Das Lucassche Ehepaarproblem.

Von

Waldemar Schöbe in Stuttgart, z. Zt. im Felde.

Ein auch in zusammenfassenden Werken mehrfach behandeltes, aber noch nicht erledigtes kombinatorisches Problem ist die folgende Aufgabe von LUCAS[1]): Auf wieviele Arten können um einen Tisch mit $2n$ Stühlen n Ehepaare derart Platz nehmen, daß jeder Mann zwischen zwei Frauen, aber kein Mann neben seiner Ehefrau sitzt?

Mit A_n soll die Anzahl der Sitzordnungen bezeichnet werden, die die Männer entsprechend der Bedingung des Problems einnehmen können, nachdem zuvor die Frauen, jeden zweiten Stuhl freilassend, irgendwie Platz genommen haben. Um für A_n eine Rekursionsformel abzuleiten, werden noch zwei andere Anzahlfunktionen betrachtet: die Anzahl B_n der Sitzordnungen der Männer derart, daß ein bestimmter Mann auf einer bestimmten Seite neben seiner Ehefrau, die übrigen Männer aber nicht neben ihren Ehefrauen sitzen, und die Anzahl C_n all der Sitzordnungen, bei denen ein bestimmter Mann auf einer bestimmten Seite neben seiner Ehefrau, irgendein weiterer Mann auf irgendeiner Seite neben seiner Ehefrau und alle übrigen Männer nicht neben ihren Ehefrauen sitzen. Dann gelten die Rekursionsformeln

$$
\begin{aligned}
A_{n+1} &= (n-2)\,A_n + (3n-4)\,B_n + C_n,\\
B_{n+1} &= A_n + B_n,\\
C_{n+1} &= \phantom{(n-2)\,A_n + {}}(2n-1)\,B_n + C_n.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Hiernach muß jede Anzahlfunktion einer linearen homogenen Rekursionsformel 3. Ordnung genügen. Für B_n wird diese besonders einfach:

$$B_{n+2} = n\,B_{n+1} + n\,B_n + B_{n-1}. \tag{2}$$

Die Anfangswerte sind $A_2 = 0$, $B_2 = 0$, $C_2 = 1$ für (1) bzw. $B_2 = 0$, $B_3 = 0$, $B_4 = 1$ für (2). Es wird dann $B_5 = 3$. Einer darüber hinaus noch bekannten Rekursionsformel 2. Ordnung für A_n begegnen wir weiter unten. Ein geschlossener Ausdruck im üblichen Sinne für die Folgen A_n, B_n, C_n ist jedoch bisher nicht angegeben worden. Das soll hier geschehen.

---

[1]) É. LUCAS, Théorie des nombres, Paris 1891, Bd. I, Nr. 123, S. 215 u. 491—495 (Note III). — Vgl. auch W. AHRENS, Mathematische Unterhaltungen und Spiele, 2. Aufl., Leipzig 1918, Bd. II, S. 73—79, und H. DÖRRIE, Triumph der Mathematik, 2. Aufl., Breslau 1940, S. 25—32.

Die Fragestellung, die zu den A_n führt, ist unverkennbar verwandt mit dem altbekannten Problem, auf wieviele Arten n Briefe in n Umschläge so gesteckt werden können, daß kein Brief in den richtigen Umschlag gelangt, oder, in der Sprechweise unseres Problems: auf wieviele Arten die Männer so Platz nehmen können, daß keiner *links* neben seiner Ehefrau sitzt. Für diese Anzahlfunktion h_n kann die Rekursionsformel

$$h_{n+1} = nh_n + nh_{n-1} \tag{3}$$

hergeleitet werden, die sich durch den Ansatz $h_n - nh_{n-1} = g_n$ sofort auf $g_{n+1} + g_n = 0$ reduziert. Die Lösung ist bekanntlich

$$h_n = n! \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(-1)^\nu}{\nu!}, \tag{4}$$

und für unbegrenzt wachsendes n strebt $\frac{h_n}{n!} \to e^{-1}$. Hiernach möchte man aus heuristischen Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen für das Ehepaarproblem $\frac{A_n}{n!} \to e^{-2}$ vermuten, und das werden wir bestätigen.

Der Ähnlichkeit von (2) mit (3) Rechnung tragend, gehen wir mit dem Ansatz $B_{n+1} - nB_n = b_{n-2}$ in (2) ein und erhalten zunächst

$$b_{n-1} + b_{n-2} = B_{n-1} \tag{5}$$

und dann weiter

$$b_{n-2} = B_{n+1} - nB_n = (b_{n+1} + b_n) - n(b_n + b_{n-1})$$

oder

$$(b_{n+1} - nb_n - b_{n-1}) + (b_n - (n-1)b_{n-1} - b_{n-2}) = 0.$$

Also ist $b_{n+1} - nb_n - b_{n-1} = K \cdot (-1)^n$, und aus den Anfangswerten $b_0 = 0$, $b_1 = 1$, $b_2 = -1$ ergibt sich $K = 2$. Damit ist gewonnen

$$b_{n+1} = nb_n + b_{n-1} + 2 \cdot (-1)^n. \tag{6}$$

Mittels dieser Rekursionsformel kann man die Folge der b_n auch nach rückwärts fortsetzen. Es wird $b_{-1} = -1$. Aus der Gleichung (6), gebildet für n und für $-n$, folgt durch Subtraktion für $t_n = b_n + b_{-n}$ die Rekursionsformel $t_{n+1} = nt_n + t_{n-1}$. Da die Anfangswerte $t_0 = 2b_0 = 0$ und $t_1 = b_1 + b_{-1} = 0$ sind, ist immer $t_n = 0$, also

$$b_{-n} = -b_n, \tag{7}$$

eine Eigenschaft, die übrigens nur bei den hier in Betracht kommenden Anfangswerten mit (6) verträglich ist und im folgenden auch die explizite Benutzung der Anfangswerte völlig ersetzt.

Mit Hilfe der b_n lassen sich die A_n, B_n, C_n einfach ausdrücken:

$$
\begin{aligned}
A_n &= b_{n+1} - b_{n-1}, \\
B_n &= b_n + b_{n-1}, \\
C_n &= 2\, b_n + 3\, b_{n-1} + 2\, b_{n-2}.
\end{aligned} \tag{8}
$$

Die zweite dieser Gleichungen hatten wir schon in (5), die beiden anderen folgen daraus nach (1) und (6). Führt man durch

$$A_n = n b_n + 2 \cdot (-1)^n \tag{9}$$

A_n statt b_n in (6) ein, so ergibt sich die bereits erwähnte, hier aber nicht gebrauchte Rekursionsformel von LAISANT

$$(n-1)\, A_{n+1} = (n^2-1)\, A_n + (n+1)\, A_{n-1} + 4 \cdot (-1)^n,$$

der sich ähnliche für B_n und C_n an die Seite stellen lassen.

Um nun (6) mit (7) aufzulösen, führen wir die Hilfsgrößen

$$c_{k,n} = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{b_{k-\nu}}{\nu!}$$

ein. Es wird

$$c_{k+1,n} = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{b_{k+1-\nu}}{\nu!} = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(k-\nu)\, b_{k-\nu} + b_{k-\nu-1} + 2 \cdot (-1)^{k-\nu}}{\nu!}$$

$$= \sum_{\varrho=0}^{n} \left(\frac{k-\varrho}{\varrho!} + \frac{1}{(\varrho-1)!} \right) b_{k-\varrho} + \frac{b_{k-n-1}}{n!} + 2 \cdot (-1)^k \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(-1)^\nu}{\nu!}$$

(wobei hier, ebenso wie einige Zeilen später, für $\varrho = 0$ $\frac{1}{(\varrho-1)!} = 0$ zu setzen ist)

$$= k\, c_{k,n} + \frac{b_{k-n-1}}{n!} + 2 \cdot (-1)^k \frac{h_n}{n!},$$

also

$$\frac{c_{k+1,n}}{k!} - \frac{c_{k,n}}{(k-1)!} = \frac{b_{k-n-1}}{n!\, k!} + 2 \cdot \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{h_n}{n!}.$$

Durch Summation über k von 0 bis m folgt unter Berücksichtigung von (7)

$$\frac{c_{m+1,n}}{m!} + \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{m} \frac{b_{n+1-k}}{k!} = 2 \frac{h_n}{n!} \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{k!}$$

oder

$$\frac{c_{m+1,n}}{m!} + \frac{c_{n+1,m}}{n!} = 2 \frac{h_m}{m!} \frac{h_n}{n!}$$

und für $m = n$:

$$\sum_{\nu=0}^{n} \frac{b_{n+1-\nu}}{\nu!} = c_{n+1,n} = \frac{h_n^2}{n!} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ersetzt man für den Augenblick b_n durch $\frac{a_{n-1}}{(n-1)!}$ und ν durch $n-\mu$, so läßt sich das Ergebnis in die Form setzen

$$\sum_{\mu=0}^{n}\binom{n}{\mu}a_\mu = h_n^2 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

so daß die a_μ die Anfänge der Differenzenfolgen zur Folge h_n^2 darstellen. Durch Umkehrung folgt

$$a_n = n!\,b_{n+1} = \sum_{\mu=0}^{n}(-1)^\mu\binom{n}{\mu}h_{n-\mu}^2,$$

so daß nun mittels (8) die geschlossene Darstellung der A_n, B_n, C_n geleistet ist. Es wird $A_n = 2\cdot(-1)^n + nb_n = 2\cdot(-1)^n + \frac{n}{(n-1)!}a_{n-1}$, also mit $\nu = \mu + 1$

$$(10) \qquad A_n = 2\cdot(-1)^n + n\sum_{\nu=1}^{n}\frac{(-1)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\,\frac{h_{n-\nu}^2}{(n-\nu)!}.$$

Zum Beweis der Grenzbeziehung

$$(11) \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{n!} = e^{-2}$$

schreibt man

$$\frac{A_n}{n!} = 2\cdot\frac{(-1)^n}{n!} + \sum_{\nu=1}^{n}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\binom{n-1}{\nu-1}}\left(\frac{h_{n-\nu}}{(n-\nu)!\,(\nu-1)!}\right)^2,$$

wobei $\left|\frac{h_{n-\nu}}{(n-\nu)!}\right|$ stets $\leqq 1$ ist, und hat

$$\left|\frac{A_n}{n!} - \left(\frac{h_{n-1}}{(n-1)!}\right)^2\right| \leqq \frac{2}{n!} + \sum_{\nu=2}^{n-1}\frac{1}{\binom{n-1}{\nu-1}} + \frac{1}{(n-1)!^2} = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

weil die Randglieder der Summe $\sum$ die Größenordnung $\frac{1}{n}$, die inneren höchstens die Größenordnung $\frac{1}{n^2}$ haben.

(Eingegangen am 20. November 1942.)