind zwei Unterfälle möglich: $\dim T < k$ und $\dim T = k$. Der erste Unterfall ist gleichbedeutend mit $D(\mathfrak{y}_0) = 0$, woraus wegen der Stetigkeit von $D(\mathfrak{y})$ auf $\widetilde{P}$ die Gleichung $I(\widetilde{Q}) = \delta_1 \cdot m(\widetilde{Q})$ mit $|\delta_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ für jedes hinreichend kleine $d$ folgt; hieraus ergibt sich (1) wegen $m(Q_T) = 0$, während für (2) noch $m(Q_E) = \delta_2 \cdot m(\widetilde{Q})$ mit $|\delta_2| < \frac{\varepsilon}{2}$ zu beweisen ist. Der zweite Unterfall ist, weil dann $E \neq T$ ist,

---

[12]) Aus (*) folgt $\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}'' = (\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}'') \cdot \dfrac{\partial \mathfrak{x}(\mathfrak{y}'')}{\partial \mathfrak{y}} + \mathfrak{d} \cdot |\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}''|$ mit $|\mathfrak{d}| < \varepsilon_1$, aus (3) folgt $\mathfrak{z}' - \mathfrak{z}' = (\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}'') \cdot \dfrac{\partial \mathfrak{x}(\mathfrak{y}_0)}{\partial \mathfrak{y}}$. Also ist $\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}'' = (\mathfrak{z}' - \mathfrak{z}'') + \mathfrak{d} \cdot |\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}''| + (\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}'') \cdot \left(\dfrac{\partial \mathfrak{x}(\mathfrak{y}'')}{\partial \mathfrak{y}} - \dfrac{\partial \mathfrak{x}(\mathfrak{y}_0)}{\partial \mathfrak{y}}\right)$. Wegen der Stetigkeit von $\dfrac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \mathfrak{y}}$ folgt hieraus $\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}'' = (\mathfrak{z}' - \mathfrak{z}'') + \mathfrak{e} \cdot |\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}''|$ mit $|\mathfrak{e}| < \varepsilon_1$ für hinreichend nahe bei $\mathfrak{y}_0$ gelegene Punkte $\mathfrak{y}'$ und $\mathfrak{y}''$ aus $\widetilde{P}$. Und dies ergibt durch Projektion in $E$ schließlich $\mathfrak{x}'_E - \mathfrak{x}''_E = (\mathfrak{z}'_E - \mathfrak{z}''_E) + \mathfrak{e}_E \cdot |\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}''|$ mit $|\mathfrak{e}_E| < \varepsilon_1$, woraus (4) folgt.

für (1) bedeutungslos, während (2) wegen $c(E) = 0$ in $m(Q_E) = \delta \cdot m(\widetilde{Q})$ übergeht. Wir haben also, wenn wir $\varepsilon$ statt $\frac{\varepsilon}{2}$ schreiben, unter der Voraussetzung $\dim T_E < k$ insgesamt nur zu zeigen:

(7) $$m(Q_E) = \delta \cdot m(\widetilde{Q}) \text{ mit } |\delta| < \varepsilon \text{ für hinreichend kleines } d.$$

$T_E$ ist eine $i$-dimensionale Teilebene $E_i$ von $E$, wobei $i = \dim T_E$, also $i < k$ ist. Zum Beweis von (7) wählen wir im $R_n$ ein im allgemeinen schiefwinkliges Koordinatensystem $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ so, daß erstens $E_i$ die Gleichungen $\bar{x}_{i+1} = \cdots = \bar{x}_n = 0$ und $E$ die Gleichungen $\bar{x}_{k+1} = \cdots = \bar{x}_n = 0$ hat, zweitens für $j = i+1, \ldots, n$ die $\bar{x}_j$-Achse zu $E_i$ senkrecht ist und drittens die affine Abbildung $\alpha_E = \pi_E \alpha$ in der Form

$$\begin{aligned} \bar{x}_j &= \lambda_j y_j \qquad (j = 1, \ldots, i) \quad (\lambda_j \neq 0)\\ \bar{x}_j &= 0 \qquad (j = i+1, \ldots, n) \end{aligned}$$

geschrieben werden kann. Für beliebiges $\varrho > 0$ sei nun $\mathfrak{z}_\varrho = \beta_\varrho(\mathfrak{y})$ die nicht ausgeartete, affine Abbildung

$$\begin{aligned} \bar{x}_j &= \lambda_j y_j \qquad (j = 1, \ldots, i)\\ \bar{x}_j &= \varrho y_j \qquad (j = i+1, \ldots, k)\\ \bar{x}_j &= 0 \qquad (j = k+1, \ldots, n). \end{aligned}$$

Der Quotient $|\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}''| / |\mathfrak{z}'_\varrho - \mathfrak{z}''_\varrho|$ hat eine endliche obere Schranke $t_\varrho$. Mithin gilt nach (4) für je zwei Punkte $\mathfrak{y}'$ und $\mathfrak{y}''$ aus $\widetilde{P}$ mit Abständen $\leqq d(\varepsilon_1)$ von $\mathfrak{y}_0$:

$$\begin{aligned} |\mathfrak{x}'_E - \mathfrak{x}''_E| &\leqq |\mathfrak{z}'_E - \mathfrak{z}''_E| + \varepsilon_1 \cdot |\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}''| \leqq |\mathfrak{z}'_\varrho - \mathfrak{z}''_\varrho| + \varepsilon_1 \cdot |\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}''|\\ &\leqq |\mathfrak{z}'_\varrho - \mathfrak{z}''_\varrho| + t_\varrho\, \varepsilon_1 \cdot |\mathfrak{z}'_\varrho - \mathfrak{z}''_\varrho| = (1 + t_\varrho \varepsilon_1) \cdot |\mathfrak{z}'_\varrho - \mathfrak{z}''_\varrho|. \end{aligned}$$

Also gilt:

(8) $$m(Q_E) \leqq (1 + t_\varrho \varepsilon_1)^k \cdot m(\beta_\varrho(\widetilde{Q})) \quad \text{für } d \leqq d(\varepsilon_1).$$

Ist nun $\varrho_0 > 0$ hinreichend klein, so gilt $m(\beta_{\varrho_0}(\widetilde{N})) \leqq m(\widetilde{N})$ für jede Menge $\widetilde{N}$ des $R_k$. Weiter gilt $m(\beta_\varrho(\widetilde{N})) \leqq m(\beta_{\varrho_0}(\widetilde{N}))$ für jedes $\varrho < \varrho_0$. Wir setzen $t_{\varrho_0} = t$. Aus (8) folgt dann $m(Q_E) \leqq m(\beta_\varrho(\widetilde{Q})) + \iota \cdot m(\widetilde{Q})$ mit $|\iota| < (1 + t\varepsilon_1)^k - 1 = \varepsilon_2$ für $\varrho < \varrho_0$ und $d < d(\varepsilon_1)$. Wegen $\lim\limits_{\varrho \to 0} m(\beta_\varrho(\widetilde{Q})) = 0$ folgt hieraus weiter $m(Q_E) \leqq \iota \cdot m(\widetilde{Q})$ mit $|\iota| < \varepsilon_2$ für $d < d(\varepsilon_1)$. Dies ergibt (7), wenn man $\varepsilon_1$ und damit $\varepsilon_2$ hinreichend klein wählt.

## § 3.

### Beweis des Satzes 2.

3. 1. Da das Integral $I(\widetilde{M})$ unverändert bleibt, wenn man den Raum $R_k$ einer Ähnlichkeitstransformation unterwirft, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit die [auf ganz $R_k$ fortgesetzte[8])] Abbildung $\pi$ als dehnungslos annehmen. Außerdem können wir $\widetilde{M}$ und $M$ als beschränkt annehmen.

Es sei ein $\varepsilon$ mit $0 < \varepsilon < 1$ gegeben. Nach bekannten Sätzen enthält dann $\widetilde{M}$ eine (in sich) kompakte Menge $\widetilde{P}$ mit

(9) $$m(\widetilde{M} - \widetilde{P}) < \varepsilon,$$

auf welcher die Funktionen $x_i$ gleichmäßig total differenzierbar sind[9]). Dann sind die partiellen Ableitungen $\frac{\partial x_i}{\partial y_j}$ und damit $D(\mathfrak{y})$ auf $\widetilde{P}$ stetig[10]).

Wegen der Dehnungslosigkeit der Abbildung $\pi$ sind die partiellen Ableitungen $\frac{\partial x_i}{\partial y_j}$ auf $\widetilde{P}$ beschränkt. Also ist auch $D(\mathfrak{y})$ auf $\widetilde{P}$ beschränkt:

(10) $$D(\mathfrak{y}) < s.$$

Hieraus und aus (9) folgt

(11) $$I(\widetilde{M} - \widetilde{P}) < \varepsilon \cdot s.$$

Aus der gleichmäßigen Stetigkeit von $D(\mathfrak{y})$ auf $\widetilde{P}$ folgt die Existenz eines $e > 0$ mit folgender Eigenschaft: für jede Lebesgue-meßbare Teilmenge $\widetilde{Q}$ von $\widetilde{P}$ mit einem Durchmesser $\leqq e$ ist

(12) $$D(\mathfrak{y}) \cdot m(\widetilde{Q}) = I(\widetilde{Q}) + \eta \cdot m(\widetilde{Q}) \quad \text{mit} \quad |\eta| < \varepsilon.$$

Die vorstehenden Festsetzungen und Beziehungen gelten für die sämtlichen folgenden Nummern 3. 2 bis 3. 7.

Wir beweisen nun die Behauptung des Satzes 2 nacheinander für die einzelnen Maßbegriffe.

3. 2. Die $k$-dimensionalen Kolmogoroff-Maße $\mu_K$ im $R_n$[7]) genügen dem Satz 2, wie von A. Kolmogoroff selbst bewiesen wurde[1]). Also gilt:

(13) $$\mu_K(M) = I(\widetilde{M}).$$

3. 3. Das $k$-dimensionale Hausdorff-Maß $\mu_H$ im $R_n$[7]) ist ein Kolmogoroff-Maß. Denn es sind die folgenden vier Axiome erfüllt, durch welche die Kolmogoroff-Maße definiert sind; dabei seien $A$ bzw. $A_i$ sämtlich analytische Mengen. $\alpha$) Aus $A \subset \sum A_i$ folgt $\mu_H(A) \leqq \sum \mu_H(A_i)$. Dies folgt unmittelbar aus der Definition von $\mu_H$. — $\beta$) Aus $A_i \subset A$ und $A_j A_h = 0$ für $j \neq h$ folgt $\sum \mu_H(A_i) \leqq \mu_H(A)$. Es gibt wegen $A_1 A_2 = 0$ zwei Borelsche Mengen $B_1 \supset A_1$ und $B_2 \supset A_2$ mit $B_1 B_2 = 0$[13]). Die Menge $B_1$ ist meßbar bzgl. $\mu_H$, da $\mu_H$ ein äußeres Maß im Sinne von C. Carathéodory ist[14]). Also ist $\mu_H(A_1 + A_2) = \mu_H((A_1 + A_2) \cdot B_1) + \mu_H((A_1 + A_2) - B_1) = \mu_H(A_1) + {} + \mu_H(A_2)$. Analog zeigt man durch vollständige Induktion, daß für jedes natürliche $i$ die Gleichung $\mu_H(A_1 + \cdots + A_i) = \mu_H(A_1) + \cdots + \mu_H(A_i)$ gilt. Wegen $A_1 + \cdots + A_i \subset A$ ist $\mu_H(A_1 + \cdots + A_i) \leqq \mu_H(A)$. Also folgt $\mu_H(A_1) + \cdots + \mu_H(A_i) \leqq \mu_H(A)$. Dies gilt für jedes $i$. Hieraus folgt $\beta$).

---

[13]) Vgl. z. B. H. Hahn, a. a. O.[5]), S. 369.

[14]) C. Carathéodory, Vorlesungen über reelle Funktionen, Berlin 1918. S. 238.

— $\gamma$) Ist $A$ ein dehnungsloses Bild von $A'$, so ist $\mu_H(A) \leqq \mu_H(A')$. Denn für jede Teilmenge $C'$ von $A'$ ist der Radius der Pferchkugel (d. h. der kleinsten $C'$ enthaltenden $n$-dimensionalen, abgeschlossenen Kugel) nicht größer als der Radius der Pferchkugel der Bildmenge $C$ von $C'$[8]). — $\delta$) Für den $k$-dimensionalen Einheitswürfel $W$ ist $\mu_H(W) = 1$. Denn für jede Menge $M$ des $E_k$ ist $\mu_H(M) = m(M)$.

Hiernach folgt aus (13) als Spezialfall:

$$\mu_H(M) = I(\widetilde{M}). \tag{14}$$

3. 4. Das $k$-dimensionale Carathéodory-Maß $\mu_C$ und das $k$-dimensionale Groß-Maß $\mu_G$ im $R_n$[7]). Zunächst ist

$$\mu_C(L) \leqq \mu_H(L) \quad \text{für jede Menge } L \text{ des } R_n, \tag{15}$$

da bei der Definition von $\mu_H$ weniger Mengen (nämlich nur Kugeln) für die Überdeckung von $L$ zugelassen sind als bei der Definition von $\mu_C$. Weiter gilt

$$\mu_G(L) \leqq \mu_C(L), \tag{16}$$

wie aus der Definition von $\mu_G$ auf Grund der Tatsache folgt, daß für jede Teilmenge $L'$ von $L$ und die Projektion $L'_E$ von $L'$ in eine $k$-dimensionale Ebene $E$ die Ungleichung $m(L'_E) = \mu_C(L'_E) \leqq \mu_C(L')$ gilt.

Aus (14) bis (16) folgt

$$\mu_G(M) \leqq \mu_C(M) \leqq I(\widetilde{M}). \tag{17}$$

Zum Beweis der umgekehrten Ungleichung bemerken wir zunächst:

$$\mu_G(M - P) < \varepsilon. \tag{18}$$

Denn ist $L$ eine beliebige Teilmenge von $M - P$, $\widetilde{L}$ das $\pi$-Urbild von $L$ in $\widetilde{M} - \widetilde{P}$ und $L_E$ die Projektion von $L$ in eine $k$-dimensionale Ebene $E$, so ist $L_E$ ein dehnungsloses Bild von $\widetilde{L}$ und daher $m(L_E) \leqq m(\widetilde{L})$[1]); hieraus folgt (18) auf Grund von (9).

Nach unserem Hilfssatz und dem Überdeckungssatz von Vitali existieren endlich oder abzählbar unendlich viele Kugeln $\widetilde{K}_1, \widetilde{K}_2, \ldots$ im $R_k$, deren Mittelpunkte $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \ldots$ in $\widetilde{P}$ liegen, so daß, wenn wir $\widetilde{K}_i \widetilde{P} = \widetilde{Q}_i$, $\pi(\widetilde{Q}_i) = Q_i$ setzen und mit $T_i$ die Tangentialebene im Punkte $\mathfrak{x}_i = \pi(\mathfrak{y}_i)$ bezeichnen, folgendes gilt:

$$\widetilde{Q}_i \cdot \widetilde{Q}_j = 0 \qquad \text{für } i \neq j; \tag{19}$$

$$\widetilde{P} = \Sigma \widetilde{Q}_i + \widetilde{N} \qquad \text{mit } m(\widetilde{N}) = 0; \tag{20}$$

$$m((Q_i)_{T_i}) = I(\widetilde{Q}_i) + \delta_i \cdot m(\widetilde{Q}_i), \quad |\delta_i| \leqq \varepsilon. \tag{21}$$

Hieraus folgt durch Addition

$$\sum_i m((Q_i)_{T_i}) = I(\widetilde{P}) + \delta \cdot m(\widetilde{P}), \quad |\delta| \leqq \varepsilon.$$

Da $(Q_i)_{T_i}$ die Projektion von $Q_i$ in $T_i$ ist, gilt $m((Q_i)_{T_i}) \leqq \mu_G(Q_i)$. Da $Q_i \subset P$ und $Q_i \cdot Q_j = 0$ gilt [letzteres wegen (19) und der Eineindeutigkeit der Abbildung $\pi$], so ist $\sum \mu_G(Q_i) \leqq \mu_G(P)$. Also ist

$$I(\widetilde{P}) + \delta \cdot m(\widetilde{P}) \leqq \mu_G(P).$$

Weil $\varepsilon$ beliebig klein wählbar ist, folgt wegen (11) $I(\widetilde{M}) \leqq \mu_G(M)$. Hieraus und (17) folgt.

$$\mu_G(M) = \mu_C(M) = I(\widetilde{M}). \tag{22}$$

3. 5. Das $(n-1)$-dimensionale GILLESPIE-Maß $\mu_{Gi}$ im $R_n$. Die Definition dieses Maßes lautet genau so wie die des $(n-1)$-dimensionalen CARATHÉODORY-Maßes $\mu_C$[7]), nur verwendet man an Stelle der $(n-1)$-dimensionalen Durchmesser $d^{(n-1)}(U_i)$ der überdeckenden konvexen Mengen $U_i$ deren halbe $(n-1)$-dimensionale Oberflächen $\frac{1}{2} O(U_i)$.

Da stets $d^{(n-1)}(U_i) \leqq \frac{1}{2} O(U_i)$ ist, gilt wegen (22):

$$\mu_{Gi}(M) \geqq I(\widetilde{M}). \tag{23}$$

Zum Beweis der umgekehrten Ungleichung sei $\mathfrak{y}_0$ ein beliebiger Punkt von $\widetilde{P}$ und $\mathfrak{x}_0$ sein Bild in $P$. Wegen der gleichmäßigen totalen Differenzierbarkeit der Abbildung $\mathfrak{x} = \pi(\mathfrak{y})$ auf $\widetilde{P}$ gilt, wenn wir wieder mit $\alpha$ die affine Abbildung $\mathfrak{z} = \mathfrak{x}_0 + (\mathfrak{y} - \mathfrak{y}_0) \cdot \frac{\partial \mathfrak{x}(\mathfrak{y}_0)}{\partial \mathfrak{y}}$ bezeichnen, für die Abstände $|\mathfrak{x} - \mathfrak{z}|$ der Bilder $\mathfrak{x} = \pi(\mathfrak{y})$ und $\mathfrak{z} = \alpha(\mathfrak{y})$ der Punkte $\mathfrak{y}$ aus $\widetilde{P}$ die Beziehung $|\mathfrak{x} - \mathfrak{z}| = o(|\mathfrak{y} - \mathfrak{y}_0|)$[15]). Hieraus folgt: Ist $\widetilde{K} \subset R_{n-1}$ eine hinreichend kleine Kugel mit dem Mittelpunkt $\mathfrak{y}_0$, $a$ die obere Grenze der Abstände $|\mathfrak{x} - \mathfrak{z}|$ für alle Punkte $\mathfrak{y}$ aus $\widetilde{Q} = \widetilde{K}\,\widetilde{P}$ und $U$ die abgeschlossene, konvexe Menge aller Punkte des $R_k$ mit Abständen $\leqq a$ von dem Ellipsoid $\alpha(\widetilde{K})$, so hat $U$ einen Durchmesser $< \varepsilon$, enthält das Bild $Q = \pi(\widetilde{Q})$ von $\widetilde{Q}$ und es besteht die Beziehung $\frac{1}{2} O(U) = m(\alpha(\widetilde{K})) + o(m(\widetilde{K}))$.

Also existieren nach dem Überdeckungssatz von VITALI endlich oder abzählbar unendlich viele, paarweise fremde Kugeln $\widetilde{K}_1, \widetilde{K}_2, \ldots$ im $R_{n-1}$ mit den Mittelpunkten $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \ldots$ in $\widetilde{P}$, so daß, wenn wir $\widetilde{K}_i \widetilde{P} = \widetilde{Q}_i$ und $\pi(\widetilde{Q}_i) = Q_i$ setzen und zu jedem $Q_i$ wie vorhin eine konvexe Menge $U_i \supset Q_i$ mit einem Durchmesser $< \varepsilon$ konstruieren, folgendes gilt:

$$\widetilde{Q}_i \widetilde{Q}_j = 0 \quad \text{für } i \neq j; \tag{24}$$

$$\widetilde{P} = \sum \widetilde{Q}_i + \widetilde{N}, \quad m(\widetilde{N}) = 0; \tag{25}$$

$$\sum m(\widetilde{K}_i) \leqq m(\widetilde{P}) + \varepsilon; \tag{26}$$

$$\tfrac{1}{2} O(U_i) = m(\alpha(\widetilde{K}_i)) + \delta_i \cdot m(\widetilde{K}_i), \quad |\delta_i| < \varepsilon; \tag{27}$$

$$m(\widetilde{Q}_i) \cdot D(\mathfrak{y}_i) = I(\widetilde{Q}_i) + \bar{\delta}_i \cdot m(\widetilde{Q}_i), \quad |\bar{\delta}_i| < \varepsilon. \tag{28}$$

[Zu (28) beachte man, daß $D(\mathfrak{y})$ in $\widetilde{P}$ gleichmäßig stetig ist.]

[15]) Z. B. nach Anm. [10]), Gleichung (*), worin man $\mathfrak{x}'$ durch $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}$ durch $\mathfrak{x}_0$ ersetze.

Nach (26) und (27), sowie wegen $\widetilde{P} \subset \widetilde{M}$ ist

(29) $$\sum \tfrac{1}{2} O(U_i) = \sum m(\alpha(\widetilde{K}_i)) + \delta \cdot (m(\widetilde{M}) + \varepsilon), \quad |\delta| < \varepsilon.$$

Weiter ist

$$m(\alpha(\widetilde{K}_i)) = m(\widetilde{K}_i) \cdot D(\mathfrak{y}_i),$$

also

$$\begin{aligned}\sum m(\alpha(\widetilde{K}_i)) &= \sum m(\widetilde{K}_i) \cdot D(\mathfrak{y}_i) \\ &= \sum m(\widetilde{Q}_i) \cdot D(\mathfrak{y}_i) + \varepsilon \cdot s \text{ wegen (10), (25) und (26)} \\ &= I(\widetilde{P}) + \eta \cdot m(\widetilde{P}) + \varepsilon \cdot s, \ |\eta| < \varepsilon \text{ wegen (24), (25) und (28)} \\ &= I(\widetilde{M}) + \bar{\eta} \cdot m(\widetilde{M}) + 2\,\varepsilon s, \ |\bar{\eta}| < \varepsilon \text{ wegen (11) und } \widetilde{P} \subset \widetilde{M}.\end{aligned}$$

Also ist wegen (29)

(30) $$\sum \tfrac{1}{2} O(U_i) = I(\widetilde{M}) + (\delta + \bar{\eta}) \cdot m(\widetilde{M}) + (\delta + 2\,s) \cdot \varepsilon, \ |\delta| < \varepsilon, |\bar{\eta}| < \varepsilon.$$

Die Menge $\widetilde{M} - \sum \widetilde{Q}_i$ ist nach (9) und (25) eine Menge des $R_{n-1}$ mit $m(\widetilde{M} - \sum \widetilde{Q}_i) < \varepsilon$. Also können wir sie überdecken durch abzählbar viele Kugeln $\widetilde{L}_1, \widetilde{L}_2, \ldots$ mit Durchmessern $< \frac{\varepsilon}{2}$ und einem Gesamtinhalt $< \varepsilon$. Für jedes $i$ ist dann wegen der Dehnungslosigkeit von $\pi$ die Menge $\pi((\widetilde{M} - \sum \widetilde{Q}_i) \cdot \widetilde{L}_j)$ enthalten in einer Kugel $V_j$, deren Durchmesser höchstens doppelt so groß ist wie der Durchmesser von $\widetilde{L}_j$. Die Kugeln $V_1, V_2, \ldots$ überdecken die Menge $M - \sum Q_i$, haben Durchmesser $< \varepsilon$ und es gilt

(31) $$\sum \tfrac{1}{2} O(V_i) < c \cdot \varepsilon,$$

wobei $c$ eine von $\varepsilon$ unabhängige Konstante ist.

Insgesamt überdecken die konvexen Mengen $U_1, U_2, \ldots$ und $V_1, V_2, \ldots$ mit Durchmessern $< \varepsilon$ die ganze Menge $M$. Da $\varepsilon$ eine beliebig kleine positive Zahl ist, folgt aus (30) und (31) die Ungleichung $\mu_{Gi}(M) \leqq I(\widetilde{M})$. Zusammen mit (23) ergibt dies die Gleichung

(32) $$\mu_{Gi}(M) = I(\widetilde{M}).$$

3.6. Das $k$-dimensionale Favard-Maß $\mu_F$ im $R_n$. Wir geben zunächst seine

Definition. Die Dichte der durch die Gleichungen

(33) $$x_\lambda = \sum_{\varkappa = k+1}^{n} q_{\lambda \varkappa} x_\varkappa + q_{\lambda, n+1} \qquad (\lambda = 1, \ldots, k)$$

gegebenen $(n-k)$-dimensionalen Ebenen $E_{n-k}$ des $R_n$ gegenüber Euklidischen Bewegungen ist

(34) $$\dot{E}_{n-k} = |G_n G_n'|^{-\frac{n+1}{2}} \prod_{\lambda=1}^{k} \prod_{\varkappa=k+1}^{n} d q_{\lambda\varkappa} \prod_{\lambda=1}^{k} d q_{\lambda, n+1},$$

wobei

$$G_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & -q_{1,k+1} & \ldots & -q_{1,n} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -q_{k,k+1} & \ldots & -q_{k,n} \end{pmatrix}$$

und $G'_n$ die transponierte Matrix ist[16]). Es sei $N$ eine beliebige Menge des $R_n$ und $\mathfrak{N}$ die Menge aller zu $N$ nicht fremden, $(n-k)$-dimensionalen Ebenen $E_{n-k}$[17]). Mit $z = z(E_{n-k}) \leqq \infty$ sei die Anzahl der Punkte des Durchschnitts $N \cdot E_{n-k}$ bezeichnet. Dann ist das $k$-dimensionale Favard-Maß

$$(35) \qquad \mu_F(N) = \frac{1}{c} \int\limits_{\mathfrak{N}} z(E_{n-k})\, \dot{E}_{n-k},$$

vorausgesetzt, daß dieses LEBESGUE-Integral existiert, d. h. einen bestimmten endlichen oder unendlichen Wert hat. Die Konstante $c$ ist dabei so bestimmt, daß für den $k$-dimensionalen Einheitswürfel $W$ des $R_n$ gilt:

$$(36) \qquad \mu_F(W) = 1.$$

Wir behaupten nun: *Für jede analytische Menge $A$ des $R_n$ existiert das Maß $\mu_F(A)$.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir natürlich $A$ sofort als beschränkt annehmen. Es sei $i$ eine natürliche Zahl. Dann genügt es zu zeigen, daß die Menge aller $E_{n-k}$, die mit $A$ mindestens $i$ Punkte gemein haben, analytisch und daher Lebesgue-meßbar ist in dem durch die $q_{\lambda,\varkappa}$ parametrisierten Raum aller $E_{n-k}$. Mit $R_n(i)$ bezeichnen wir die Menge aller ungeordneten $i$-Tupel $s = (p_1, \ldots, p_i)$ von Punkten des $R_n$, die aber nicht paarweise verschieden zu sein brauchen. Als Abstand von $s = (p_1, \ldots, p_i)$ und $s' = (p'_1, \ldots, p'_i)$ definieren wir $\overline{s s'} = \operatorname{Min} (\overline{p_1 p'_{j_1}} + \cdots + \overline{p_i p'_{j_i}})$, wobei $j_1, \ldots, j_i$ alle Permutationen von $1, \ldots, i$ durchläuft[18]). Auf diese Weise wird $R_n(i)$ zu einem vollständigen metrischen Raum. $R_n(i)$ ist ein eindeutiges, stetiges Bild der $i$-ten topologischen Potenz $R_n \times \cdots \times R_n$ (Menge aller geordneten $i$-Tupel $\{p_1, \ldots, p_i\}$ von Punkten aus $R_n$), indem nämlich jedem geordneten $i$-Tupel $\{p_1, \ldots, p_i)$ der Potenz das ungeordnete $i$-Tupel $(p_1, \ldots, p_i)$ zugeordnet wird. Die $i$-te Potenz $A \times \cdots \times A$ ist analytisch in $R_n \times \cdots \times R_n$, da $A$ im $R_n$ analytisch ist[19]). Also ist auch das Bild von $A \times \cdots \times A$, d. h. die Menge $A(i)$ aller ungeordneten $i$-Tupel von Punkten aus $A$ analytisch in $R_n(i)$[20]). — Ist nun $r$ eine nicht negative ganze Zahl $\leqq n-k$, so sei $B_r(i)$ die Menge aller $s = (p_1, \ldots, p_i)$ mit paarweise ver-

[16]) A. MÜLLER, Dichten linearer Mannigfaltigkeiten im euklidischen und nichteuklidischen $R_n$. Math. Zeitschr. **42** (1937), S. 118; W. BLASCHKE, Ermittlung der Dichten für lineare Unterräume im $E_n$. Act. sci. et industr. **252**, Paris 1935.

[17]) Wir verabreden: Für jede Punktmenge $A, B, C, \ldots$ des $R_n$ bezeichnen wir mit dem entsprechenden Frakturbuchstaben $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots$ die Menge aller zu $A, B, C, \ldots$ nicht fremden $(n-k)$-dimensionalen Ebenen des $R_n$ (und nennen sie die zu $A, B, C, \ldots$ gehörige Menge von Ebenen $E_{n-k}$). Nur beim Buchstaben $E$ bzw. $\mathfrak{E}$ weichen wir von dieser Verabredung ab.

[18]) $\overline{pq}$ ist der Abstand der Punkte $p$ und $q$.

[19]) Vgl. z. B. H. HAHN, a. a. O. [5]), S. 351.

[20]) Vgl. z. B. H. HAHN, a. a. O. [5]), S. 349.

schiedenen $p_1, \ldots, p_i$, die in einer $r$-dimensionalen Ebene $E_r(p_1, \ldots, p_i)$, aber keiner niedriger dimensionalen Ebene des $R_n$ liegen. Dann ist $N_r(i)$ eine Borelsche Menge in $R_n(i)$, also analytisch in $R_n(i)$. Mithin ist auch der Durchschnitt $A(i) \cdot B_r(i)$ analytisch in $R_n(i)$. Ordnen wir nun jedem $i$-Tupel $(p_1, \ldots, p_i)$ aus $A(i) \cdot B_r(i)$ die Ebene $E_r(p_1, \ldots, p_i)$ zu, so ist diese Abbildung eindeutig und stetig. Also ist die Menge $\mathfrak{E}_r$ aller dieser Ebenen $E_r(p_1, \ldots, p_i)$ analytisch im Raum aller $r$-dimensionalen Ebenen. Es sei nun $\mathfrak{E}_{n-k}$ die Menge aller $(n-k)$-dimensionalen Ebenen des $R_n$, welche Ebenen $E_r(p_1, \ldots, p_i)$ enthalten. Dann ist auch diese Menge $\mathfrak{E}_{n-k,r}$ analytisch im Raum aller $(n-k)$-dimensionalen Ebenen des $R_n$ (man erzeuge $\mathfrak{E}_r$ durch ein monotones System kompakter Mengen $M_{n_1 \ldots n_j}$, was wegen der Beschränktheit von $A$ möglich ist[5]), und bezeichne mit $N_{n_1 \ldots n_j}$ die Menge aller $E_{n-k}$, welche $r$-dimensionale Ebenen aus $M_{n_1 \ldots n_j}$ enthalten; diese kompakten Mengen $N_{n_1 \ldots n_j}$ erzeugen dann $\mathfrak{E}_{n-k,r}$). Also ist auch die Menge $\mathfrak{E}_{n-k,0} + \cdots + \mathfrak{E}_{n-k,n-k}$ analytisch im Raum aller $(n-k)$-dimensionalen Ebenen $E_{n-k}$. Diese Menge besteht aber aus allen $E_{n-k}$, welche mindestens $i$ Punkte von $A$ enthalten. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Wir geben nun eine weitere Darstellung des Maßes $\mu_F$. Ist $\mathfrak{E}$ eine Menge von Ebenen $E_{n-k}$, die Lebesgue-meßbar ist im Raume aller $E_{n-k}$, so führen wir als Maß von $\mathfrak{E}$ ein die Zahl

$$\mu(\mathfrak{E}) = \frac{1}{c}\int\limits_{\mathfrak{E}} \dot{E}_{n-k}. \tag{37}$$

Gegeben sei jetzt eine analytische Punktmenge $A$ des $R_n$. Für eine positive Zahl $\varepsilon$ stellen wir $A$ dar als Summe endlich oder abzählbar vieler, paarweise fremder, nichtleerer analytischer Teilmengen $A_i^\varepsilon$ $(i = 1, 2, \ldots)$ mit Durchmessern $< \varepsilon$. Wir behaupten dann die Gleichung

$$\mu_F(A) = \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_i \mu(\mathfrak{A}_i^\varepsilon), \tag{38}$$

wobei $\mathfrak{A}_i^\varepsilon$ die Menge aller zu $A_i^\varepsilon$ nicht fremden $E_{n-k}$ bedeutet. Zum Beweis bezeichnen wir für jede natürliche Zahl $j$ mit $z^{(j)}(E_{n-k})$ die größte natürliche Zahl $z \leqq \infty$ mit folgender Eigenschaft: in $E_{n-k}$ sind $z$ Punkte von $A$ enthalten, die zu je zwei einen Abstand $\geqq j^{-1}$ haben (außer diesen $z$ Punkten dürfen noch weitere Punkte von $A$ in $E_{n-k}$ liegen). Die Funktionenfolge $z^{(1)}(E_{n-k})$, $z^{(2)}(E_{n-k}), \ldots$ konvergiert monoton wachsend gegen $z(E_{n-k})$ (Anzahl aller Punkte von $A \cdot E_{n-k}$). Also gibt es für jede Zahl $a < \mu_F(A)$ ein natürliches $j$ derart, daß

$$a < \frac{1}{c}\int\limits_{\mathfrak{A}} z^{(j)}(E_{n-k})\, \dot{E}_{n-k} \leqq \mu_F(A). \tag{39}$$

Ist nun $\varepsilon$ eine beliebige positive Zahl $< (2j)^{-1}$, so kommt jede Ebene $E_{n-k}$ in mindestens $z^{(j)}(E_{n-k})$. jedoch in höchstens $z(E_{n-k})$ der Mengen $\mathfrak{A}_i^\varepsilon$ vor. Also ist

$$\frac{1}{c}\int\limits_{\mathfrak{A}} z^{(j)}(E_{n-k})\dot{E}_{n-k} \leqq \sum_i \mu(\mathfrak{A}_i^\varepsilon) \leqq \frac{1}{c}\int\limits_{\mathfrak{A}} z(E_{n-k})\,\dot{E}_{n-k}.$$

also nach (39)

$$a < \sum \mu(\mathfrak{A}_i^\varepsilon) \leqq \mu_F(A).$$

Hieraus folgt (38).

Auch das Maß $\mu$ können wir, wenigstens für die zu Punktmengen $A \subset R_n$ gehörigen Mengen $\mathfrak{A}$ von Ebenen $E_{n-k}$[17]), noch anders schreiben. Ist $E_{n-k}$ die $(n-k)$-dimensionale Ebene (33) des $R_n$, so sei $E_k^0$ die zu $E_{n-k}$ senkrechte $k$-dimensionale Ebene durch den Koordinatensprung $O$. Diese Ebene $E_k^0$ hängt nur von den Parametern $q_{\lambda\varkappa}$ ($\lambda = 1, \ldots, k$; $\varkappa = k+1, \ldots, n$) ab. Ordnen wir dem Schnittpunkt von $E_{n-k}$ und $E_k^0$ die $k$-Zahlen $q_{1,n+1}, \ldots, q_{k,n+1}$ zu, so stellen diese Zahlen in $E_k^0$ affine Koordinaten dar. Also können wir die kinematische Punktdichte $\dot{\mathfrak{p}}$ in $E_k^0$ in der Form

$$\dot{\mathfrak{p}} = F(q_{1,k+1}, \ldots, q_{kn}) \prod_{\lambda=1}^{k} dq_{\lambda,n+1}$$

schreiben. Setzen wir

$$(F(q_{1,k+1}, \ldots, q_{kn}))^{-1} \cdot \left|G_n G_n'\right|^{-\frac{n+1}{2}} \prod_{\lambda=1}^{k} \prod_{\varkappa=k+1}^{n} dq_{\lambda\varkappa} = \dot{E}_k^0,$$

so ist

$$\dot{E}_{n-k} = \dot{\mathfrak{p}}\dot{E}_k^0. \tag{40}$$

Mit $\dot{E}_{n-k}$ und $\dot{\mathfrak{p}}$ ist auch $\dot{E}_k^0$ invariant bei Bewegungen, die den Ursprung festlassen; also ist $\dot{E}_k^0$ die Dichte der $k$-dimensionalen Ebenen $E_k^0$ durch den Ursprung.

Nun sei $A$ eine Punktmenge des $R_n$ und $\mathfrak{A}$ die zugehörige Menge von Ebenen $E_{n-k}$. Nach (40) können wir, wenn $A_{E_k^0}$ die Projektion von $A$ in die Ebene $E_k^0$ und $m$ das $k$-dimensionale Lebesguesche Maß in $E_k^0$ bedeutet, folgendermaßen schreiben:

$$\int\limits_{\mathfrak{A}} \dot{E}_{n-k} = \int \Big( \int\limits_{A_{E_k^0}} \dot{\mathfrak{p}} \Big) \dot{E}_k^0 = \int m(A_{E_k^0})\,\dot{E}_k^0,$$

wobei die auf $\dot{E}_k^0$ bezüglichen Integrale über alle $k$-dimensionalen Ebenen $E_k^0$ durch den Ursprung zu nehmen sind. Also ist nach (37):

$$\mu(\mathfrak{A}) = \frac{1}{c}\int m(A_{E_k^0})\,\dot{E}_k^0. \tag{41}$$

Wir wenden uns nun dem eigentlichen Beweis des Satzes 2 für das Favard-Maß $\mu_F$ zu. Es liege wieder die Sachlage der Nr. 3. 1 und des Hilfssatzes vor; dabei sei $\widetilde{Q}$ der Durchschnitt $\widetilde{K}\widetilde{P}$ von $\widetilde{P}$ mit einer abgeschlossenen Kugel $\widetilde{K}$ mit dem Radius $d$ und dem Mittelpunkt $\mathfrak{y}_0$. Wir behaupten:

(42) $\quad \mu(\mathfrak{Q}) = I(\widetilde{Q}) + \delta \cdot m(\widetilde{Q})$ mit $|\delta| < \varepsilon$ für hinreichend kleines $d$.

Zum Beweis verwenden wir die Gleichung (41), worin wir aber zur Vereinfachung kurz $E$ statt $E_k^0$ schreiben. Dann lautet diese Gleichung für $A = Q$:

$$\mu(\mathfrak{Q}) = \frac{1}{c}\int m(Q_E)\,\dot{E}, \tag{43}$$

wobei über die Menge aller $k$-dimensionalen Ebenen $E$ durch den Ursprung integriert wird. Hieraus folgt (42) im Falle dim $T < k$, weil dann $J(\widetilde{Q}) = \delta_1 \cdot m(\widetilde{Q})$ und $m(Q_E) = \delta_2 \cdot m(\widetilde{Q})$ ist mit $|\delta_1| + |\delta_2| < \varepsilon$ für hinreichend kleines $d$ (vgl. S. 751, 2. Fall). Nun sei dim $T = k$. Die Gleichung (2) von S. 750 lautet ausführlicher:

$$m(Q_E) = c(E) \cdot I(\widetilde{Q}) + \delta(d;E) \cdot m(\widetilde{Q}) \quad \text{mit} \quad \lim_{d\to 0} \delta(d;E) = 0. \tag{44}$$

Hierdurch ist $\delta(d;E)$ eindeutig definiert, wenn $m(\widetilde{Q}) \neq 0$ ist; ist $m(\widetilde{Q}) = 0$, so ist auch $I(\widetilde{Q}) = 0$ und $m(Q_E) = 0$, letzteres weil $Q_E$ ein dehnungsloses Bild von $\widetilde{Q}$ ist; in diesem Fall setzen wir $\delta(d;E) = 0$.

Wir behaupten über $\delta(d;E)$ zweierlei. $\alpha$) $\delta(d;E)$ ist als Funktion von $E$ summierbar. Hierzu genügt es, zu zeigen, daß die Funktionen $c(E)$ und $m(Q_E)$ summierbar sind. Für $c(E)$ folgt dies aus der Stetigkeit und Beschränktheit. Da $Q_E$ ein dehnungsbeschränktes Bild von $Q$ ist, also $m(Q_E) \leqq m(\widetilde{Q}) < \infty$ ist, brauchen wir nur die Meßbarkeit von $m(Q_E)$ zu zeigen. Mit $\widetilde{P}$ und $\widetilde{K}$ ist auch $\widetilde{Q} = \widetilde{K}\widetilde{P}$ und damit $Q = \pi(\widetilde{Q})$ kompakt. Also existiert für jedes natürliche $j$ eine $Q$ enthaltende Summe $K^j$ endlich vieler, zu $Q$ nicht fremder Kugeln des $R_n$ mit Durchmessern $< j^{-1}$ derart, daß $K^1 \supset K^2 \supset \cdots$ gilt. Dann ist $K^1 \cdot K^2 \ldots = Q$, $K_E^1 \supset K_E^2 \supset \cdots$ und $K_E^1 \cdot K_E^2 \cdots = Q_E$, somit $m(K_E^1) \geqq (K_E^2) \geqq \cdots$ und $\lim m(K_E^i) = m(Q_E)$. Nun ist $m(K_E^i)$ stetig. Also ist $m(Q_E)$ meßbar. — $\beta$) Es ist $|\delta(d;E)| \leqq 1 + s$. Denn da $Q_E$ ein dehnungsloses Bild von $\widetilde{Q}$ ist, also $m(Q_E) \leqq m(\widetilde{Q})$ gilt, da weiter $c(E) \leqq 1$ ist und $I(\widetilde{Q}) \leqq m(\widetilde{Q}) \cdot s$ ist wegen (10), so folgt $|m(Q_E) - c(E) \cdot I(\widetilde{Q})| \leqq m(\widetilde{Q}) + m(\widetilde{Q}) \cdot s$, woraus sich $\beta$) ergibt.

Aus $\alpha$) und $\beta$) folgt, daß wir in (44) unter dem Limeszeichen integrieren können[21]), d. h. daß, wenn wir $\int c(E)\,\dot{E} = e$ und $\int \delta(d;E)\,\dot{E} = \delta(d)$ setzen,

$$\int m(Q_E)\,\dot{E} = e \cdot I(\widetilde{Q}) + \delta(d) \cdot m(\widetilde{Q}) \quad \text{mit} \quad \lim_{d\to 0} \delta(d) = 0,$$

also

$$\frac{1}{e}\int m(Q_E)\,\dot{E} = I(\widetilde{Q}) + \delta \cdot m(\widetilde{Q}) \quad \text{mit} \quad |\delta| < \varepsilon \text{ für hinreichend kleines } d \tag{45}$$

---

[21]) A. a. O. [14]), S. 444.

gilt. Nun ist, wenn $W$ ein Einheitswürfel $\subset T$ ist, $c(E) = m(W_E)$ nach Definition von $c(E)$ auf S. 750. Nach (41), worin wir $E_k^0 = E$ setzen, ist also $e = c\mu(\mathfrak{W})$, nach (37) mithin $e = \int\limits_{\mathfrak{W}} \dot{E}_{n-k}$. Da jede Ebene $E_{n-k}$, außer derjenigen einer Menge mit dem Maße $\mu = 0$, mit $W$ genau einen Punkt gemein hat, ist $\frac{1}{c}\int\limits_{\mathfrak{W}} \dot{E}_{n-k} = \mu_F(W) = 1$. Also ist $e = c$. Mithin ist (45) wegen (43) mit (42) äquivalent und damit (42) bewiesen.

Nach (42) und dem Überdeckungssatz von VITALI existieren im $R_k$ endlich oder abzählbar viele abgeschlossene Kugeln $\widetilde{K}_1, \widetilde{K}_2, \ldots$, deren Durchmesser beliebig klein und deren Mittelpunkte $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \ldots$ in $\widetilde{P}$ enthalten sind, derart, daß gilt:

(46) $$\widetilde{Q}_i \widetilde{Q}_j = 0 \quad \text{für } i \neq j;$$

(47) $$\widetilde{P} = \sum_i{}' \widetilde{Q}_i + \widetilde{N}, \quad m(\widetilde{N}) = 0;$$

(48) $$\mu(\mathfrak{Q}_i) = I(\widetilde{Q}_i) + \delta_i \cdot m(\widetilde{Q}_i), \quad |\delta_i| < \varepsilon.$$

Aus (46) bis (48) folgt

(49) $$\sum_i \mu(\mathfrak{Q}_i) = I(\widetilde{P}) + \delta \cdot m(\widetilde{P}), \quad |\delta| < \varepsilon.$$

Da die Abbildung $\pi$ eineindeutig ist, sind die Mengen $Q_i = \pi(\widetilde{Q}_i)$ und $N = \pi(\widetilde{N})$ paarweise fremd. Außerdem ist $P = \sum\limits_i Q_i + N$. Schließlich ist $\mu(\mathfrak{N}) = 0$, wie aus (41) auf Grund der Tatsache folgt, daß wegen der Dehnungslosigkeit von $\pi$ die Projektionen $N_{E_k^0}$ dehnungslose Bilder von $\widetilde{N}$ mit $m(\widetilde{N}) = 0$ sind und für sie daher $m(N_{E_k^0}) = 0$ gilt. Also ist wegen (38)

$$\mu_F(P) = \sum_i \mu(\mathfrak{Q}_i) + \delta' \cdot m(\widetilde{P}), \quad |\delta'| < \varepsilon,$$

falls die Durchmesser der Kugeln $\widetilde{K}_i$ und damit die der Mengen $Q_i = \pi(\widetilde{K}_i \widetilde{P})$ hinreichend klein sind, was wir, wie vorhin bereits bemerkt, annehmen können. Nach (49) ist also

(50) $$\mu_F(P) = I(\widetilde{P}) + \zeta \cdot m(\widetilde{P}), \quad |\zeta| < 2\,\varepsilon.$$

Analog wie vorhin $\mu(\mathfrak{N}) = 0$ aus $m(\widetilde{N}) = 0$ folgt mit Hilfe von (38) und (41) aus (9) die Ungleichung $\mu_F(M - P) \leqq m(\widetilde{M} - \widetilde{P}) \cdot \frac{1}{c}\int \dot{E}_k^0 \leqq \varepsilon \cdot a$, wobei wir das über alle $E_k^0$ durch den Ursprung genommene Integral $\frac{1}{c}\int \dot{E}_k^0 = a$ gesetzt haben. Hieraus, (50) und (11), folgt

$$\mu_F(M) = I(\widetilde{M}) + \eta \cdot (m(\widetilde{M}) + a + s), \quad |\eta| < 2\,\varepsilon.$$

Da $\varepsilon$ beliebig positiv ist, folgt schließlich

(51) $$\mu_F(M) = I(\widetilde{M}).$$

3.7. Das $k$-dimensionale JANZEN-Maß $\mu_J$ im $R_n$. Definition. Für jedes $d_\varkappa$ einer Nullfolge $\{d_\varkappa\}$ positiver Zahlen liege eine Darstellung des $R_n$ als Summe abzählbar vieler Quader $W_\varkappa^1, W_\varkappa^2, \ldots$ mit Durchmessern $< d_\varkappa$ vor; dabei sei über die Zugehörigkeit der Ecken, der offenen Kanten und der offenen Seitenflächen der Dimensionen $2, \ldots, n-1$ zu den Quadern so verfügt, daß die Quader paarweise fremd sind. Weiter seien für ein fest gewähltes, rechtwinkliges Koordinatensystem $E^1, \ldots, E^l$ die $l = \binom{n}{k}$ Koordinatenebenen der Dimension $k$. Wir setzen $W_\varkappa^i \cdot M = M_\varkappa^i$ und bezeichnen die Projektion von $M_\varkappa^i$ in die Ebene $E^\lambda$ mit $M^i_{\varkappa E^\lambda}$. Schließlich setzen wir $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \sqrt{\sum\limits_{\lambda=1}^{l} (m(M^i_{\varkappa E^\lambda}))^2} = T_\varkappa(M)$. Dann ist $\mu_J(M) = \lim\limits_{\varkappa \to \infty} T_\varkappa$. (Die Existenz dieses Limes wird sich für unser dehnungsloses Bild $M = \pi(\widetilde{M})$ ganz von selbst mit ergeben.)

Für jedes $\varkappa = 1, 2, \ldots$ und jedes $\lambda = 1, \ldots, l$ definieren wir eine Funktion $\delta_\varkappa^{(\lambda)}(\mathfrak{y})$ für alle Punkte $\mathfrak{y}$ von $\widetilde{P}$ folgendermaßen. Wir setzen zunächst $W_\varkappa^i \cdot P = Q_\varkappa^i$ und $\pi^{-1}(Q_\varkappa^i) = \widetilde{Q}_\varkappa^i$. Dann liegt jeder Punkt $\mathfrak{y}$ von $\widetilde{P}$ in genau einer der Mengen $\widetilde{Q}_\varkappa^1, \widetilde{Q}_\varkappa^2, \ldots$. Gilt nun für die den Punkt $\mathfrak{y}$ enthaltende Menge $\widetilde{Q}_\varkappa^i$ die Gleichung $m(\widetilde{Q}_\varkappa^i) = 0$, so setzen wir $\delta_\varkappa^{(\lambda)}(\mathfrak{y}) = 0$. Ist aber $m(\widetilde{Q}_\varkappa^i) \neq 0$, so definieren wir $\delta_\varkappa^{(\lambda)}(\mathfrak{y})$ durch die Gleichung

$$m(Q^i_{\varkappa E^\lambda}) = c(E^\lambda) \cdot I(\widetilde{Q}_\varkappa^i) + \delta_\varkappa^{(\lambda)}(\mathfrak{y}) \cdot m(\widetilde{Q}_\varkappa^i), \tag{52}$$

wobei $c(E^\lambda)$ wie auf S. 750 mit Hilfe der Tangentialmannigfaltigkeit $T$ an $M$ im Punkte $\mathfrak{x} = \pi(\mathfrak{y})$ definiert (also eine Funktion von $\mathfrak{y}$) ist. Dann gilt

$$\lim_{\varkappa \to \infty} \delta_\varkappa^{(\lambda)}(\mathfrak{y}) = 0, \tag{53}$$

was im ersten Fall trivial ist und im zweiten Fall aus der Gleichung (2) (mit $\mathfrak{x}_0 = \mathfrak{x}$) wegen $\lim\limits_{\varkappa \to \infty} d_\varkappa = 0$ folgt.

Wir wollen nun weiter zeigen, daß auf einer gewissen Teilmenge $\widetilde{P}'$ von $\widetilde{P}$ die Konvergenz (53) gleichmäßig ist. Hierzu benötigen wir die Lebesgue-Meßbarkeit von $\delta_\varkappa^{(\lambda)}(\mathfrak{y})$ auf $\widetilde{P}$, die wir zunächst beweisen wollen. Da die Mengen $\widetilde{Q}_\varkappa^i$ BORELsche Mengen sind und $\widetilde{Q}_\varkappa^1 + \widetilde{Q}_\varkappa^2 + \cdots = \widetilde{P}$ ist, genügt es zu zeigen, daß $\delta_\varkappa^{(\lambda)}(\mathfrak{y})$ auf jeder Menge $\widetilde{Q}_\varkappa^i$ meßbar ist. Im Falle $m(\widetilde{Q}_\varkappa^i) = 0$ haben wir $\delta_\varkappa^{(\lambda)}(\mathfrak{y}) = 0$ auf $\widetilde{Q}_\varkappa^i$ gesetzt; in diesem Fall ist also $\delta_\varkappa^{(\lambda)}(\mathfrak{y})$ in trivialer Weise meßbar auf $\widetilde{Q}_\varkappa^i$. Nun sei $m(\widetilde{Q}_\varkappa^i) > 0$. Wir bezeichnen vorübergehend mit $\widetilde{Q}_\varkappa^{i(+)}$ bzw. $\widetilde{Q}_\varkappa^{i(0)}$ die Menge der Punkte $\mathfrak{y}$ von $\widetilde{Q}_\varkappa^i$, in denen $D(\mathfrak{y}) \neq 0$ (also $> 0$) bzw. $D(\mathfrak{y}) = 0$ ist. Wegen der Stetigkeit von $D(\mathfrak{y})$ auf $\widetilde{P}$ [10]) ist $\widetilde{Q}_\varkappa^{i(+)}$ offen in $\widetilde{Q}_\varkappa^i$ und $\widetilde{Q}_\varkappa^{i(0)}$ abgeschlossen in $\widetilde{Q}_\varkappa^i$. Beide Mengen sind also BORELsche Mengen und wir brauchen nur noch die Meßbarkeit auf $\widetilde{Q}_\varkappa^{i(+)}$ und $\widetilde{Q}_\varkappa^{i(0)}$ zu zeigen. Für die Punkte $\mathfrak{y}$ von $\widetilde{Q}_\varkappa^{i(+)}$ hängt die $k$-dimensionale Tangentialebene $T$ an $M$ in $\mathfrak{x} = \pi(\mathfrak{y})$ stetig von $\mathfrak{y}$ ab wegen der Stetigkeit der partiellen

Ableitungen $\frac{\partial x_i}{\partial y_j}$ auf $\widetilde{P}$; also hängt auch $c(E^\lambda)$ und damit $\delta_\varkappa^{(\lambda)}(\mathfrak{y})$ nach (52) stetig von $\mathfrak{y} \in \widetilde{Q}_\varkappa^{i(+)}$ ab. Für jeden Punkt $\mathfrak{y}$ von $\widetilde{Q}_\varkappa^{i(0)}$ ist $c(E^\lambda) = \frac{1}{\sqrt{l}}$ nach S. 750, also $\delta_\varkappa^{(\lambda)}(\mathfrak{y})$ nach (52) konstant auf $\widetilde{Q}_\varkappa^{i(0)}$ und daher meßbar auf $\widetilde{Q}_\varkappa^{i(0)}$.

Aus (53) und der Meßbarkeit der Funktionen $\delta_\varkappa^{(\lambda)}(\mathfrak{y})$ auf $\widetilde{P}$ folgt die Existenz einer meßbaren Teilmenge $\widetilde{P}'$ von $\widetilde{P}$ mit

(54) $$m(\widetilde{P} - \widetilde{P}') < \varepsilon$$

derart, daß

(55) $$\lim_{\varkappa \to \infty} \delta_\varkappa^{(\lambda)}(\mathfrak{y}) = 0 \quad \text{gleichmäßig auf } \widetilde{P}'$$

gilt[22]). Dann existiert ein $\varkappa_0$ derart, daß für alle $\varkappa > \varkappa_0$, alle $\lambda = 1, \ldots, l$ und alle Quader $W_\varkappa^i$, welche mindestens einen Punkt $\mathfrak{x} = \pi(\mathfrak{y})$ aus $P' = \pi(\widetilde{P}')$ enthalten, die Gleichung (52) gilt mit $|\delta_\varkappa^{(\lambda)}(\mathfrak{y})| < \varepsilon$. Aus der letzten Ungleichung folgt $\sum_{\lambda=1}^{l} (\delta_\varkappa^{(\lambda)}(\mathfrak{y}))^2 < \varepsilon^2 l$. Außerdem ist $(c(E^1))^2 + \cdots + (c(E^l))^2 = 1$[23]). Also gilt[24])

$$\sqrt{\sum_{\lambda=1}^{l} (m(Q^i_{\varkappa E^\lambda}))^2} = I(\widetilde{Q}_\varkappa^i) + \delta_\varkappa^i \cdot m(\widetilde{Q}_\varkappa^i) \quad \text{mit} \quad |\delta_\varkappa^i| < \varepsilon \sqrt{l}$$

für alle $\varkappa > \varkappa_0$ und alle zu $\widetilde{P}' = \pi(P')$ nicht fremden $W_\varkappa^i$. Also gilt

(56) $$\sum_i{}' \sqrt{\sum_{\lambda=1}^{l} (m(Q^i_{\varkappa E^\lambda}))^2} = \sum_i{}' I(\widetilde{Q}_\varkappa^i) + \delta_\varkappa' \cdot m(\widetilde{M}) \quad \text{mit} \quad |\delta_\varkappa'| \leqq \varepsilon \sqrt{l}\,{}^{25)}$$

für jedes $\varkappa > \varkappa_0$, wobei summiert wird über alle $i$, für welche $W_\varkappa^i$ zu $P'$ nicht fremd ist.

Die über die restlichen $i$ genommene Summe $\sum_i{}'' Q_\varkappa^i$ ist in $P - P'$ und daher $\sum_i{}'' \widetilde{Q}_\varkappa^i$ in $\widetilde{P} - \widetilde{P}'$ enthalten. Wegen (54) ist daher $\sum_i{}'' m(\widetilde{Q}_\varkappa^i) < \varepsilon$. Hieraus folgt wegen (10) erstens

(57) $$\sum_i{}'' I(\widetilde{Q}_\varkappa^i) < \varepsilon \cdot s$$

---

[22]) A. a. O. [14]), S. 382.

[23]) O. Haupt-G. Aumann, a. a. O. [9]), S. 153; im Falle $\dim T < k$ haben wir $c(E^\lambda) = \frac{1}{\sqrt{l}}$ gesetzt (S. 750)!

[24]) Auf Grund der bekannten Formel

$$\sqrt{(\sum_\nu a_1^{(\nu)})^2 + \cdots + (\sum_\nu a_r^{(\nu)})^2} \leqq \sum_\nu \sqrt{(a_1^{(\nu)})^2 + \cdots + (a_r^{(\nu)})^2}.$$

[25]) Wir haben die Zahl $\sum_i m(\widetilde{Q}_\varkappa^i) = m(\widetilde{P})$ durch die nicht kleinere Zahl $m(\widetilde{M})$ ersetzt.

und, da $Q^i_{\varkappa E^\lambda}$ ein dehnungsloses Bild von $\widetilde{Q}^i_\varkappa$ ist, $\sum\limits_i'' m(Q^i_{\varkappa E^\lambda}) < \varepsilon$ und somit zweitens

$$\sum_i{}'' \sqrt{\sum_{\lambda=1}^{l} (m(Q^i_{\varkappa E^\lambda}))^2} < \varepsilon \cdot l. \tag{58}$$

Aus (56) bis (58) folgt wegen $\sum\limits_i \widetilde{Q}^i_\varkappa = \widetilde{P}$ für $\varkappa > \varkappa_0$

$$T_\varkappa(P) = \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\sum_{\lambda=1}^{l} (m(Q^i_{\varkappa E^\lambda}))^2} = I(\widetilde{P}) + \delta_\varkappa \cdot (m(\widetilde{M}) + s + \sqrt{l}) \tag{59}$$

mit $|\delta_\varkappa| < \varepsilon l$.

Jetzt kommen wir rasch zum Ziel. Es gilt nämlich

$$T_\varkappa(P) \leqq T_\varkappa(M) \leqq T_\varkappa(P) + T_\varkappa(M - P)\text{ [24]}. \tag{60}$$

Nun ist $m(\widetilde{M} - \widetilde{P}) < \varepsilon$ nach (9). Hieraus folgt, daß die Projektionen der Durchschnitte der $W^1_\varkappa$, $W^2_\varkappa$, ... mit $M - P$ in die Ebene $E^\lambda$ als dehnungslose Bilder paarweise fremder Teilmengen von $\widetilde{M} - \widetilde{P}$ eine Inhaltssumme $< \varepsilon$ haben. Also ist

$$T_\varkappa(M - P) < \varepsilon l \tag{61}$$

für jedes $\varkappa$. Aus (59) bis (61) und (11) folgt

$$T_\varkappa(M) = I(\widetilde{M}) + \varepsilon_\varkappa \cdot (m(\widetilde{M}) + 2s + 2l) \quad \text{mit} \quad |\varepsilon_\varkappa| < \varepsilon l$$

für $\varkappa > \varkappa_0$. Da $\varepsilon$ eine beliebig kleine positive Zahl ist, folgt schließlich

$$\mu_J(M) = I(\widetilde{M}). \tag{62}$$

## § 4.

### Beweis des Satzes 1[26]).

Es sei also jetzt $M \subset R_n$ ein eindeutiges (nicht notwendig umkehrbar eindeutiges), dehnungsbeschränktes Bild $\pi(\widetilde{M})$ einer analytischen Menge $\widetilde{M}$ des $R_k$. Die Menge $\widetilde{M}$ enthält eine monoton wachsende Folge $\widetilde{P}_1 \subset \widetilde{P}_2 \subset \cdots$ kompakter Mengen derart, daß

$$\widetilde{M} = \widetilde{P}_1 + \widetilde{P}_2 + \cdots + \widetilde{N} \quad \text{und} \quad m(\widetilde{N}) = 0 \tag{63}$$

ist[27]). Wir setzen $\pi(\widetilde{P}_j) = P_j$ und $\pi(\widetilde{N}) = N$.

Nun seien $\mu_i$ $(i = 1, 2)$ zwei der im Satz 1 genannten Maße. Wir behaupten die Gleichung

$$\mu_i(M) = \lim_{j \to \infty} \mu_i(P_j) \qquad (i = 1, 2). \tag{64}$$

---

[26]) Dieser Beweis ist eine Nachbildung des entsprechenden Beweises bei A. Kolmogoroff [1]).

[27]) A. a. O. [14]), S. 275.

Hierzu genügt es zu beweisen, daß

$$\mu_i(N) = 0 \tag{65}$$

ist. Diese Gleichung ergibt sich folgendermaßen. Ist $\mu_i$ ein KOLMOGOROFF-Maß $\mu_K$, so folgt (65) aus $m(\widetilde{N}) = 0$ nach dem 3. Axiom von KOLMOGOROFF (Nr. 3. 3), da $N = \pi(\widetilde{N})$ ein dehnungsloses Bild von $\widetilde{N}$ ist. Nun sei $\mu_i$ das HAUSDORFF-Maß $\mu_H$; wegen $m(\widetilde{N}) = 0$ kann $\widetilde{N}$ überdeckt werden durch höchstens abzählbar viele Kugeln $K_1, K_2, \ldots$ des $R_k$ mit Durchmessern $< \varepsilon$ und einer Inhaltssumme $< \varepsilon$; da $N$ ein dehnungsloses Bild von $\widetilde{N}$ ist, kann $N$ überdeckt werden durch gleich viele Kugeln $H_1, H_2, \ldots$ des $R_n$ derart, daß der Durchmesser von $H_r$ höchstens doppelt so groß ist wie der von $K_r$ $(r = 1, 2, \ldots)$; hieraus folgt (65) für $\mu_H$. Weiter folgt (65) für $\mu_i = \mu_C$ und $\mu_i = \mu_G$, da $\mu_G \leqq \mu_C \leqq \mu_H$ ist für jede Menge (Nr. 3. 4). Aus $\mu_H(N) = 0$ ergibt sich außerdem die Gleichung $\mu_{Gi}(N) = 0$, also (65) für $\mu_i = \mu_{Gi}$, auf Grund der aus der Definition von $\mu_H$ und $\mu_{Gi}$ unmittelbar folgenden Tatsache, daß für jede Menge $L$ des $R_n$ zwischen dem $(n-1)$-dimensionalen GILLESPIE-Maß $\mu_{Gi}(L)$ und dem $(n-1)$-dimensionalen HAUSDORFF-Maß $\mu_H(L)$ die Ungleichung $\mu_{Gi}(L) \leqq c_n \cdot \mu_H(L)$ gilt, wobei $c_n$ der Quotient der halben Oberfläche der Einheitskugel im $R_n$ und dem Inhalt der Einheitskugel im $R_{n-1}$ ist. Schließlich folgt (65) für $\mu_i = \mu_F$ und $\mu_i = \mu_J$ aus der Tatsache, daß für jede Teilmenge $N'$ von $N$ die Projektion von $N'$ in eine $k$-dimensionale Teilebene $E$ des $R_n$ ein dehnungsloses Bild $\pi_E \pi(\widetilde{N}')$ einer Teilmenge $\widetilde{N}'$ von $\widetilde{N}$ ist und daher den LEBESGUE-Inhalt 0 hat [für $\mu_F$ beachte man hierzu (38) und (41)].

Nun existiert für jedes natürliche $j$ eine analytische Teilmenge $\widetilde{M}_j$ von $\widetilde{P}_j$ derart, daß $\pi$ auf $\widetilde{M}_j$ eineindeutig ist und für das Bild $M_j = \pi(\widetilde{M}_j)$ die Glei chung $M_j = P_j$ gilt[1]). Nach (65) ist also

$$\mu_i(M_j) = \lim_{j \to \infty} \mu_i(M_j). \tag{66}$$

Nach Satz 2 ist $\mu_1(M_j) = \mu_2(M_j)$ für $j = 1, 2, \ldots$. Nach (66) ist also

$$\mu_1(M) = \mu_2(M).$$

Damit ist Satz 1 bewiesen.

## § 5.

## Beweis des Satzes 3.

5. 1. Das $k$-dimensionale Flächenmaß $\mu_L$ von H. LEBESGUE im $R_n$[28]). Definition. Es sei $F = \pi(\widetilde{F})$ eine stetige, $k$-dimensionale Fläche im $R_n$ (§ 1). Für jedes natürliche $j$ liege eine stetige, $k$-dimensionale Fläche $F^j = \pi^j(\widetilde{F})$ im $R_n$ vor derart, daß die Abbildung $\pi^j$ auf dem Einheitswürfel $\widetilde{F}$

[28]) H. LEBESGUE, Intégrale, aire, longueur. Annali di matematica (3) 7 (1902), S. 231–359.

des $R_k$ stückweise affin ist, d.h. daß $\tilde{F}$ als Summe endlich vieler Simplexe $\Delta^{jh}$ $(h = 1, 2, \ldots)$ darstellbar ist, auf denen die Abbildung $\pi^j$ affin ist. Die Folge $\{F^j\}$ dieser simplizialen Flächen konvergiere gegen $F$, d. h. ist $\delta_j$ die obere Grenze der Abstände $\overline{\pi(\mathfrak{y})\,\pi^j(\mathfrak{y})}$ für alle Punkte $\mathfrak{y}$ von $\tilde{F}$, so gilt $\lim\limits_{j\to 0} \delta_j = 0$. Es sei nun $m(F^j)$ die Summe der $k$-dimensionalen, elementargeometrischen Inhalte der höchstens $k$-dimensionalen Simplexe $\pi^j(\Delta^{jh})$ $(h = 1, 2, \ldots)$ und $\underline{m}\{F^j\} = \varliminf\limits_{j\to\infty} m(F^j)$ gesetzt. Dann ist die (eventuell unendliche) untere Grenze der Zahlen $\underline{m}\{F^j\}$ für alle Folgen $\{F^j\}$ der genannten Art das $k$-dimensionale Flächenmaß $\mu_L(F)$ von LEBESGUE.

Nun sei die Fläche $F$, d. h. also $\pi$, dehnungsbeschränkt. Wir wollen zunächst die Ungleichung $\mu_L(F) \geqq I(\tilde{F})$ beweisen. Hierzu wählen wir eine positive Zahl $\varepsilon$. Wir werden nun endlich viele, die Fläche $F$ in ihren Mittelpunkten berührende Parallelepipede $\alpha_1(\tilde{W}_1), \ldots, \alpha_t(\tilde{W}_t)$ konstruieren, deren Inhaltssumme $\geqq I(\tilde{F}) - \varepsilon \cdot (4\,s + 1)$ ist und so daß folgendes gilt: Ist $\{F^j\}$ eine gegen $F$ konvergierende Folge simplizialer Flächen, so enthält für jedes hinreichend große $j$ die Fläche $F^j$ paarweise fremde Flächenstücke $F_1^j, \ldots, F_t^j$ derart, daß bei Projektion von $F_\sigma^j$ in die $\alpha_\sigma(\tilde{W}_\sigma)$ enthaltende $k$-dimensionale Ebene das ganze Parallelepiped $\alpha_\sigma(\tilde{W}_\sigma)$ von der Projektion überdeckt wird. Hieraus folgt, daß der Inhalt von $F^j$ sicher $\geqq I(\tilde{F}) - \varepsilon \cdot (4\,s + 1)$ ist. Da hierbei $\varepsilon$ beliebig klein ist, folgt $\underline{m}\{F^j\} \geqq I(\tilde{F})$ und damit $\mu_L(F) \geqq I(\tilde{F})$. — Wir gehen an die Durchführung.

Zu dem beliebig gewählten, positiven $\varepsilon$ wählen wir in $\tilde{F}$ (wie in Nr. 3. 1 in $\tilde{M}$) eine kompakte Menge $\tilde{P}$ derart, daß die Beziehungen (9) bis (12) mit $\tilde{F}$ statt $\tilde{M}$ gelten. Weiter sei $\tilde{N}$ die nach § 1 meßbare Menge aller Punkte von $\tilde{F}$, in denen $D(\mathfrak{y}) \neq 0$ ist. Dann ist $I(\tilde{F}) = I(\tilde{N})$. Die Menge $\tilde{N}$ enthält eine kompakte, zur Begrenzung von $\tilde{F}$ fremde Teilmenge $\tilde{G}$ derart, daß $m(\tilde{N} - \tilde{G}) < \varepsilon$ ist[27]. Dann ist $I(\tilde{N} - \tilde{G}) < \varepsilon \cdot s$ [vgl. (10)]. Hieraus und aus (11) mit $\tilde{M} = \tilde{F}$ folgt

$$I(\tilde{F} - \tilde{P}\,\tilde{G}) < 2\,\varepsilon s. \tag{67}$$

Nun sei $\mathfrak{y}_0$ ein Punkt von $\tilde{P}\,\tilde{G}$ und $\mathfrak{x}_0$ sein Bildpunkt. Wegen der totalen Differenzierbarkeit von $\pi$ in $\mathfrak{x}_0$ wird die Abbildung $\pi$ angenähert durch die affine Abbildung $\alpha$:

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{x}_0 + (\mathfrak{y} - \mathfrak{y}_0) \cdot \frac{\partial\, \mathfrak{x}_0(\mathfrak{y}_0)}{\partial\, \mathfrak{y}}$$

in dem Sinne, daß

$$|\mathfrak{x} - \mathfrak{z}| = o(|\mathfrak{y} - \mathfrak{y}_0|) \tag{68}$$

gilt (vgl. § 2). Ist nun $\tilde{V}$ ein achsenparalleler, abgeschlossener Würfel des $R_k$ mit dem Mittelpunkt $\mathfrak{y}_0$ und einer Kantenlänge $d_0$, $\tilde{W}$ ein ebensolcher Würfel mit der Kantenlänge $\sqrt[k]{1-\varepsilon}\cdot d_0$, so sind $\alpha(\widetilde{V})$ und $\alpha(\widetilde{W})$ Parallelepipede der $k$-dimensionalen Tangentialebene $T$ an $F$ im Punkte $\mathfrak{x}_0$, von denen das zweite im ersten enthalten ist. Es sei $V = \pi(\widetilde{V})$. Aus (68) folgt dann, falls $d_0$ hinreichend klein ist:

(69) $\qquad \alpha(\widetilde{W})$ wird durch $V_T$ mit dem Grade $\pm 1$ überdeckt[29]).

Also existieren nach dem Überdeckungssatz von Vitali: erstens endlich viele paarweise fremde achsenparallele, abgeschlossene Würfel $\widetilde{V}_1, \ldots, \widetilde{V}_t \subset \widetilde{F}$, deren Mittelpunkte $\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_t$ in $\widetilde{P}\,\widetilde{G}$ liegen und deren Durchmesser $d_1, \ldots, d_t < e$ sind[30]); zweitens zu den $\widetilde{V}_\sigma$ konzentrische, achsenparallele Würfel $\widetilde{W}_1, \ldots, \widetilde{W}_t$ mit den Durchmessern $\sqrt[k]{1-\varepsilon}\cdot d_1, \ldots, \sqrt[k]{1-\varepsilon}\cdot d_t$, derart, daß einerseits gilt:

(70) $\quad \alpha_\sigma(\widetilde{W}_\sigma)$ wird durch $V_{\sigma T_\sigma}$ mit dem Grade $\pm 1$ überdeckt $\quad (\sigma = 1, \ldots, t)$

[wobei natürlich $\alpha_\sigma(\widetilde{W}_\sigma)$ die in der $k$-dimensionalen Tangentialebene $T_\sigma$ an $F$ in $\mathfrak{x}_\sigma = \pi(\mathfrak{y}_\sigma)$ enthaltene affine Näherung von $\pi(\widetilde{W}_\sigma)$ und $V_{\sigma T_\sigma}$ die Projektion von $V_\sigma = \pi(\widetilde{V}_\sigma)$ in die Tangentialebene $T_\sigma$ ist] und andererseits $m(\widetilde{P}\,\widetilde{G} - \sum\limits_{\sigma=1}^{t} \widetilde{V}_\sigma) < \varepsilon$. Aus der letzteren Ungleichung folgt, da die Kantenlängen von $\widetilde{W}_\sigma$ und $\widetilde{V}_\sigma$ sich wie $\sqrt[k]{1-\varepsilon} : 1$ verhalten und daher $m(\sum\limits_\sigma \widetilde{V}_\sigma - \sum\limits_\sigma \widetilde{W}_\sigma) < \varepsilon \cdot m(\sum \widetilde{V}_\sigma) < \varepsilon$[31]):

(71) $$m(\widetilde{P}\,\widetilde{G} - \sum_{\sigma=1}^{t} \widetilde{W}_\sigma) < 2\,\varepsilon.$$

---

[29]) Es sei $f(\widetilde{V})$ ein in einer $k$-dimensionalen Ebene $E$ des $R_n$ enthaltenes eindeutiges, stetiges Bild eines $k$-dimensionalen Würfels $\widetilde{V}$ und $p$ ein nicht im Bild $f(B(\widetilde{V}))$ der Begrenzung $B(\widetilde{V})$ von $\widetilde{V}$ enthaltener Punkt von $E$. Zur Definition des Grades von $f$ in $p$ sei $\tau$ eine Triangulierung des Inneren $\underline{\widetilde{V}}$ von $\widetilde{V}$, d. h. eine Darstellung von $\underline{\widetilde{V}}$ als Summe von abzählbar vielen abgeschlossenen $k$-dimensionalen Simplexen, die zu je zwei höchstens ein Randsimplex gemein haben, die sich nur in $B(\widetilde{V})$ häufen und deren Durchmesser gegen Null konvergieren. Es sei nun $g$ eine auf $B(\widetilde{V})$ mit $f$ identische, auf den Simplexen von $\tau$ affine Abbildung von $\widetilde{V}$ in $E$; indem wir die $g$-Bilder der Simplexecken in $E$ ein wenig verrücken („in allgemeine Lage bringen"), können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß der Punkt $p$ für kein Simplex von $\tau$ im $g$-Bild des Randes enthalten ist. Der (von $g$ unabhängige) Grad der Abbildung $f$ in $p$ ist nun die Anzahl $p$ enthaltenden $g$-Bilder von Simplexen von $\tau$, wobei solch ein $g$-Bild positiv oder negativ zu zählen ist, je nachdem die durch $g$ in diesem Bildsimplex induzierte Orientierung der Orientierung in $E$ gleichgerichtet ist oder nicht. Vgl. z. B. P. Alexandroff und H. Hopf, Topologie I, Berlin 1935.

[30]) Die Definition von $e$ befindet sich auf S. 753; man schreibe dort $\widetilde{F}$ statt $M$.

[31]) Man beachte, daß die $\widetilde{V}_\sigma$ paarweise fremd und im Einheitswürfel $\widetilde{F}$ enthalten sind.

Außerdem gilt wegen $\widetilde{W}_\sigma \subset \widetilde{F}$ und $\widetilde{W}_{\sigma'} \cdot \widetilde{W}_{\sigma''} = 0$ für $\sigma' \neq \sigma''$:

(72) $$\sum_{\sigma=1}^{t} m(\widetilde{W}_\sigma) < 1.$$

Nun sei $\{F^j\}$ eine gegen die Fläche $F$ konvergierende Folge von simplizialen Flächen $F^j = \pi^j(\widetilde{F})$ im Sinne der Definition von $\mu_L$. Wir setzen $\pi^j(\widetilde{V}_\sigma) = F^j_\sigma$. Die $t$ Flächen $F^j_1, \ldots, F^j_t$ sind in $F^j$ enthalten und konvergieren gegen die Flächen $V_1, \ldots, V_t$. Wegen (70) existiert daher ein natürliches $j_0$ derart, daß $\alpha_\sigma(\widetilde{W}_\sigma)$ für jedes $j > j_0$ von der Projektion von $F^j_\sigma$ in die Tangentialebene $T_\sigma$ an die Fläche $F$ im Punkte $\mathfrak{x}_\sigma = \pi(\mathfrak{y}_\sigma)$ überdeckt wird ($\sigma = 1, \ldots, t$). Also ist der elementargeometrische Inhalt $m(F^j_\sigma) \geqq m(\alpha_\sigma(\widetilde{W}_\sigma))$ und daher $m(F^j) \geqq \sum m(\alpha_\sigma(\widetilde{W}_\sigma)) \geqq \sum m(\alpha_\sigma(\widetilde{W}_\sigma\, \widetilde{P}\, \widetilde{G})) = \sum D(\mathfrak{y}_\sigma) \cdot m(\widetilde{W}_\sigma\, \widetilde{P}\, \widetilde{G})$. Da die Durchmesser der Würfel $\widetilde{W}_\sigma < e$ sind, folgt aus (12): $D(\mathfrak{y}_\sigma) \cdot m(\widetilde{W}_\sigma\, \widetilde{P}\, \widetilde{G}) = I(\widetilde{W}_\sigma\, \widetilde{P}\, \widetilde{G}) + \eta_\sigma m(\widetilde{W}_\sigma)$ mit $|\eta_\sigma| < \varepsilon$. Unter Berücksichtigung von (72), (71) und (67) folgt hieraus weiter $m(F^j) \geqq I(\sum \widetilde{W}_\sigma\, \widetilde{P}\, \widetilde{G}) - \varepsilon \geqq I(\widetilde{P}\, \widetilde{G}) - 2\,\varepsilon s - - \varepsilon \geqq I(\widetilde{F}) - \varepsilon \cdot (4\,s + 1)$ und somit $\underline{\lim}\, m(F^j) \geqq I(\widetilde{F})$, da $\varepsilon$ beliebig klein gewählt werden kann und $s$ fest ist (Nr. 3. 1). Da $\{F^j\}$ eine beliebige, gegen $F$ konvergente Folge von simplizialen Flächen $F^j$ ist, folgt nach Definition von $\mu_L$ schließlich $\mu_L(F) \geqq I(\widetilde{F})$.

Die umgekehrte Ungleichung $\mu_L(F) \leqq I(\widetilde{F})$ folgt daraus, daß Folgen $\{F^j\}$ simplizialer Flächen $F^j$ mit $\lim m(F^j) = I(\widetilde{F})$ tatsächlich existieren[32]. Also ist[33]

(73) $$\mu_L(F) = I(\widetilde{F})\,{}^{34)}.$$

---

[32]) O. Haupt-G. Aumann, a. a. O. [9]), S. 160.

[33]) Für die Richtigkeit dieser Gleichung ist es wesentlich, daß $\widetilde{F}$ ein Würfel ist oder allgemeiner ein abgeschlossenes Gebiet, deren Begrenzung den $k$-dimensionalen (äußeren) Inhalt Null hat. Ist nämlich $\widetilde{F} \dot{\subset} R_k$ ein topologisches Bild eines abgeschlossenen Würfels des $R_k$, für welches die Begrenzung einen positiven Lebesgueschen Inhalt hat und setzen wir $\pi$ auf $\widetilde{F}$ gleich der Identität (also $\widetilde{F} = F$), so ist $\mu_L(F) = m(\underline{F})$ ($\underline{F}$ ist der offene Kern von $F$), also $\mu_L(F) < I(\widetilde{F}) = m(F)$. — Dasselbe gilt für das (für $k$-dimensionale topologische Flächen mit $\mu_L$ identische) Maß $\mu_M$ für $k$-dimensionale Mengen $M \subset R_n$ von K. Menger [Ergebnisse eines math. Kolloquiums, Heft 2 (1932), S. 10]: ist $G_\varepsilon$ die untere Grenze der elementargeometrischen Inhalte der $k$-dimensionalen Polyeder (endliche Simplexsummen), in welche sich die $k$-dimensionale Menge $M$ $\varepsilon$-deformieren läßt, so ist $\mu_M(M) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} G_\varepsilon$. Die letzte Ungleichung, in welcher man $\mu_M$ statt $\mu_L$ schreiben kann, zeigt zugleich, daß die Sätze 1 und 2 für $\mu_M$ nicht gelten.

[34]) Z. von Geöcze [Math. und naturw. Berichte aus Ungarn 26 (1908), S. 1—88] hat für Flächen sechs Maße $T_1 - T_6$ mit $\mu_L = T_1 = T_2 \leqq T_3 \leqq T_4 \leqq T_5 \leqq T_6$ definiert, die aus $\mu_L = T_1 = T_2$ durch einschränkende Voraussetzungen über die approximierenden Folgen $\{F^j\}$ (S. 766) hervorgehen. Für $T_6$ bestehen die Voraussetzungen darin, daß die Simplexecken der $F^j$ in $F$ liegen sollen, daß also die Simplexnetze $F^j$ der Fläche $F$ einbeschrieben sein sollen. Da für dehnungsbeschränkte topologische Flächen $F$ einbeschriebene Simplexnetze $F^j$ mit $\lim m(F^j) = I(\widetilde{F})$ existieren[32]), folgt $T_1(F) = \cdots = T_6(F) = I(\widetilde{F})$ für solche Flächen $F$.

5.2. Das $k$-dimensionale Flächenmaß $\mu_P$ im $R_n$ von G. Peano[35]). Definition. Der abgeschlossene Einheitswürfel $\widetilde{F}$ sei dargestellt als Summe $\widetilde{F}_1, \ldots, \widetilde{F}_u$ endlich vieler zu $\widetilde{F}$ homöomorpher Mengen $\widetilde{F}_\sigma$ mit der Eigenschaft, daß $m(\widetilde{F}_{\sigma'} \cdot \widetilde{F}_{\sigma''}) = 0$ ist für $\sigma' \neq \sigma''$ [36]). Für gleichviele $k$-dimensionale Ebenen $E_\sigma$ des $R_n$ werden die $u$ Projektionen $F_{\sigma E_\sigma}$ der Mengen $F_\sigma = \pi(\widetilde{F}_\sigma)$ in die Ebenen $E_\sigma$ betrachtet. Dann ist $\mu_P(F) = \text{Supr.}\,(m(F_{1 E_1}) + \cdots + m(F_{u E_u}))$ für alle Summendarstellungen $\widetilde{F} = \widetilde{F}_1 + \cdots + \widetilde{F}_u$ der genannten Art und alle $k$-dimensionalen Ebenen $E_1, \ldots, E_u$.

Wir behaupten zunächst die Ungleichung $\mu_P(F) \leqq I(\widetilde{F})$. In jedem $\widetilde{F}_\sigma$ ist eine analytische Menge $\widetilde{A}_\sigma$ enthalten, auf welcher die dehnungslose Abbildung $\pi$ umkehrbar eindeutig und das Bild $\pi(\widetilde{A}_\sigma) = A_\sigma$ gleich $F_\sigma$ ist[1]). Dann ist einerseits $m(F_{\sigma E_\sigma}) \leqq \mu_G(F_\sigma) = \mu_G(A_\sigma)$ für jede Ebene $E_\sigma$, da für jede Menge $B$ des $R_n$ die Ungleichung $m(B_E) \leqq \mu_G(B)$ gilt. Andererseits ist $\mu_G(A_\sigma) = I(\widetilde{A}_\sigma)$ nach Satz 2 und $I(\widetilde{A}_1) + \cdots + I(\widetilde{A}_u) \leqq I(\widetilde{F})$, da der Durchschnitt je zweier Mengen $\widetilde{A}_\sigma$ leer oder eine Lebesguesche Nullmenge ist. Also ist $m(F_{1 E_1}) + \cdots + m(F_{u E_u}) \leqq I(\widetilde{F})$ und somit

$$\mu_P(F) \leqq I(\widetilde{F}). \tag{74}$$

Zum Beweis der umgekehrten Ungleichung betrachten wir die Würfel $\widetilde{V}_1, \ldots, \widetilde{V}_t$ der Nr. 5.1 und fügen zu ihnen endlich viele weitere abgeschlossene Würfel $\widetilde{V}_{t+1}, \ldots, \widetilde{V}_u$ hinzu derart, daß $\widetilde{F} = \widetilde{V}_1 + \cdots + \widetilde{V}_u$ ist und die $\widetilde{V}_1, \ldots, \widetilde{V}_u$ zu je zwei höchstens einen $(k-1)$-dimensionalen Durchschnitt haben. Aus (70) und der in Nr. 5.1 bewiesenen Ungleichung $\sum_{\sigma=1}^{t} m(\alpha_\sigma(\widetilde{W}_\sigma)) \geqq I(\widetilde{F}) - \varepsilon \cdot (4s+1)$ folgt $\sum_{\sigma=1}^{t} m(V_{\sigma T_\sigma}) \geqq I(\widetilde{F}) - \varepsilon \cdot (4s+1)$. Also ist $\mu_P(F) \geqq I(\widetilde{F})$. Dies zusammen mit (74) ergibt

$$\mu_P(F) = I(\widetilde{F}). \tag{75}$$

5.3. Das erste $k$-dimensionale Flächenmaß $\mu'_R$ im $R_n$ von T. Radó[35]). Definition. Im Einheitswürfel $\widetilde{F}$ des $R_k$ sei ein System $\widetilde{F}_1, \ldots, \widetilde{F}_t$ endlich vieler, paarweise fremder[37]), zu $\widetilde{F}$ homöomorpher Mengen

---

[35]) Nach T. Radó, Über das Flächenmaß rektifizierbarer Flächen. Math. Annalen **100** (1928), S. 444–479. In dieser Arbeit wird die Gleichung $\mu'_R(F) = \mu''_R(F) = I(\widetilde{F})$ für $n = 3$; $k = 2$ bewiesen.

[36]) Die Formulierung bei T. Radó[35]) lautet: „Die Fläche wird in endlich viele Flächenstücke zerlegt". Genaueres wird über die Zerlegung nicht gesagt.

[37]) T. Radó[35]) verlangt, daß die $F_1, \ldots, F_t$ „nicht übereinander greifen", ohne dies genauer zu definieren. Vielleicht kann man dies auch dahin interpretieren, daß die $F_1, \ldots, F_t$ paarweise keine inneren Punkte gemein haben dürfen (man muß dann allerdings wohl noch verlangen, daß die Durchschnitte $F_{\sigma'} \cdot F_{\sigma''}$ leer oder Lebesguesche Nullmengen sind). Unsere Überlegungen in Nr. 5.3 und 5.5 bleiben auch bei dieser Interpretation richtig.

gegeben. Für jede Menge $F_\sigma = \pi(\widetilde{F}_\sigma)$ und jede $k$-dimensionale Ebene $E_\sigma$ des $R_n$ sei $\mathfrak{K}(F_{\sigma E_\sigma})$ der Kern der Projektion $F_{\sigma E_0}$ von $F_\sigma$ in $E_\sigma$, d. h. die Menge aller Punkte $p$ von $E_\sigma$ mit folgender Eigenschaft: Zu $p$ existiert eine positive Zahl $\delta(p)$, so daß $p$ enthalten ist in der Projektion $F'_{\sigma E_\sigma}$ jeder stetigen Fläche $F'_\sigma = \pi'(\widetilde{F}_\sigma)$, für welche der Abstand $\overline{\pi(\mathfrak{y})\,\pi'(\mathfrak{y})} \leqq \delta(p)$ ist für jeden Punkt $\mathfrak{y}$ aus $\widetilde{F}_\sigma$. Dann ist $\mu'_R = \text{Supr.}\left(m(\mathfrak{K}(F_{1E_1})) + \cdots + m(\mathfrak{K}(F_{tE_t}))\right)$ für alle Systeme $\widetilde{F}_1, \ldots, \widetilde{F}_t$ und alle Ebenen $E_1, \ldots, E_t$.

Man beweist die Ungleichung $\mu'_R(F) \leqq I(\widetilde{F})$ genau so wie (74); nur setzt man $m(\mathfrak{K}(F_{\sigma E_\sigma}))$ an Stelle von $m(F_{\sigma E_\sigma})$. Zum Beweis der umgekehrten Ungleichung wählt man wieder die paarweise fremden Würfel $V_1, \ldots, V_t$ der Nr. 5. 1. Aus (70) folgt, daß das Parallelepiped $\alpha_\sigma(\widetilde{W}_\sigma)$ im Kern $\mathfrak{K}(V_{\sigma T_\sigma})$ der Projektion $V_{\sigma T_\sigma}$ von $V_\sigma = \pi(\widetilde{V}_\sigma)$ in die Tangentialebene $T_\sigma$ enthalten ist. Hieraus folgt wie in Nr. 5. 2 $\mu'_R(F) \geqq I(\widetilde{F})$. Also gilt

$$\mu'_R(F) = I(\widetilde{F}). \tag{76}$$

5. 4. Ein $k$-dimensionales Flächenmaß $\mu_U$ im $R_n$ mit uns unbekanntem Ursprung[35]). Definition. Im $R_n$ liege ein festes, rechtwinkliges Koordinatensystem vor; es seien $E^1, \ldots, E^l$ die $l = \binom{k}{n}$ Koordinatenebenen der Dimension $k$. Es sei $\widetilde{F} = \widetilde{F}_1 + \cdots + \widetilde{F}_t$ wie in Nr. 5. 2[36]). Es sei $m_{\sigma\lambda}$ der Lebesguesche Inhalt der Projektion $F_{\sigma E^\lambda}$ von $F_\sigma$ in $E^\lambda$. Dann ist das Maß $\mu_U(F) = \text{Supr.} \sum_{\sigma=1}^{u} \sqrt{m_{\sigma 1}^2 + \cdots + m_{\sigma l}^2}$ für alle Darstellungen $F = \widetilde{F}_1 + \cdots + \widetilde{F}_u$.

Analog wie (74) beweist man jetzt $\mu_U(F) \leqq I(\widetilde{F})$, indem man statt wie in Nr. 5. 2 die Ungleichung $m(F_{\sigma E_\sigma}) \leqq \mu_G(F_\sigma)$ jetzt die Ungleichung $\sqrt{m_{\sigma 1}^2 + \cdots + m_{\sigma l}^2} \leqq \mu_J(F_\sigma)$ benutzt, welche daraus folgt, daß für jede Quaderdarstellung (Nr. 3. 7) $\sqrt{m_{\sigma 1}^2 + \cdots + m_{\sigma l}^2} \leqq T_\varkappa(F_\sigma)$ ist[24]). Also ist

$$\mu_U(F) \leqq I(\widetilde{F}). \tag{77}$$

Zum Beweis der umgekehrten Ungleichung bestätigt man zunächst genau wie (69) folgende schärfere Behauptung: Ist $d_0$ hinreichend klein, so wird die Projektion $(\alpha(\widetilde{W}))_{E^\lambda}$ durch $V_{E^\lambda}$ mit dem Grade $\pm 1$ überdeckt, falls $E^\lambda$ auf der $\alpha(\widetilde{W})$ enthaltenden Tangentialebene $T$ nicht senkrecht steht ($\lambda = 1, \ldots, l$). Entsprechend verschärft man (70). Nun wählen wir die Würfel $\widetilde{V}_1, \ldots, \widetilde{V}_u$ wie in Nr. 5. 2. Dann folgt aus der verschärften Beziehung (70), daß $(\alpha_\sigma(\widetilde{W}_\sigma))_{E^\lambda}$ im Kern $\mathfrak{K}(V_{\sigma E^\lambda})$ von $V_{\sigma E^\lambda}$ enthalten ist ($\sigma = 1, \ldots, t$), wenn $E^\lambda$ zu $T_\sigma$ nicht senkrecht ist; ist jedoch $E^\lambda$ zu $T_\sigma$ senkrecht, so ist $m\left((\alpha_\sigma(\widetilde{W}_\sigma))_{E^\lambda}\right) = 0$. Mithin gilt $m(\mathfrak{K}(V_{\sigma L^\lambda})) \geqq m\left((\alpha_\sigma(\widetilde{W}_\sigma))\right)_{E^\lambda} = c(E^\lambda) \cdot m(\alpha_\sigma(\widetilde{W}_\sigma))$ für jedes $\sigma = 1, \ldots, t$

und jedes $\lambda = 1, \ldots, l$. Also ist $\sqrt{\sum_{\lambda=1}^{l}\left(m(\mathfrak{K}(V_{\sigma E^\lambda}))\right)^2} \geqq m(\alpha_\sigma(\widetilde{W}_\sigma))$ [23]. Hieraus folgt $\mu_U(F) \geqq \sum m(\alpha_\sigma(\widetilde{W}_\sigma))$ und hieraus analog wie in Nr. 5.3 jetzt die Ungleichung $\mu_U(F) \geqq I(\widetilde{F})$. Dies zusammen mit (77) ergibt

$$\mu_U(F) = I(\widetilde{F}). \tag{78}$$

5.5. Das zweite $k$-dimensionale Flächenmaß $\mu_R''$ im $R_n$ von T. Radó [35]. Die Definition lautet genau so wie die für $\mu_U$, nur verwendet man erstens Systeme $\widetilde{F}_1, \ldots, \widetilde{F}_t$ wie in Nr. 5.3 [37]), und zweitens die Inhalte $m(\mathfrak{K}(F_{\sigma E^\lambda}))$ der Kerne an Stelle der Inhalte $m(F_{\sigma E^\lambda}) = m_{\sigma\lambda}$.

Wie in Nr. 5.4 die Ungleichung (77), beweist man jetzt die Ungleichung $\mu''(F) \leqq I(\widetilde{F})$. Die umgekehrte Ungleichung beweist man genau wie die entsprechende Ungleichung in Nr. 5.4, nur beschränkt man sich dabei auf die Würfel $\widetilde{V}_1, \ldots, \widetilde{V}_t$ der Nr. 5.1. Also gilt

$$\mu_R''(F) = I(\widetilde{F}). \tag{79}$$

(Eingegangen am 5. Juli 1942.)