Über gewisse trigonometrische Integrale. I.

Von

Hans Hornich in Wien.

Im folgenden sollen gewisse Integrale von einfacher Bauart näher untersucht werden, die nicht nur an sich von Interesse sind, sondern auch vielfache Anwendungen gestatten. Der Zugang zu diesen Integralen gestaltet sich durch Rekursion, ausgehend vom Dirichletschen Diskontinuitätsfaktor, so einfach, daß schon dadurch eine Reihe von Eigenschaften dieser Integrale zu erkennen sind.

Sei $\{a_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ eine Folge positiver Zahlen. Wir definieren dann die folgenden Funktionen:

$$\Phi_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad |t| < \frac{a_1}{2} \\ 0 & \text{für} \quad |t| > \frac{a_1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{für} \quad |t| = \frac{1}{2}, \end{cases} \tag{1 a}$$

und durch Rekursion für alle natürlichen k:

$$\Phi_{k+1}(t) = \int\limits_{-\frac{a_{k+1}}{2}}^{\frac{a_{k+1}}{2}} \Phi_k(t-\tau)\, d\tau. \tag{1 b}$$

Man liest aus dieser Darstellung unmittelbar ab:

Es ist für $k \geqq 2$

$$0 \leqq \Phi_k(t) \leqq \prod_{i=2}^{k} a_i \tag{2}$$

und für alle k und $|t| > \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} a_i$

$$\Phi_k(t) = 0. \tag{3}$$

Die $\Phi_k(t)$ sind abteilungsweise durch Polynome vom Grad $\leqq k-1$ darstellbar und für $k > 2$ überall $k-2$-fach stetig differenzierbar.

Die $\Phi_k(t)$ sind gerade Funktionen und für $t \leqq 0$ monoton nicht abnehmend, so daß

$$\Phi_k(0) = \operatorname*{Max}_t \Phi_k(t). \tag{4}$$

Als Funktion der $a_1 \ldots a_k$ ist $\Phi_k(t)$ für alle a_i monoton nicht abnehmend. Für alle k gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_k(t)\, dt = \prod_{i=1}^{k} a_i. \tag{5}$$

Aus (3), (4) und (5) folgt dann:

$$\Phi_k(0) \geqq \frac{\prod_{i=1}^{k} a_i}{\sum_{i=1}^{k} a_i}. \tag{6}$$

Wir geben für die Funktionen Φ_k eine *Integraldarstellung*. Ausgehend vom DIRICHLETschen Diskontinuitätsfaktor ist:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin x\left(t + \frac{a_1}{2}\right) - \sin x\left(t - \frac{a_1}{2}\right)}{x}\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin a_1 x}{x} \cos 2xt\, dx = \Phi_1(t).$$

Mit Hilfe von (1b) folgt daraus allgemein[1]):

$$\Phi_k(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \prod_{i=1}^{k} \frac{\sin a_i x}{x} \cos 2xt\, dx. \tag{7}$$

Diese Integrale sind für alle reellen a_i und t sinnvoll. Sie genügen einigen bemerkenswerten Funktionalgleichungen (wir setzen dabei die in den Φ_k auftretenden a_i stets in Evidenz).

Es ist

$$\Phi_k\left(a_1, a_2, \ldots a_k; \frac{t}{2}\right) + \Phi_k\left(t, a_2, \ldots a_k; \frac{a_1}{2}\right) = \Phi_k(a_1 + t, a_2, \ldots a_k; 0), \tag{8}$$

$$\frac{\partial}{\partial a_{k+1}} \Phi_{k+1}(a_1, \ldots a_k, a_{k+1}; 0) = \Phi_k\left(a_1, a_2, \ldots a_k; \frac{a_{k+1}}{2}\right) \tag{9}$$

und durch partielle Integration:

$$\Phi_k(a_1, a_2, \ldots a_k; \tfrac{1}{2}) = k\,\Phi_{k+1}(a_1, a_2, \ldots a_k, 1; 0) - \\ - \sum_{i=1}^{k} a_i \Phi_k\left(a_1, \ldots a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \ldots a_k; \frac{a_i}{2}\right). \tag{10}$$

Die rekursive Herleitung der Integrale Φ_k durch (1) bietet oft die Möglichkeit einer leichten Berechnung. So ergibt sich z. B. ohne weiteres[2]):

$$\Phi_2(a_1, a_2; 0) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin a_1 x \cdot \sin a_2 x}{x^2}\, dx = \min(a_1, a_2) \quad (a_1, a_2 > 0).$$

---

[1]) Vgl. G. PÓLYA, Math. Ann. **74**, 204—212. Für den Spezialfall, in dem alle $a_i = 1$ sind, vgl. S. BOCHNER, Vorlesungen über FOURIERsche Integrale, 1932, S. 15; ferner H. HADWIGER, ZAMM, XXII, 226—232.

[2]) Vgl. G. PÓLYA, l. c.

Wir setzen ferner:

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^{k} a_i} \Phi_k(a_1, a_2, \ldots a_k; t) = \Psi_k(a_1, a_2, \ldots a_k; t) = \Psi_k(t);$$

nach (1) ist:

$$\Psi_{k+1}(t) = \frac{1}{a_{k+1}} \int_{-\frac{a_{k+1}}{2}}^{\frac{a_{k+1}}{2}} \Psi_k(t-\tau)\, d\tau, \tag{11}$$

so daß die Ψ_{k+1} als Mittelfunktionen aus den Ψ_k entstehen. Daher und wegen (4) ist:

$$\Psi_{k+1}(0) \leqq \Psi_k(0).$$

Die $\Psi_k(t)$ sind also für alle k und alle t gleichmäßig beschränkt. Dieselbe Rekursionsformel (11) gilt auch für die Ableitungen $\Psi_k'(t)$ und es ist $(k > 2)$:

$$\max_t \Psi_{k+1}'(t) \leqq \max_t \Psi_k'(t).$$

Nun ist $(a_1 \geqq a_2)$

$$\Psi_2(t) = \frac{1}{a_1} \text{ für } |t| \leqq \frac{a_1 - a_2}{2}, \quad \Psi_2(t) = \frac{a_1 + a_2 - 2|t|}{2\, a_1 a_2} \text{ für } \left| |t| - \frac{a_1}{2} \right| \leqq \frac{a_2}{2},$$

also auch

$$|\Psi_k'(t)| \leqq \frac{1}{a_1 a_2} \quad (k > 2). \tag{12}$$

Analoge Abschätzungen gelten für die höheren Ableitungen.

Wir schreiben noch eine allgemeine Faltungsregel für die Ψ an, die man unmittelbar durch Induktion gewinnt:

$$\Psi_{i+k}(a_1, a_2, \ldots a_{i+k}; t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_i(a_1, \ldots a_i; t-\tau)\, \Psi_k(a_{i+1}, \ldots a_{i+k}; \tau)\, d\tau. \tag{13}$$

Wir untersuchen das Verhalten von

$$\Psi_k(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \prod_{i=1}^{k} \frac{\sin a_i x}{a_i x} \cos 2xt\, dx$$

für $k \to \infty$. Wir zeigen:

Für $k \to \infty$ konvergieren die Funktionen $\Psi_k(t)$ stets, und zwar gleichmäßig für alle t

$$\Psi(t) = \lim_{k \to \infty} \Psi_k(t).$$

Ist dabei $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2$ divergent, so ist $\Psi(t) \equiv 0$.

Ist $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2$ *konvergent, so ist* $\Psi(t)$ *eine nicht identisch verschwindende, unbeschränkt differenzierbare Funktion.*

Der Beweis erfordert einige Fallunterscheidungen.

Sei $0 < \varepsilon < R$ und $k > 2$. Wir zerlegen das Integrationsintervall:

$$\int_0^\infty \prod_{i=1}^k \frac{\sin a_i x}{a_i x} \cos 2xt\,dx = \int_0^\varepsilon + \int_\varepsilon^R + \int_R^\infty. \tag{14}$$

Das erste Integral ist absolut $\leqq \varepsilon$; das dritte ist absolut

$$\leqq \frac{1}{a_1 a_2} \int_R^\infty \frac{1}{x^2} \prod_{i=3}^k \frac{|\sin a_i x|}{a_i x}\,dx \leqq \frac{1}{a_1 a_2 R}.$$

Diese beiden Integrale sind also bei geeigneter Wahl von ε und R beliebig klein. Wir zeigen vom zweiten Integral, daß es für $k \to \infty$ konvergiert.

A. Wir betrachten den Fall, daß die a_i nicht gegen Null konvergieren, und zeigen, daß das zweite Integral in (14) für $k \to \infty$ gegen Null strebt.

Für $x > 0$ hat $\frac{\sin a_i x}{x}$ extreme Werte für die Stellen $x^{(i)}$ mit $a_i x^{(i)} = \operatorname{tg} a_i x^{(i)}$; es ist wegen $a_i > 0$ dann $x^{(i)} > \frac{\pi}{a_i}$. Für $x \geqq \varepsilon$ ist daher stets:

$$\left|\frac{\sin a_i x}{x}\right| \leqq \max\left(\frac{|\sin a_i \varepsilon|}{\varepsilon}, \frac{|\sin a_i x^{(i)}|}{x^{(i)}}\right) \leqq a_i \max\left(\frac{|\sin a_i \varepsilon|}{a_i \varepsilon}, \frac{1}{\pi}\right).$$

Es ist daher weiter:

$$\left|\int_\varepsilon^R \prod_{i=1}^k \frac{\sin a_i x}{a_i x} \cos 2xt\,dx\right| \leqq R \prod_{i=1}^k \max\left(\frac{|\sin a_i \varepsilon|}{a_i \varepsilon}, \frac{1}{\pi}\right).$$

Nach unserer Voraussetzung gibt es ein $\alpha > 0$, so daß unendlich viele $a_i \geqq \alpha$ sind. Wir bezeichnen die Anzahl der $a_1 \dots a_k$ mit $a_i \geqq \alpha$ mit k'; mit $k \to \infty$ geht dann auch $k' \to \infty$. Weiter ist für alle $h \geqq \alpha\varepsilon$:

$$\left|\frac{\sin h}{h}\right| \leqq \max\left(\frac{|\sin \alpha\varepsilon|}{\alpha\varepsilon}, \frac{1}{\pi}\right)$$

und endlich:

$$\left|\int_\varepsilon^R \prod_{i=1}^k \frac{\sin a_i x}{a_i x} \cos 2xt\,dx\right| \leqq R\left[\max\left(\frac{|\sin \alpha\varepsilon|}{\alpha\varepsilon}, \frac{1}{\varkappa}\right)\right]^{k'};$$

die rechte Seite der Ungleichung strebt also für $k \to \infty$ gegen Null, q. e. d.

B. Sei nun $a_i \to 0$. Bei vorgegebenem η mit $0 < \eta < 1$ ist dann für fast alle i und $\varepsilon \leqq x \leqq R$

$$\frac{\sin a_i x}{a_i x} = 1 - \frac{(a_i x)^2}{3!} + \cdots = 1 - \vartheta(i, x)\frac{(a_i x)^2}{6}$$

mit

$$1-\eta < \vartheta(i,x) < 1+\eta.$$

a) Ist nun $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2$ divergent, so divergiert für $\varepsilon \leqq x \leqq R$ auch

$$\sum_{i=1}^{\infty} \vartheta(i,x)\frac{(a_i x)^2}{6}$$

gegen $+\infty$ und es strebt

$$\prod_{i=1}^{k} \frac{\sin a_i x}{a_i x} = \prod_{i=1}^{k}\left(1-\vartheta(i\,x)\frac{(a_i x)^2}{6}\right) \to 0$$

für $k \to \infty$, und zwar gleichmäßig für alle x mit $\varepsilon \leqq x \leqq R$. Also strebt für divergente $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2$ jedenfalls $\Psi_k(t) \to 0$, und zwar gleichmäßig für alle t.

b) Sei nun $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2$ konvergent. Dann ist das unendliche Produkt $\prod_{i=1}^{\infty} \frac{\sin a_i x}{a_i x}$ konvergent, und zwar gleichmäßig für $\varepsilon \leqq x \leqq R$. Es konvergiert daher auch das zweite Integral in (14) für $k \to \infty$ und es ist:

$$\Psi(t) = \Psi(a_1, a_2, \ldots; t) = \lim_{k\to\infty} \Psi_k(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{\sin a_i x}{a_i x} \cos 2\,x t\, d x. \tag{15}$$

Man sieht ferner ohne Schwierigkeit, daß auch die r-ten Ableitungen

$$\Psi_k^{(r)}(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \prod_{i=1}^{k} \frac{\sin a_i x}{a_i x}(2\,x)^r \cos\left(2\,x t + r\frac{\pi}{2}\right) d x \qquad (k > r+2)$$

für $k \to \infty$ konvergieren:

$$\lim_{k\to\infty} \Psi_k^{(r)}(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{\sin a_i x}{a_i x}(2\,x)^r \cos\left(2\,x t + r\frac{\pi}{2}\right) d x, \tag{16}$$

also gegen die r-te Ableitung von $\Psi(t)$.

Wir haben nun noch zu zeigen, daß in diesem Fall $\Psi(t)$ nicht identisch verschwindet.

Aus (4) folgt auch für die Ψ

$$\Psi(a_1, a_2, \ldots; 0) = \max_t \Psi(a_1, a_2, \ldots; t).$$

Nun ist mit $a > 0$:

$$\Psi(a, a_1, a_2, \ldots; t) = \frac{1}{a}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \Psi(a_1, a_2, \ldots; t-\tau)\, d\tau,$$

entsteht also durch Mittelbildung aus $\Psi(a_1, a_2, \ldots; t)$ und es ist:

$$\Psi(a, a_1, a_2, \ldots; 0) \leqq \Psi(a_1, a_2, \ldots; 0).$$

Iteriert man die Mittelbildung in der Weise, daß jede der Zahlen a_i zweimal auftritt, so ist (die Reihenfolge des a_i ist ersichtlich gleichgültig):

$$\Psi(a_1, a_1, a_2, a_2, \ldots; 0) \leqq \Psi(a_1, a_2, \ldots; 0).$$

Nun ist

$$\Psi(a_1, a_1, a_2, a_2, \ldots; 0) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \prod_{i=1}^{\infty} \frac{\sin^2 a_i x}{a_i^2 x^2}\, dx > 0, \tag{17}$$

also ist auch $\Psi(a_1, a_2, \ldots; 0) > 0$ und $\Psi(a_1, a_2, \ldots; t)$ nicht identisch Null.

Wenn sogar schon $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergiert, so folgt aus (6):

$$\Psi(a_1, a_2, \ldots; 0) \geqq \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i}.$$

Wir geben nun einige Anwendungen unserer Integrale.

Anzahl der Zerlegungen einer reellen Zahl in k beschränkte Summanden. Sei t eine reelle Zahl und k eine natürliche Zahl. Wir fragen nach der „Anzahl", wie oft t als Summe von k Summanden dargestellt werden kann:

$$t = \sum_{i=1}^{k} t_i,$$

wobei die $|t_i| \leqq \frac{a_i}{2}$ sein sollen ($a_1 \ldots a_k$ beliebig gegebene positive Zahlen). Solche Zerlegungen existieren natürlich nur für $|t| \leqq \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{k} a_i$, und zwar unendlich viele, wenn hier das Ungleichheitszeichen steht. Der Anzahl dieser Zerlegungen können wir — so wie es in der Integralgeometrie üblich ist — als Maß oder Dichte eine Zahl zuordnen. Die Rekursionsformeln (1) legen nahe, als Maß dieser Anzahl die Zahl $\Phi_k(t)$ zu wählen[3]).

Zurückführung eines k-fachen Integrals auf ein einfaches. Sei $f(t)$ eine stetige Funktion; dann ist

$$\int_{-\frac{a_k}{2}}^{\frac{a_k}{2}} \cdots \int_{-\frac{a_1}{2}}^{\frac{a_1}{2}} f(t_1 + t_2 + \cdots + t_k)\, dt_1 \ldots dt_k = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \Phi_k(a_1, \ldots a_k; t)\, dt. \tag{18}$$

Für $k = 1$ ist die Formel sicher richtig; sei die Formel für $k - 1$ Variable gezeigt; so ist:

$$\int_{-\frac{a_{k-1}}{2}}^{\frac{a_{k-1}}{2}} \cdots \int_{-\frac{a_1}{2}}^{\frac{a_1}{2}} f(t_1 + t_2 + \cdots + t_k)\, dt_1 \ldots dt_{k-1} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t + t_k)\, \Phi_{k-1}(a_1, \ldots a_{k-1}; t)\, dt;$$

[3]) Vgl. H. Hadwiger, l. c.

integriert man nach t_k von $-\frac{a_k}{2}$ bis $\frac{a_k}{2}$, so liefert die rechte Seite:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t+t_k)\,\Phi_{k-1}(a_1,\ldots a_{k-1};t)\,\Phi_1(a_k;t_k)\,dt\,dt_k$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\,\Phi_{k-1}(a_1,\ldots a_{k-1};\tau-t_k)\,\Phi_1(a_k;t_k)\,dt_k\,d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\,\Phi_k(\tau)\,d\tau.$$

Aus (18) liest man unmittelbar die geometrische Deutung von $\Phi_k(t)$ ab:

$\Phi_k(a_1,\ldots a_k;t)$ *ist der* $k-1$*-dimensionale Inhalt desjenigen Stückes der Hyperebene* $t_1+t_2+\cdots+t_k=t$ *des* $R_k(t_1\ldots t_k)$, *welches innerhalb des Quaders* $|t_i|\leqq\frac{a_i}{2}$ $(i=1\ldots k)$ *liegt.*

Iterierte Mittelbildung von Funktionen. Ist $f(t)$ eine stetige Funktion, so bilden wir der Reihe nach die Mittelfunktionen ($a_1 a_2\ldots$ positive Zahlen)

$$f_1(t)=\frac{1}{a_1}\int_{-\frac{a_1}{2}}^{\frac{a_1}{2}} f(t+\tau)\,d\tau,$$

$$f_{i+1}(t)=\frac{1}{a_{i+1}}\int_{-\frac{a_{i+1}}{2}}^{\frac{a_{i+1}}{2}} f_i(t+\tau)\,d\tau\qquad(i=1,2,\ldots).$$

Man sieht ohne weiteres nach (11)

$$f_k(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t+\tau)\,\Psi_k(\tau)\,d\tau.$$

Ist nun z. B. $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergent, so strebt $\Psi_k(t)\to\Psi(t)$ und

$$f_k(t)\to F(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t+\tau)\,\Psi(\tau)\,d\tau;$$

$F(t)$ hängt dabei nur von den Werten $f(t+\tau)$ mit $|\tau|\leqq\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}a_i$ ab und ist eine unbeschränkt differenzierbare Funktion, die sich von den Werten $f(t)$ bei hinreichend kleiner $\sum_{i=1}^{\infty}a_i$ beliebig wenig unterscheidet. Für die Ableitung von $F(t)$ gelten nach (12) ganz einfache Ungleichungen, die hier nicht weiter aufgeschrieben werden sollen.

Eine weitere Mitteilung folgt.

(Eingegangen am 1. Dezember 1942.)