Über die „Polynom-Kerne" der linearen Integralgleichungen.

Von

Stefan Fenyö in Budapest, Ungarn.

Herr T. Satô[1]) hat in einer Arbeit das Eigenwertproblem der Kerne von der Form

$$Q(x, y) = K_n(x, y) + a_1 K_{n-1}(x, y) + \cdots + a_{n-1} K(x, y)$$

behandelt. Dabei sind die mit $K_n(x, y)$ iterierten Kerne von $K(x, y)$ im Bereiche

$$D : \begin{bmatrix} 0 \leqq x \leqq 1 \\ 0 \leqq y \leqq 1 \end{bmatrix}.$$

Im folgenden wollen wir den lösenden Kern von Q untersuchen. Die befolgte Methode ist geeignet, das Ergebnis von Herrn Satô in äußerst einfacher Weise abzuleiten. Deshalb wollen wir uns im ersten Teil unserer Arbeit mit den Eigenfunktionen von Q beschäftigen und im zweiten eine Formel für den lösenden Kern von Q angeben. Unsere Resultate sind Verallgemeinerungen wohlbekannter Sätze.

Wir wollen für jeden beliebigen stetigen Kern $K(x, y)$ die Funktionaloperation

$$\mathfrak{K} u = \int_0^1 K(x, y)\, u(y)\, dy$$

einführen. Entsprechend sei $\mathfrak{K}^n$ der zum Kern $K_n(x, y)$ gehörende Operator.

Falls $N(x, y)$ und $M(x, y)$ zwei beliebige, in D definierte stetige Kerne sind, und die ihnen entsprechenden Operatoren $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{M}$, ist gemäß dem Volterraschen Operatorenkalkül[2])

$$(a + b\,\mathfrak{N}) \cdot \mathfrak{M} = a\,\mathfrak{M} + b\,\mathfrak{N} \cdot \mathfrak{M},$$

a und b sind beliebige Konstanten, und dem Operator $\mathfrak{N} \cdot \mathfrak{M}$ entspricht der Kern $\int_0^1 N(x, t)\, M(t, y)\, dt$.

---

[1]) T. Satô, Proc. of the Phys. Math. Society of Japan (3) **23** (1941), S. 1.

[2]) V. Volterra, Atti d. Reale Acc. dei Lincei **20** (1911); J. Soula, L'équation intégrale de première espèce à limites fixes et les fonctions permutables à limites fixes. Paris **1936**. S. 44.

1. Nun betrachten wir die homogene Integralgleichung

$$\text{(I)} \qquad \varphi(x) - \lambda \int_0^1 Q(x, y)\, \varphi(y)\, dy = 0.$$

Sie läßt sich in folgende Form setzen:

$$P(\mathfrak{K}) \cdot \varphi \equiv \left(\mathfrak{K}^n + a_1 \mathfrak{K}^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \mathfrak{K} - \frac{1}{\lambda}\right) \cdot \varphi = 0.$$

Sind $r_1, r_2, \ldots, r_n$ die Wurzeln der algebraischen Gleichung

$$P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x - \frac{1}{\lambda} = 0,$$

so ist unsere Gleichung

$$P(\mathfrak{K}) \cdot \varphi \equiv (\mathfrak{K} - r_1)(\mathfrak{K} - r_2) \ldots (\mathfrak{K} - r_n) \cdot \varphi = 0.$$

Setzt man

$$\varphi_k = (\mathfrak{K} - r_{k+1})(\mathfrak{K} - r_{k+2}) \ldots (\mathfrak{K} - r_n)\, \varphi; \quad \varphi_n \equiv \varphi; \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

so kann die Gleichung in der Gestalt

$$(\mathfrak{K} - r_1) \cdot \varphi_1 = 0$$

geschrieben werden. Ist $\frac{1}{r_1}$ kein Eigenwert von K, so besitzt diese Gleichung die einzige Lösung $\varphi_1 \equiv 0$. Dann ist aber

$$(\mathfrak{K} - r_2) \cdot \varphi_2 = \varphi_1 \equiv 0.$$

Diese Gleichung hat auch nur die triviale Lösung $\varphi_2 \equiv 0$, falls $\frac{1}{r_2}$ kein Eigenwert von K ist. Wird dieses Verfahren fortgesetzt, so ergibt sich, daß die Gleichung (I) nur die triviale Lösung $\varphi \equiv 0$ besitzt, wenn keine der Zahlen $\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}, \ldots, \frac{1}{r_n}$ Eigenwert von $K(x, y)$ ist. λ kann also nur dann ein Eigenwert von Q sein, wenn mindestens eine der Zahlen $\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}, \ldots, \frac{1}{r_n}$ ein Eigenwert von K ist. Dann aber ist λ auch wirklich ein Eigenwert von $Q(x, y)$. Denn sei z. B. $\frac{1}{r_1}$ ein Eigenwert von K und $\omega(x)$ eine beliebige zu $\frac{1}{r_1}$ gehörige Eigenfunktion, so ist

$$\int_0^1 Q(x, y)\, \omega(y)\, dy - \frac{1}{\lambda}\, \omega(x) = \left(\mathfrak{K}^n + a_1 \mathfrak{K}^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \mathfrak{K} - \frac{1}{\lambda}\right) \cdot \omega$$
$$= \left(r_1^n + a_1\, r_1^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r_1 - \frac{1}{\lambda}\right) \cdot \omega(x) = 0.$$

Es besteht also der

Satz 1[1]**.** *Ist λ ein Eigenwert von Q, so ist wenigstens eine der Lösungen der Gleichung*

$$\text{(1)} \qquad P\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

ein Eigenwert von K, und umgekehrt: besitzt K einen Eigenwert, der die Gleichung (1) *befriedigt, so ist λ ein Eigenwert von Q.*

Die zu $\frac{1}{r}$ gehörigen Eigenfunktionen von K sind auch Eigenfunktionen von Q. Aber damit sind die zu λ gehörigen Eigenfunktionen von Q noch nicht erschöpft. Zu ihrem allgemeinen Ausdruck gelangt man wie folgt:

Unter den Lösungen von (1) seien nur $\frac{1}{r_{\nu+1}}, \frac{1}{r_{\nu+2}}, \ldots, \frac{1}{r_n}$ Eigenwerte von K, so daß $\varphi_1 \equiv \varphi_2 \equiv \varphi_3 \equiv \cdots \equiv \varphi_\nu \equiv 0$ ist. Es gibt aber eine nicht identisch verschwindende Funktion $\varphi_{\nu+1}$, für welche

$$(\mathfrak{K} - r_{\nu+1}) \cdot \varphi_{\nu+1} = 0$$

gilt. Dann ist aber

$$(\mathfrak{K} - r_{\nu+2}) \cdot \varphi_{\nu+2} = \varphi_{\nu+1}. \tag{2}$$

Da $r_{\nu+1} \neq r_{\nu+2}$ [3]) angenommen werden kann, ist diese inhomogene Integralgleichung lösbar. Denn die zu $\frac{1}{r_{\nu+2}}$ gehörenden Eigenfunktionen des Operators $\bar{\mathfrak{K}}$ [4]) sind zu $\varphi_{\nu+1}$ orthogonal.

Wir bezeichnen mit $\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_m; y_1, \ldots, y_m; \tau)$ den m-ten FREDHOLMschen Minor von K [5]). Der Rang [5]) von $\frac{1}{r_{\nu+l}}$ sei $\varrho_{\nu+l}$.

Wir betrachten den Operator $\mathfrak{H}_{\nu+l}$, dessen Kern

$$H\left(x, y; \frac{1}{r_{\nu+l}}\right) = \frac{\Delta\left(x, x_1, x_2, \ldots, x_{\varrho_{\nu+l}}; y, y_1, y_2, \ldots, y_{\varrho_{\nu+l}}; \frac{1}{r_{\nu+l}}\right)}{\Delta\left(x_1, x_2, \ldots, x_{\varrho_{\nu+l}}; y_1, y_2, \ldots y_{\varrho_{\nu+l}}; \frac{1}{r_{\nu+l}}\right)}$$

ist; $x_1, x_2, \ldots, x_{\varrho_{\nu+l}}; y_1, \ldots, y_{\varrho_{\nu+l}}$ gehören dem Intervall $[0,1]$ an. Dann ist, wie bekannt, die Lösung der inhomogenen Gleichung (2)

$$\varphi_{\nu+2} = -\frac{1}{r_{\nu+2}}\left(1 + \frac{1}{r_{\nu+2}} \mathfrak{H}_{\nu+2}\right) \cdot \varphi_{\nu+1}.$$

$\varphi_{\nu+2}$ kann nicht identisch verschwinden, falls $\varphi_{\nu+1} \not\equiv 0$ ist. Der folgende Schritt unseres Verfahrens liefert die Gleichung

$$(\mathfrak{K} - r_{\nu+3}) \cdot \varphi_{\nu+3} = \varphi_{\nu+2}. \tag{3}$$

---

[3]) Wenn nämlich $r_{\nu+1} = r_{\nu+2}$ wäre, so wählen wir $\varphi_{\nu+1} \equiv 0$ und beginnen den Prozeß bei $\varphi_{\nu+2}$.

[4]) $\bar{\mathfrak{K}}$ ist der zum Kern $K(y, x)$ gehörige Operator.

[5]) G. VIVANTI - F. SCHWANK, Elemente der Theorie der linearen Integralgleichungen, S. 107. Hannover 1929.

Vorausgesetzt, daß $r_{\nu+3} \neq r_{\nu+2}$, ist *jede* zu $\frac{1}{r_{\nu+3}}$ gehörende Eigenfunktion $\psi_{\nu+3}$ von $\overline{\mathfrak{K}}$ orthogonal zu $\varphi_{\nu+2}$. Dies beweisen wir wie folgt: Wenn wir beide Seiten der Gleichung (2) mit $\psi_{\nu+3}$ multiplizieren und integrieren, so wird

$$\int_0^1\int_0^1 \psi_{\nu+3}(x)\,K(x,y)\,\varphi_{\nu+2}(y)\,dx\,dy - r_{\nu+2}\cdot\int_0^1 \psi_{\nu+3}(x)\,\varphi_{\nu+2}(x)\,dx = 0.$$

Gemäß der Definition von $\psi_{\nu+3}$ ist

$$(r_{\nu+3}-r_{\nu+2})\cdot\int_0^1 \psi_{\nu+3}(x)\,\varphi_{\nu+2}(x)\,dx = 0.$$

Daraus folgt

$$\int_0^1 \psi_{\nu+3}(x)\,\varphi_{\nu+2}(x)\,dx = 0.$$

Die Gleichung (3) läßt sich also lösen, und zwar erhält man

$$\begin{aligned}\varphi_{\nu+3} &= -\frac{1}{r_{\nu+3}}\left(1+\frac{1}{r_{\nu+3}}\mathfrak{H}_{\nu+3}\right)\varphi_{\nu+2}\\ &= \frac{1}{r_{\nu+2}\cdot r_{\nu+3}}\left(1+\frac{1}{r_{\nu+2}}\mathfrak{H}_{\nu+2}+\frac{1}{r_{\nu+3}}\mathfrak{H}_{\nu+3}+\frac{1}{r_{\nu+2}\cdot r_{\nu+3}}\mathfrak{H}_{\nu+2}\cdot\mathfrak{H}_{\nu+3}\right)\cdot\varphi_{\nu+1}.\end{aligned}$$

Nach $n-\nu$ Schritten gelangen wir zur Lösung

$$\begin{aligned}\varphi = \frac{(-1)^{n-\nu+1}}{r_{\nu+2}\cdot r_{\nu+3}\cdots r_n}\Big[1&+\left(\frac{1}{r_{\nu+2}}\mathfrak{H}_{\nu+2}+\frac{1}{r_{\nu+3}}\mathfrak{H}_{\nu+3}+\cdots+\frac{1}{r_n}\mathfrak{H}_n\right)+\\ &+\left(\frac{1}{r_{\nu+2}\cdot r_{\nu+3}}\mathfrak{H}_{\nu+2}\cdot\mathfrak{H}_{\nu+3}+\frac{1}{r_{\nu+2}\,r_{\nu+4}}\mathfrak{H}_{\nu+2}\cdot\mathfrak{H}_{\nu+4}+\cdots+\right.\\ &\left.+\frac{1}{r_{n-1}\,r_n}\mathfrak{H}_{n-1}\cdot\mathfrak{H}_n\right)+\cdots+\frac{1}{r_{\nu+2}\cdot r_{\nu+3}\cdots r_n}\mathfrak{H}_{\nu+2}\cdot\mathfrak{H}_{\nu+3}\cdots\mathfrak{H}_n\Big]\cdot\varphi_{\nu+1}.\end{aligned}$$

Da φ eine Eigenfunktion von Q ist, kann man den konstanten Faktor weglassen. Ist nun im allgemeinen Φ_p eine zu $\frac{1}{r_{\nu+p}}$ gehörige Eigenfunktion von K, so ist

$$\begin{aligned}(4)\qquad \varphi = \Big[1&+\sum_{l}^{1,n}{}'\frac{1}{r_{\nu+l}}\mathfrak{H}_{\nu+l}+\sum_{l<s}^{1,n}{}'\frac{1}{r_{\nu+l}\cdot r_{\nu+s}}\mathfrak{H}_{\nu+l}\cdot\mathfrak{H}_{\nu+s}+\cdots+\\ &+\frac{1}{r_{\nu+1}\cdots r_{\nu+p-1}\,r_{\nu+p+1}\cdots r_n}\mathfrak{H}_{\nu+1}\cdots\mathfrak{H}_{\nu+p-1}\cdot\mathfrak{H}_{\nu+p+1}\cdots\mathfrak{H}_n\Big]\Phi_p\end{aligned}$$

eine Eigenfunktion von Q. Mit Σ' bezeichnen wir die Summierung über alle Zeiger mit Ausnahme von p.

Wenn die Gleichung (1) mehrfache Wurzeln besitzt, welche Eigenwerte von K sind, so bleibt die Formel (4) gültig, jedoch bezeichnen $r_{\nu+1}, \ldots, r_n$ die verschiedenen Wurzeln von $P(x)$, deren reziproke Eigenwerte von K sind.

Aus der Formel (4) folgt, daß, wenn K nur einen die Gleichung (1) befriedigenden Eigenwert besitzt, die Gleichung (I) keine anderen nichttrivialen Lösungen hat als die Funktionen Φ_p.

Aus Satz 1 folgt die wohlbekannte Tatsache, daß, falls μ^n ein Eigenwert von K_n ist, wenigstens eine der Zahlen $\varepsilon^l \cdot \mu$ ($l = 0, 1, 2, \ldots n$; $\varepsilon^n = 1$) ein Eigenwert von K ist.

Sind die Kerne $K^{(1)}, K^{(2)}, \ldots, K^{(n)}$ vertauschbar[6]) und $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ beliebige Konstanten, so betrachten wir die Integralgleichung

$$\text{(II)} \qquad \varphi(x) - \int_0^1 \Big[\sum_r^{1,n} \lambda_r K^{(r)}(x, y) - \sum_{r<s}^{1,n} \lambda_r \lambda_s K^{(r,s)}(x, y) + \\ + \sum_{r<s<t}^{1,n} \lambda_r \lambda_s \lambda_t K^{(r,s,t)}(x, y) \mp \cdots + \\ + (-1)^{n-1} \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n K^{(1,2,\ldots n)}(x, y) \Big] \varphi(y)\, dy = 0,$$

wo

$$K^{(i_1, i_2, \ldots, i_p)}(x, y) = \underbrace{\int_0^1 \cdots \int_0^1}_{(p-1)} K^{(i_1)}(x\, t_1) K^{(i_2)}(t_1\, t_2) \ldots K^{(i_p)}(t_{p-1}, y)\, dt_1\, dt_2 \ldots dt_{p-1}$$

ist.

Satz 2. *Die Gleichung* (II) *besitzt nur in dem Falle eine nicht triviale Lösung, wenn mindestens ein λ_p ein Eigenwert von $K^{(p)}$ ist.*

Den Kernen $K^{(p)}(x,y)$ mögen die Operatoren $\mathfrak{K}_p$ ($p = 1, 2, \ldots, n$) entsprechen. Dann setzen wir die Gleichung (II) in die Form

$$(\lambda_1 \mathfrak{K}_1 - 1)(\lambda_2 \mathfrak{K}_2 - 1) \ldots (\lambda_n \mathfrak{K}_n - 1) \cdot \varphi = 0.$$

Man kann nun den Satz 2 ebenso beweisen wie den Satz 1.

Im Falle $n = 2$ und $\lambda_1 = \lambda_2$ ergibt unser Satz den Satz des Herrn Satô[7]).

Wählen wir die Kerne $K^{(1)}, K^{(2)}, \ldots, K^{(n)}$ paarweise orthogonal, so folgt aus Satz 2 der bekannte

Satz 3[8]). *Sind die Kerne $K^{(1)}, K^{(2)}, \ldots, K^{(n)}$ paarweise orthogonal, so erhält man die Eigenwerte von*

$$K = K^{(1)} + K^{(2)} + \cdots + K^{(n)},$$

indem man die Eigenwerte von $K^{(1)}, \ldots, K^{(n)}$ zusammennimmt.

Betrachten wir den Fall $n = 2$ und sei λ_1 ein Eigenwert von $K^{(1)}$, φ eine zu λ_1 gehörende beliebige Eigenfunktion, dann folgt aus Satz 3:

$$\varphi = \varphi + \lambda \mathfrak{K}_2\, \varphi;$$

nun ist $\mathfrak{K}_2\, \varphi \equiv 0$.

---

6) Soula, l. c., S. 44.

7) T. Satô, The Tôhoku Math. J. 38, II (1933) S. 179.

8) Vivanti-Schwank, l. c., S. 130.

Corollar: Wenn $K^{(1)}$ und $K^{(2)}$ orthogonale Kerne sind, dann ist jede Eigenfunktion von $K^{(1)}$ zu $K^{(2)}$ orthogonal und umgekehrt.

2. Betrachten wir die der homogenen Gleichung (I) entsprechende inhomogene Gleichung

$$\text{(III)} \quad \int_0^1 [K_n(x, y) + a_1 K_{n-1}(x, y) + \cdots + a_{n-1} K(x, y)] \cdot \varphi(y)\, dy + \\ + a_n \varphi(x) = f(x) \qquad (f(x) \not\equiv 0).$$

Sie läßt sich in die Form setzen

$$(\mathfrak{K} - r_1)(\mathfrak{K} - r_2) \ldots (\mathfrak{K} - r_n)\, \varphi = f.$$

Diese Gleichung ist im allgemeinen nur dann lösbar, wenn $-\frac{1}{a_n}$ kein Eigenwert von Q ist; das erfolgt nach Satz 1 nur dann, wenn K unter den Zahlen $\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}, \ldots, \frac{1}{r_n}$ keinen Eigenwert hat. Der lösende Kern von $K(x, y)$ für den Parameterwert $\frac{1}{r_i}$ sei $R\left(x, y; \frac{1}{r_i}\right)$; der entsprechende Operator $\mathfrak{R}_i$. Dann ist

$$(\mathfrak{K} - r_1)\, \varphi_1 = f;$$

daraus folgt

$$\varphi_1 = -\frac{1}{r_1}(\mathfrak{R}_1 + r_1) \cdot f.$$

Also wird

$$\varphi = \frac{(-1)^n}{r_1^n r_2^n \ldots r_n^n}(\mathfrak{R}_1 + r_1)(\mathfrak{R}_2 + r_2) \ldots (\mathfrak{R}_n + r_n) \cdot f$$
$$= \frac{(-1)^n}{a_n^2}(\mathfrak{R}_1 + r_1)(\mathfrak{R}_2 + r_2) \ldots (\mathfrak{R}_n + r_n) \cdot f.$$

Bezeichnet $S(x, y; \lambda)$ (der ihm entsprechende Operator sei $\mathfrak{S}$) den lösenden Kern $Q - s$, so bekommt man

$$\varphi = -\frac{1}{a_n^2}(\mathfrak{S} - a_n) \cdot f.$$

Das ergibt

$$-\frac{1}{a_n^2}(\mathfrak{S} - a_n) = \frac{(-1)^n}{a_n^2}(\mathfrak{R}_1 + r_1)(\mathfrak{R}_2 + r_2) \ldots (\mathfrak{R}_n + r_n),$$

nun ist

$$\mathfrak{S} = (-1)^n (\mathfrak{R}_1 + r_1)(\mathfrak{R}_2 + r_2) \ldots (\mathfrak{R}_n + r_n).$$

Falls alle Zahlen $\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}, \ldots, \frac{1}{r_n}$ verschieden sind, betrachtet man die wohlbekannte Identität

$$\int_0^1 R\left(x, t; \frac{1}{r_\nu}\right) R\left(t, y; \frac{1}{r_\mu}\right) dt = \frac{R\left(x, y; \frac{1}{r_\nu}\right) - R\left(x, y; \frac{1}{r_\mu}\right)}{\frac{1}{r_\nu} - \frac{1}{r_\mu}} = \frac{R_\nu - R_\mu}{\sigma_\nu - \sigma_\mu} \qquad (\nu \neq \mu)$$

ganz allgemein

$$\int_0^1 \ldots_{(n-1)} \int_0^1 R(x,t_1;\sigma_1)\,R(t_1,t_2;\sigma_2)\ldots R(t_{n-1},y;\sigma_n)\,dt_1\,dt_2\ldots dt_{n-1} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \ldots & \sigma_n \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \ldots & \sigma_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \sigma_1^{n-2} & \sigma_2^{n-2} & \ldots & \sigma_n^{n-2} \\ R_1 & R_2 & \ldots & R_n \end{vmatrix}}{V(\sigma_1\,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)}.$$

$V(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)$ ist die VANDERMONDEsche Determinante der Größen $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n$.

Nun ergibt sich für den lösenden Kern von Q

$$S\left(x,y;-\frac{1}{a_n}\right) = -\left[\sigma_1 R_1+\sigma_2 R_2+\cdots+\sigma_n R_n+\sigma_1\sigma_2\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ R_1 & R_2\end{vmatrix}}{V(\sigma_1,\sigma_2)}+\right.$$

$$+\cdots+\sigma_{n-1}\sigma_n\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ R_{n-1} & R_n\end{vmatrix}}{V(\sigma_{n-1}\;\sigma_n)}+$$

$$\left.+\cdots+\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \ldots & \sigma_n \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \sigma_1^{n-2} & \sigma_2^{n-2} & \ldots & \sigma_n^{n-2} \\ R_1 & R_2 & \ldots & R_n \end{vmatrix}}{V(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)}\right]a_n.$$

In dieser Formel ist der Koeffizient von R_1

$$c_1 = -\sigma_1 a_n\left[1-\sum_{r}^{2,n}\frac{\sigma_r}{\sigma_r-\sigma_1}+\sum_{r<s}^{2,n}\frac{\sigma_r}{\sigma_r-\sigma_1}\cdot\frac{\sigma_s}{\sigma_s-\sigma_1}\mp\cdots+\right.$$

$$\left.+(-1)^{n-1}\frac{\sigma_2}{\sigma_2-\sigma_1}\cdot\frac{\sigma_3}{\sigma_3-\sigma_1}\cdots\frac{\sigma_n}{\sigma_n-\sigma_1}\right]$$

$$=\sigma_1\sigma_n\prod_{r=2}^{n}\left(1-\frac{\sigma_r}{\sigma_r-\sigma_1}\right)=(-1)^n\sigma_1^n a_n\prod_{r=2}^{n}\frac{1}{\sigma_r-\sigma_1}.$$

Nun ist allgemein

$$c_p=(-1)^n\sigma_p\cdot a_n\prod_{r=1}^{n}{}'\frac{1}{\sigma_r-\sigma_p}\qquad(p=1,2\ldots n).$$

Dabei bezeichnen wir mit Π' die Multiplikation über alle Zeiger mit Ausnahme von p.

Satz 4. *Der lösende Kern von Q läßt sich durch den lösenden Kern von $K(x,y)$ folgendermaßen ausdrücken:*

$$S\left(x,y;-\frac{1}{a_n}\right)=(-1)^n a_n\cdot\sum_{p=1}^{n}\sigma_p^n\prod_{r=1}^{n}{}'\frac{R(x,y;\sigma_p)}{\sigma_r-\sigma_p}.$$

Die Integralgleichung

$$\varphi(x)-\int_0^1 K_n(x,y)\,\varphi(y)\,dy=f(x)$$

ist ein besonderer Fall der Gleichung (III). Jetzt ist $a_n = -1$; $\sigma_p = \varepsilon^{n-p+1}$ $(p = 1, 2, \ldots, n;\ \varepsilon^n = 1)$ und

$$c_p = (-1)^{n+1} \cdot \varepsilon^{n(n-p+1)} \prod_{r=1}^{n}{}' \frac{1}{\varepsilon^{n-r+1} - \varepsilon^{n-p+1}}$$

$$= (-1)^{n+1} \cdot \varepsilon^{p-1} \cdot \prod_{r=1}^{n}{}' \frac{1}{\varepsilon^{p-r} - 1} = (-1)^{n+1} \cdot (-1)^{n-1} \frac{\varepsilon^{p-1}}{n} = \frac{\varepsilon^{p-1}}{n} \text{ [9]}.$$

Corollar:

$$R^{(n)}(x, y; 1) = \frac{1}{n} [R(x, y; 1) + \varepsilon R(x, y; \varepsilon) + \cdots + \varepsilon^{n-1} R(x, y; \varepsilon^{n-1})].$$

Dabei ist $R^{(n)}$ die Resolvente von K_n. Das ist ein klassisches, schon von Fredholm herrührendes Resultat [10].

Mit der bisher befolgten Methode kann man noch ein anderes bekanntes Ergebnis verallgemeinern. Zu diesem Zwecke betrachten wir die der Gleichung (II) entsprechende inhomogene Gleichung

$$\text{(IV)} \quad \varphi(x) - \int_0^1 \Big[\sum_{r}^{1,n} \lambda_r K^{(r)}(x, y) - \sum_{r<s}^{1,n} \lambda_r \lambda_s K^{(r,s)}(x, y) \pm$$
$$\pm \cdots + (-1)^{n-1} \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n K^{(1,2,\ldots n)}(x, y)\Big] \varphi(y)\, dy = f(x) \quad (f(x) \not\equiv 0).$$

Aus der Zerlegung

$$(\lambda_1 \mathfrak{K}_1 - 1)(\lambda_2 \mathfrak{K}_2 - 1) \ldots (\lambda_n \mathfrak{K}_n - 1) \cdot \varphi = f$$

folgt, daß diese Gleichung im allgemeinen nur dann eine Lösung besitzt, falls λ_p $(p = 1, 2, \ldots, n)$ kein Eigenwert von $K^{(p)}$ ist.

Die Lösung erhalten wir in der folgenden Weise:

Aus der Gleichung

$$(\lambda_1 \mathfrak{K}_1 - 1)\, \varphi_1 = f$$

folgt

$$\varphi_1 = -(\lambda_1 \mathfrak{R}_1 + 1) \cdot f;$$

dabei ist $\mathfrak{R}_1$ der Operator des lösenden Kernes von $K^{(1)}$ an der Parameterstelle $\lambda = \lambda_1$.

---

[9]) Der Ausdruck $(\varepsilon - 1)(\varepsilon^2 - 1) \ldots (\varepsilon^{n-1} - 1)$ ist der Wert des Polynoms

$$\pi(x) = \prod (\varepsilon^r - x) = (-1)^{n-1} \frac{x^n - 1}{x - 1} = (-1)^{n-1} (x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + 1)$$

an der Stelle $x = 1$. Nun ist aber $\pi(1) = (-1)^{n-1} \cdot n$.

[10]) Implizite schon bei Fredholm, C. R. Paris **134**, S. 156 und Acta Math. **27**. Für $n = 2$ bei D. Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, S. 70. Leipzig 1912. Voller Beweis bei J. Plemelj, Monatshefte f. Math. **15** (1904), S. 125 und E. Goursat, Toulouse Ann. (2) **10** (1908), S. 15.

Nun ist die Lösung von (IV)

$$\varphi = (-1)^n (\lambda_1 \mathfrak{R}_1 + 1)(\lambda_2 \mathfrak{R}_2 + 1) \ldots (\lambda_n \mathfrak{R}_n + 1) \cdot f.$$

Wir benutzen dieses Ergebnis zur Umkehrung der Gleichung (4). Dazu bemerken wir, daß die Lösung der Gleichung

$$\varphi_{\nu+2} = -\frac{1}{r_{\nu+2}}\left(1 + \frac{1}{r_{\nu+2}} \mathfrak{H}_{\nu+2}\right) \cdot \varphi_{\nu+1}$$

die folgende ist:

$$\varphi_{\nu+1} = (\mathfrak{K} - r_{\nu+2}) \cdot \varphi_{\nu+2}.$$

Also kann man den Operator $\mathfrak{K}$ als den lösenden Operator von $\mathfrak{H}_{\nu+2}$ (allgemein von $\mathfrak{H}_{\nu+l}$) betrachten. Nun ist die Umkehrung der Formel (4):

$$\Phi_1 = \left(\frac{1}{r_{\nu+2}} \mathfrak{K} - 1\right)\left(\frac{1}{r_{\nu+3}} \mathfrak{K} - 1\right) \ldots \left(\frac{1}{r_n} \mathfrak{K} - 1\right) \cdot \varphi.$$

Satz 5. *Ist φ eine beliebige zu λ gehörige Eigenfunktion von Q, so ist*

$$\Phi = \varphi(x) + p_1 \int_0^1 K(x, y)\, \varphi(y)\, dy + p_2 \int_0^1 K_2(x, y)\, \varphi(y)\, dy + \\ + \cdots + p_{n-\nu-2} \int_0^1 K_{n-\nu-2}(x, y)\, \varphi(y)\, dy$$

eine Eigenfunktion von K, wobei

$$p_1 = -\sum_i^{1,\, n-\nu}{}' \frac{1}{r_{\nu+i}}; \quad p_2 = +\sum_{i<k}^{1,\, n-\nu} \frac{1}{r_{\nu+i} \cdot r_{\nu+k}}; \quad \ldots;$$

$$p_{n-\nu-2} = \frac{(-1)^{n-\nu-1}}{r_{\nu+1}\, r_{\nu+2} \cdots r_{\nu+q-1}\, r_{\nu+q+1} \cdots r_n}$$

ist. Sie gehört zum Eigenwert $\frac{1}{r_{\nu+q}}$ [11]).

Für den Kern K_n wurde der Satz von GOURSAT [12]) bewiesen.

---

[11]) Σ' bezeichnet die Addierung über alle Zeiger mit Ausnahme von q.

[12]) GOURSAT, Cours d'Analyse III, S. 399.

(Eingegangen am 8. Dezember 1941.)