

Werk

Titel: Mathematische Zeitschrift

Ort: Berlin

Jahr: 1943

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN266833020_0049

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN266833020_0049

LOG Id: LOG_0042

LOG Titel: Über Nabelpunkte auf einer Eifläche

LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN266833020

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN266833020>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Über Nabelpunkte auf einer Eifläche.

Von G. Bol in Greifswald.

Herr CARATHÉODORY hat bekanntlich¹⁾ die Vermutung ausgesprochen, daß es auf jeder konvexen Fläche mindestens zwei Nabelpunkte gibt. Diese Vermutung ist unter gewissen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen (vgl. § 1) von H. HAMBURGER bewiesen worden²⁾, leider aber in so umständlicher Weise, daß von einem wirklichen Durchschauen der Verhältnisse, wie mir scheint, nicht die Rede sein kann.

Die vorliegende Arbeit bezweckt, diesem Ziele näherzukommen. Durch Anwendung mehr geometrischer Methoden wird eine sehr erhebliche Vereinfachung und Veranschaulichung erreicht. Dieselbe Methode läßt sich — worauf hier nur hingewiesen werden soll — auch bei anderen Fragen über Nabelpunkte mit Erfolg verwenden. Besonders die Ergebnisse von GULLSTRAND³⁾ über die Gestalt des Krümmungsliniennetzes in der Umgebung eines Nabels lassen sich in einfacher Weise wiedergewinnen und erweitern. Darüber soll die demnächst in Hamburg erscheinende Doktorarbeit von Frl. I. ELVERS Aufschluß geben. Ich hoffe aber, die gesamten Ergebnisse bald auch in mehr lehrbuchmäßiger Form herausbringen zu können⁴⁾.

§ 1.

Zurückführung auf ein lokales Problem.

Erinnern wir zunächst daran, wie man unser Problem auf eine Frage nach dem Verhalten des Krümmungsliniennetzes in der Umgebung eines Nabels zurückführen kann.

¹⁾ Vgl. W. BLASCHKE, Differentialgeometrie III, S. 289. Der dort erwähnte Beweis von COHN-VOSSEN, der mir nicht zugänglich war, hat sich, wie mir Herr BLASCHKE mitteilt, als falsch erwiesen.

²⁾ H. HAMBURGER, Beweis einer Vermutung von C. CARATHÉODORY. I, *Annals of Math.*; II s. 41 (1940), S. 63–86; II, III, *Acta Mathematica* 73 (1941), S. 174–332.

³⁾ A. GULLSTRAND, Allgemeine Theorie der monochromatischen Aberrationen und ihre nächsten Ergebnisse für die Ophthalmologie. *Nova Acta Reg. Soc. Sc. Upsala Ser. III*, 20 (1900), S. 1–204; Zur Theorie der Kreispunkte. *Acta Math.* 29 (1904), S. 59–100.

⁴⁾ Ein ausführliches Literaturverzeichnis über Nabelpunkte bei H. J. FISCHER, Der Verlauf von Integralkurven einer Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung eines vorgegebenen Punktes. *Deutsche Mathematik* 3 (1938), S. 152–188.

Unter Verwendung der Ebenenkoordinaten von BONNET⁵⁾ läßt sich unsere Fläche darstellen mit Hilfe einer Funktion

$$(1) \quad w = w(u, v)$$

zweier Veränderlichen u und v , die für reelle Flächenpunkte konjugiert komplex sind, während w für reelle Flächenpunkte reell ist. Die Gleichung der Krümmungslinien nimmt in diesen Koordinaten die Form an:

$$(2) \quad w_{uu} du^2 - w_{vv} dv^2 = 0.$$

Die Nabelpunkte sind gekennzeichnet durch

$$(3) \quad w_{uu} = w_{vv} = 0.$$

Für reelle Flächenpunkte sind w_{uu} und w_{vv} konjugiert komplex, ein solcher Punkt ist also genau dann ein Nabel, wenn w_{uu} verschwindet.

Bekanntlich ist die Ebene der komplexen Veränderlichen u zum sphärischen Normalenbild unserer Fläche konform. Da die sphärischen Bilder der Krümmungslinien ein orthogonales Kurvennetz bilden, gilt dasselbe für das Abbild der Krümmungslinien in der u -Ebene.

Bei einer Eifläche ist die Abbildung der Fläche auf die Normalenbildkugel sowie auf die u -Ebene eineindeutig, es ist also gleichgültig, ob wir das Netz der Krümmungslinien auf der Fläche, im sphärischen Bild oder in der u -Ebene untersuchen.

Sei nun $u = v = 0$ ein Nabelpunkt, den wir isoliert voraussetzen, so daß in einer Umgebung des Nullpunktes kein weiterer Nabel mehr vorhanden sein soll, also w_{uu} nirgendwo verschwinden soll. Beschreiben wir in dieser Umgebung einen Umlauf im positiven Sinne um den Nullpunkt, so wird

$$(4) \quad \Delta \arg w_{uu} = 2N\pi$$

bei ganzem N . N nennt man die Kennziffer des Nabels.

Für eine Eifläche mit nur isolierten Nabeln ist, wie a. a. O.¹⁾ gezeigt wird,

$$(5) \quad \sum N_i = -4.$$

Daraus folgt zunächst, daß es auf jeder Eifläche mindestens einen Nabel gibt. Im folgenden soll aber mit H. HAMBURGER bewiesen werden:

Hauptsatz. *Wenn sich w in einer Umgebung eines isolierten Nabels in eine Potenzreihe nach u und v entwickeln läßt, so gilt für die Kennziffer dieses Nabels*

$$(6) \quad N \geq -2,$$

⁵⁾ O. BONNET, Mémoire sur l'emploi d'un nouveau système de variables dans l'étude des propriétés des surfaces courbes. Journ. de Liouville, 2 série, 5 (1860), S. 153–266. Vgl. auch G. DARBOUX, Leçons sur la théorie générale des surfaces I, S. 243 und W. BLASCHKE, Differentialgeometrie III, S. 285.

Daraus ergibt sich offenbar sofort die Richtigkeit der Vermutung von CARATHÉODORY, und zwar in folgender Präzisierung:

Wenn es auf einer Eifläche einen Nabel gibt, in dessen Umgebung sich w in eine Potenzreihe nach u und v entwickeln läßt⁶⁾ so liegt auf dieser Fläche noch mindestens ein weiterer Nabel.

Setzen wir

$$(7) \quad w_{uu} = x + iy$$

mit reellen x und y und durchläuft u eine geschlossene Kurve um den Nullpunkt, so beschreibt der Punkt (x, y) eine geschlossene Kurve K in der (x, y) -Ebene. Ist nun N_+ die Anzahl der Durchschnitten dieser Kurve mit der positiven x -Achse im positiven Sinne, N_- die Anzahl der Durchschnitten in dem negativen Sinne, so wird offenbar

$$(8) \quad N = \frac{1}{2\pi} \Delta \arg w_{uu} = N_+ - N_-.$$

Das wird sofort klar, wenn man sich die RIEMANNSche Fläche für $\log w_{uu}$ durch Aufschneiden und Zusammenheften längs der positiven x -Achse hergestellt denkt. Natürlich kann man statt der positiven x -Achse auch jeden anderen Halbstrahl durch den Nullpunkt verwenden.

Offenbar ist N aber auch die Anzahl der Umläufe um den Nullpunkt, auf die sich unsere Kurve ohne Durchschreitung des Nullpunktes stetig zusammenziehen läßt. Wir wollen also N auch die Umlaufszahl unserer Kurve um den Nullpunkt nennen. Man spricht auch von KRONECKERS Charakteristik des Nullpunktes in bezug auf die Kurve K .

Unser Hauptsatz läßt sich jetzt so formulieren:

Die Funktion $w(u, v)$ möge für konjugiert komplexe u, v nur reelle Werte annehmen, in einer Umgebung des Nullpunktes $u = v = 0$ lasse sich w in eine Potenzreihe nach u und v entwickeln:

$$(8) \quad w(u, v) = \sum_0^{\infty} a_{ik} u^i v^k, \quad a_{ik} = \bar{a}_{ki}.$$

Es sei $w_{uu}(0, 0) = 0$, diese Nullstelle von w_{uu} sei aber isoliert. Beschreibt dann u einen Umlauf um den Nullpunkt im positiven Sinne, der keine weitere Nullstelle von w_{uu} enthält, so ist die Umlaufszahl der durch (7) erklärten Kurve in der (x, y) -Ebene nicht kleiner als -2 .

Durch diese Formulierung wird es verständlich, daß die Bestimmung der Umlaufszahlen für gewisse Kurvenklassen im folgenden einen wichtigen

⁶⁾ In vielen Fällen kommt man mit weniger aus, so genügen wenige Glieder der Taylor-Formel, wenn in (9) das erste nicht identisch verschwindende Glied keine vierfache Nullstelle mit konjugiert komplexen u und v und $|u| = 1$ hat. Vgl. hierzu die Schlußbemerkung in § 6.

Platz einnimmt. Diese Untersuchungen, die mir auch für sich von Interesse zu sein scheinen, sind in § 2 zusammengestellt.

Die Umlaufszahl hat eine wichtige Additivitätseigenschaft; verbinden wir zwei Punkte A und C des geschlossenen Kurvenzuges $ABCD A$ durch den Bogen AEC , so ist (Fig. 1)

$$N_{ABCD A} = N_{ABCEA} + N_{AECDA},$$

wobei natürlich alle Umlaufszahlen in bezug auf denselben Punkt genommen werden sollen. Daß dies richtig ist, sieht man sofort aus (8); die Bestandteile, die von dem neuen Bogen AEC herrühren, heben sich heraus.

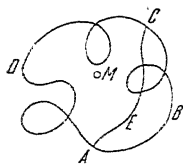


Fig. 1.

Da w_{uu} im Nullpunkt verschwindet, ist offenbar $a_{20} = a_{02} = 0$. Weil unsere Untersuchung sich ausschließlich auf w_{uu} bezieht, können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit auch $a_{00} = a_{10} = a_{01} = a_{11} = 0$ voraussetzen. Dann wird

$$(9) \quad w(u, v) = \sum_{h=3}^{\infty} w_h(u, v),$$

wo $w_h(u, v)$ ein homogenes Polynom der Ordnung h in u und v darstellt, das für konjugiert komplexe u und v nur reelle Werte annimmt.

Ist $w_k(u, v)$ das erste Glied in der Entwicklung (9), das nicht identisch verschwindet, so spricht man von einem Nabel der Ordnung $k - 2$).

§ 2.

Umlaufszahlen.

Satz I. $f(t)$ sei zweimal stetig differenzierbar und periodisch mit Periode 2π , A sei eine positive Konstante. Dann hat die Kurve

$$(10) \quad \begin{aligned} x &= f' - Af, \\ y &= f' \end{aligned}$$

in bezug auf jeden Punkt $M(x_0, y_0)$ in ihrer Ebene eine nichtnegative Umlaufszahl.

Zum Beweis sei zunächst $y_0 \leq 0$. Wir bestimmen die Umlaufszahl mit Hilfe der Parallelen zur positiven x -Achse durch M . Sei nun P eine Durchschneidung dieser Halbgeraden im negativen Sinne, also bei abnehmendem y

7) Nach GULLSTRAND; die einfachsten Nabel mit $k = 3$ sind dann von erster Ordnung.

(Fig. 2). Wir behaupten dann, daß der nächste Punkt Q auf unserer Kurve, für den der Wert $y = y_0$ (im zunehmenden Sinne) wieder durchschritten wird, rechts von P liegt, also eine Durchschneidung der Halbgeraden im positiven Sinne darstellt. Ist das bewiesen, so ist man fertig, denn wenn auf jede Durchschneidung im negativen Sinne eine im positiven Sinne folgt, so ist $N_+ \geq N_-$, also $N \geq 0$.

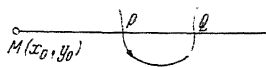


Fig. 2.

Der Beweis ist aber sehr einfach, gehören zu P und Q die Parameterwerte t_P und t_Q , so ist für $t_P \leq t \leq t_Q$ stets $y \leq y_0$, also $f'(t) \leq y_0$ und daher

$$(11) \quad f(t_Q) - f(t_P) \leq y_0(t_Q - t_P)$$

und weiter

$$(12) \quad f'(t_P) = f'(t_Q) = y_0, \quad f''(t_P) \leq 0, \quad f''(t_Q) \geq 0.$$

Daher aber

$$x_Q - x_P = f''(t_Q) - f''(t_P) - A \{f(t_Q) - f(t_P)\} > 0$$

und damit ist die Behauptung bewiesen.

Ist aber $y_0 > 0$, so setzen wir

$$(13) \quad x^* = -x, \quad y^* = -y, \quad f^* = -f.$$

Die Substitution bedeutet eine Drehung des Achsenkreuzes um π , was an der Umlaufszahl nichts ändert.

Dann gilt für die gesterntten Größen wieder (10), es ist aber $y_0^* < 0$. Also ist auch hier die Behauptung richtig.

Setzt man in (10) für $f(t)$ ein Polynom in t und läßt t von $-\infty$ bis $+\infty$ laufen, so wird die Kurve nicht geschlossen sein, sondern aus dem Unendlichen kommen und dorthin wieder weglaufen. Es ist aber klar, daß sie jeden genügend großen Kreis um M nur zweimal trifft und wir können sie geschlossen machen, indem wir die Teile außerhalb des Kreises weglassen und dann Endpunkt und Anfangspunkt durch einen der beiden Kreisbogen verbinden. Wir wählen dafür den Bogen, der im positiven Sinne durchlaufen werden muß (Fig. 3).

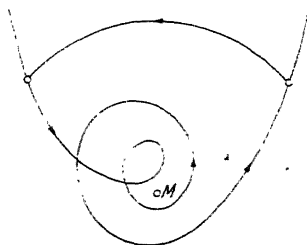


Fig. 3.

Dann bleiben sämtliche Schlüsse richtig und die Umlaufszahl ist wieder nicht negativ.

Hierbei ist allerdings der letzte Schnittpunkt unserer Kurve (10) mit dem Halbstrahl gesondert zu betrachten. Durchschneidet hier nämlich die Kurve im negativen Sinne, so ist noch zu zeigen, daß der nächste Schnittpunkt der abgeänderten Kurve ein solcher im positiven Sinne ist. Das ist klar, wenn der Kreisbogen die x -Achse

trifft. Es bleibt also nur noch der Fall zu betrachten, daß (in verständlicher Bezeichnung)

$$(14) \quad f'(-\infty) < y_0, \quad f'(+\infty) < y_0.$$

Ist nun

$$(15) \quad f(t) = a_0 t^k + a_1 t^{k-1} + \dots + a_{k-1} t + a_k,$$

so tritt offenbar (14) nur dann ein, wenn $a_0 < 0$ und k ungerade ist. Dann wird aber

$$x = -A a_0 t^k + \dots$$

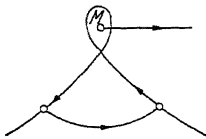


Fig. 4.

und unsere Kurve kommt also aus dem dritten und läuft in das vierte Quadrant. Daher trifft auch jetzt der Kreisbogen unseren Halbstrahl und n kann nicht negativ werden.

Daß aber Vorsicht am Platze ist, sieht man an der Kurve der Fig. 4, bei der wirklich $N = -1$ werden kann bei geeigneter Wahl von M .

Im folgenden Satze ist $f(t)$ wieder ein Polynom und muß man also wieder durch einen Kreisbogen abschließen:

Satz II. *Ist $f(t)$ ein Polynom von der Ordnung k und A eine Konstante für die*

$$(16) \quad 1 - Ak > 0,$$

so hat die Kurve

$$(17) \quad \begin{aligned} x &= At f' - f \\ y &= f' \end{aligned}$$

in bezug auf jeden Punkt $M(x_0, y_0)$ in ihrer Ebene eine nichtnegative Umlaufszahl.

Der Beweis geht genau wie bei Satz I, werden P und Q wie dort erklärt, so gelten wieder (11) und (12) und deshalb

$$(18) \quad x_Q - x_P = -f(t_Q) + f(t_P) + A(t_Q - t_P) y_0 > (A - 1) y_0 (t_Q - t_P).$$

Ist nun $(A - 1) y_0 \geq 0$, so folgt $x_Q > x_P$, also die Behauptung, ist $(A - 1) y_0 < 0$, so führt man wieder die Substitution (13) durch.

Wie oben ist der letzte Schnittpunkt besonders zu betrachten; es können nur Schwierigkeiten entstehen, wenn (14) gilt, also wenn in (15) k ungerade und a_0 negativ ist. Da aber dann

$$x = (Ak - 1) a_0 t^k + \dots,$$

so läuft auch hier die Kurve vom dritten Quadranten aus und ins vierte hinein und es entstehen keine Schwierigkeiten⁸⁾).

Da die Aussage unseres Satzes translationsinvariant ist, so kann man noch etwas allgemeiner behaupten:

Satz IIa. *Unter den Voraussetzungen von Satz II hat die Kurve*

$$(19) \quad \begin{aligned} x &= At f' - f + B \\ y &= f' + C, \end{aligned}$$

wo B und C Konstanten sind, in bezug auf jeden Punkt ihrer Ebene eine nicht-negative Umlaufszahl.

Bei allen Sätzen wurde natürlich vorausgesetzt, daß die Kurve nicht durch den Aufpunkt M hindurchgeht. Liegt aber M auf der Kurve, so bleibt die Behauptung $N_+ - N_- \geq 0$ dem Beweis nach richtig, wenn bei N_- die absteigenden Zweige durch M mitgezählt werden, bei N_+ die aufsteigenden durch M aber nicht. Geometrisch bedeutet das, daß die Umlaufszahl nicht-negativ ist, wenn alle durch M gehenden Zweige links an M vorbeigeführt werden. Da dies der ungünstigste Fall ist, so ist die Umlaufszahl ebenfalls nichtnegativ, wenn die Zweige beliebig vorbeigeführt werden; gibt es welche die rechts vorbeigehen, so ist die Umlaufszahl sogar sicher positiv.

§ 3.

Beweis des Hauptsatzes im regulären Fall.

Wir gehen jetzt daran, den Hauptsatz zu beweisen, und zwar in der am Schluß von § 1 angegebenen Form. Wir führen dazu zunächst die Substitution durch:

$$(20) \quad u = \varrho e^{i\theta}, \quad v = \varrho e^{-i\theta},$$

führen also in der u -Ebene Polarkoordinaten ein. Wir können dann unseren Umlauf beschreiben, indem wir ϱ festhalten und θ um 2π ansteigen lassen. (9) nimmt jetzt die Gestalt an:

$$(21) \quad w(\varrho, \theta) = \sum_{m=k}^{\infty} \varrho^m w_m(\theta); \quad k \geq 3.$$

Offenbar ist

$$(22) \quad \begin{aligned} \varrho_u &= \frac{1}{2} e^{-i\theta}, & \theta_u &= -\frac{i}{2\varrho} e^{-i\theta}, \\ \varrho_v &= \frac{1}{2} e^{i\theta}, & \theta_v &= \frac{i}{2\varrho} e^{i\theta} \end{aligned}$$

⁸⁾ Daß die Nebenbedingung (16) notwendig ist, zeigt das Beispiel $f = -t^3 + t$, $A = 2$. Hier ist $x = t(1 - 5t^2)$, $y = 1 - 3t^2$ und die Kurve sieht aus wie in Fig. 4 und hat in bezug auf den Punkt $(0, \frac{1}{3})$ die Umlaufszahl -1 .

und deshalb

$$(23) \quad w_u = \frac{1}{2\varrho} e^{-i\vartheta} \{\varrho w_\varrho - i w_\vartheta\},$$

$$(24) \quad w_{uu} = \frac{1}{4\varrho^2} e^{-2i\vartheta} \{\varrho^2 w_{\varrho\varrho} - \varrho w_\varrho - w_{\vartheta\vartheta}\} + 2i(-\varrho w_{\varrho\vartheta} + w_\vartheta).$$

Also

$$(25) \quad \Delta \arg w_{uu} = -4\pi + \Delta \arg \{(\varrho^2 w_{\varrho\varrho} - \varrho w_\varrho - w_{\vartheta\vartheta}) + 2i(-\varrho w_{\varrho\vartheta} + w_\vartheta)\}.$$

Betrachten wir demnach in der (x, y) -Ebene die Kurve

$$(26) \quad \begin{aligned} x &= -\varrho^2 w_{\varrho\varrho} + \varrho w_\varrho + w_{\vartheta\vartheta}, \\ y &= 2(\varrho w_{\varrho\vartheta} - w_\vartheta) \end{aligned}$$

und ist N_1 die Umlaufszahl dieser Kurve um den Nullpunkt, so wird

$$(27) \quad \Delta \arg w_{uu} = 2\pi(-2 + N_1).$$

Vergleicht man das mit (4), so sieht man, daß

$$(28) \quad N = -2 + N_1.$$

Der Hauptsatz besagt also, daß die Umlaufszahl der Kurve (26) um den Nullpunkt für jeden genügend kleinen Wert von ϱ nichtnegativ ausfällt. Daß die Kurve (26) für genügend kleine Werte von ϱ nicht durch den Nullpunkt geht, geht daraus hervor, daß nur in einem Nabel x und y gleichzeitig verschwinden können.

Setzt man in (26) die Reihenentwicklung (21) ein und dividiert durch ϱ^k , so entsteht die Kurve

$$(29) \quad \begin{aligned} x &= \sum_{m=k}^{\infty} \varrho^{m-k} \{w_m'' - m(m-2)w_m\}, \\ y &= \sum_{m=k}^{\infty} \varrho^{m-k} \{2(m-1)w_m'\}, \end{aligned}$$

die zu (26) ähnlich ist, also ebenfalls die Umlaufszahl N_1 hat. Wir nennen sie die „Kennlinie“ des Nabels. Ihre Gestalt wird für kleine Werte von ϱ beliebig gut dargestellt durch

$$(30) \quad \begin{aligned} x &= w_k'' - k(k-2)w_k, \\ y &= 2(k-1)w_k'. \end{aligned}$$

Die Kurve (30) nennen wir die Hauptkennlinie des Nabels. Sie ist vor der Kennlinie (29) dadurch ausgezeichnet, daß ihre Gestalt nicht von ϱ abhängt.

Offenbar kann man ϱ so klein wählen, daß die Kennlinie (29) innerhalb eines Streifens von der vorgegebenen Breite 2ε um die Hauptkennlinie liegt.

Wenn die Hauptkennlinie (30) nicht durch den Nullpunkt geht, so nennen wir unseren Nabel regulär.

In diesem Falle können wir unseren Streifen so schmal wählen, daß er den Nullpunkt nicht enthält. Dann haben offenbar die beiden Kurven (29)

und (30) dieselbe Umlaufszahl. Nun ist aber die Umlaufszahl von (30) wegen Satz I nichtnegativ. Dasselbe gilt also für (29).

Damit ist der Hauptsatz für reguläre Nabelpunkte bewiesen^{8a)}.

Geht die Hauptkennlinie durch den Nullpunkt, so wird die Kennlinie (29) innerhalb des Streifens an den Nullpunkt vorbeiführen. Auch hier aber läßt sich der Schluß durchführen, wenn nur die Kennlinie keine geschlossene Schleife um den Nullpunkt beschreibt. Denn wenn man die Hauptkennlinie an derselben Seite wie die Kennlinie an dem Nullpunkt vorbeiführt, so ist ihre Umlaufszahl nach § 2 nichtnegativ; da die Kennlinie keine Schleifenbildung aufweist, hat sie aber dieselbe Umlaufszahl.

Nun ist eine Schleife sicher nicht vorhanden, wenn an der fraglichen Stelle der Hauptkennlinie x' oder y' von Null verschieden ist. Denn dann gilt dasselbe bei genügend kleinem ϱ für die Kennlinie (29) in der Nähe dieses Punktes, eine der beiden Koordinaten x und y ist monoton und eine Schleife kann nicht vorhanden sein.

Nur wenn x und y auf der Hauptkennlinie (30) eine gemeinsame doppelte Nullstelle haben, ist eine besondere Untersuchung notwendig.

In diesem Falle ist wegen (30) offenbar

$$w_k'' - k(k-2)w_k = w_k''' - k(k-2)w_k' = w_k' = w_k'' = 0,$$

also

$$(31) \quad w_k = w_k' = w_k'' = w_k''' = 0.$$

w_k hat also eine mindestens vierfache Nullstelle. Wir sprechen dann von einer wesentlichen Singularität der Kennlinie.

§ 4.

Analytische Vorbereitungen zur Untersuchung der singulären Stellen.

Sei jetzt für $\theta = \theta_0$ eine vierfache Nullstelle von w_k vorhanden. Durch eine Drehung der u -Ebene können wir $\theta_0 = 0$ erreichen. Da die Kennlinie (29) in einer Umgebung dieser Stelle näher untersucht werden muß, ist es zweckmäßig, jetzt w nach Potenzen von ϱ und θ zu entwickeln:

$$(32) \quad w = \sum_{m=k}^{\infty} \varrho^m w_m(\theta) = \sum_{m=k}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_{mi} \varrho^m \theta^i.$$

Für x und y aus (29) erhält man daraus entsprechende Entwicklungen. Zur Bestimmung unserer Umlaufszahlen ist es nun offenbar zweckmäßig, die Null-

^{8a)} Bei H. FISCHER, a. a. O. ⁴⁾ ein ähnlicher Beweis, der für eine entsprechende Klasse von Nabelpunkten — also nicht wie behauptet, allgemein — gilt.

stellen von x und y heranzuziehen. Über die Nullstellen einer derartigen Funktion von zwei Veränderlichen aber gibt bekanntlich die Lehre der Puiseux-Entwicklungen Aufschluß.

Stellen wir deshalb zunächst einige der wichtigsten Tatsachen über diese Entwicklungen, soweit sie hier verwendet werden, zusammen⁹⁾. Dabei lassen wir zunächst auch komplexe Entwicklungen zu, obwohl in unserem Falle nur die reellen eine Rolle spielen.

Sei

$$(33) \quad f(\varrho, \theta) = \sum_{i,k}^{\infty} \alpha_{ik} \varrho^i \theta^k$$

eine analytische Funktion der Veränderlichen ϱ und θ , die für $\varrho = \theta = 0$ verschwinden möge. Dann gibt es endlich viele „Nullstellen“

$$(34) \quad \theta = \sum_{\mu} \alpha_{\mu} \varrho^{\mu}$$

von $f(\varrho, \theta)$, die für $\varrho = 0$ in die Nulllösung übergehen. Die μ sind dabei ansteigende positive rationale Zahlen, die sämtlich Vielfache eines Stammbruches $\frac{1}{p}$ sind. Der Einfachheit halber denken wir uns die Substitution

$$(35) \quad \varrho = r^p$$

durchgeführt. Dann werden sämtliche Lösungen (34) Potenzreihen in r .

Um zu untersuchen, welche Lösungen etwa mit einer q -ten Potenz von r anfangen:

$$(36) \quad \theta = \alpha \cdot r^q + \dots,$$

kann man so vorgehen; man setzt in (33) ein

$$(37) \quad \theta = z \cdot r^q$$

und ordnet nach Potenzen von r , also

$$(38) \quad f(\varrho, \theta) = \sum_{v=k}^{\infty} r^v f_v(z) = \sum_{v=k}^{\infty} r^v f_v(\theta \cdot r^{-q}).$$

Die Ordnung des niedrigsten Polynoms $f_K(z)$ gibt dann an, wie viele Nullstellen (36) es gibt und die zugehörigen α lassen sich bestimmen aus der Gleichung

$$(39) \quad f_K(z) = 0.$$

Hat diese Gleichung Wurzeln 0, so bedeutet das, daß die entsprechenden Entwicklungen (36) mit höheren Potenzen von r als r^q anfangen.

⁹⁾ Vgl. etwa A. BRILL, Vorlesungen über ebene algebraische Kurven und algebraische Funktionen. Braunschweig 1925.

Für unsere Zwecke ist es auch nötig, feststellen zu können, wie viele Nullstellen mit bestimmten Anfangsgliedern:

$$(40) \quad 0 = \sum_{\sigma=q}^{s-1} A_{\sigma} r^{\sigma} + \dots = \varphi(r) + \dots$$

anfangen.

Dazu führt man zuerst die Substitution

$$(41) \quad \begin{aligned} \varrho &= r^p, \\ 0 &= \varphi(r) + t \end{aligned}$$

durch, setzt dann $t = z \cdot r^s$ ein und geht weiter vor wie oben.

Sehen wir deshalb noch nach, wie sich die Substitution (41) auf die Gleichungen (26) auswirkt. Man erhält

$$(42) \quad \begin{aligned} r_{\varrho} &= \frac{1}{p} r^{1-p}, & t_{\varrho} &= -\frac{1}{p} r^{1-p} \varphi', \\ r_{\vartheta} &= 0, & t_{\vartheta} &= 1, \end{aligned}$$

$$(43) \quad \begin{aligned} r_{\varrho\varrho} &= \frac{1-p}{p^2} r^{1-2p}, & t_{\varrho\varrho} &= -\frac{r^{-2p}}{p^2} \{(1-p) r \varphi' + r^2 \varphi''\}, \\ r_{\varrho\vartheta} &= 0, & t_{\varrho\vartheta} &= 0, \\ r_{\vartheta\vartheta} &= 0, & t_{\vartheta\vartheta} &= 0, \end{aligned}$$

und demnach wegen

$$\begin{aligned} w_{\varrho} &= w_r r_{\varrho} + w_t t_{\varrho}, \\ w_{\varrho\varrho} &= w_{rr} r_{\varrho}^2 + r w_{rt} r_{\varrho} t_{\varrho} + w_{tt} t_{\varrho}^2 + w_r r_{\varrho\varrho} + w_t t_{\varrho\varrho} \text{ usw.} \end{aligned}$$

und wenn

$$(44) \quad r \varphi'(r) = \psi(r)$$

gesetzt wird

$$(45) \quad \begin{aligned} \varrho w_{\varrho} &= \frac{1}{p} (r w_r - \psi w_t), \\ w_{\vartheta} &= w_t, \end{aligned}$$

$$(46) \quad \begin{aligned} \varrho^2 w_{\varrho\varrho} &= \frac{1}{p^2} [r^2 w_{rr} - 2 p r w_{rt} + p^2 w_{tt} + (1-p) r w_r + (p \psi - r \psi') w_t], \\ \varrho w_{\varrho\vartheta} &= \frac{1}{p} [r w_{rt} - \psi w_{tt}], \\ w_{\vartheta\vartheta} &= w_{tt}. \end{aligned}$$

Also:

$$(47) \quad \begin{aligned} x &= \frac{1}{p^2} [-r^2 w_{rr} + 2 r \psi w_{rt} + (p^2 - \psi^2) w_{tt} + (2 p - 1) r w_r + \\ &\quad + (r \psi' - 2 p \psi) w_t], \\ y &= \frac{2}{p} [r w_{rt} - \psi w_{tt} - p w_t]. \end{aligned}$$

Wenn $\varphi(r) = \psi(r) = 0$ wird, ist insbesondere

$$(48) \quad \begin{aligned} x &= \frac{1}{p^2} [-r^2 w_{rr} + (2p-1)rw_r + p^2 w_{tt}], \\ y &= \frac{2}{p} [rw_{rt} - pw_t]. \end{aligned}$$

Schließlich ist für uns noch wichtig, festzustellen, wie die Differentiation nach θ und r auf eine Entwicklung der Form (38) wirkt. Offenbar ist

$$\begin{aligned} \partial_\theta [r^v f_v(\theta r^{-q})] &= r^{v-q} f'_v(\theta r^{-q}), \\ r \partial_r [r^v f_v(\theta r^{-q})] &= v r^v f_v(\theta r^{-q}) - q \theta r^{v-q} f'_v(\theta r^{-q}). \end{aligned}$$

Also

$$(49) \quad \begin{aligned} \partial_\theta [r^v f_v(z)] &= r^{v-q} f'_v(z), \\ r \partial_r [r^v f_v(z)] &= r^v [v f_v(z) - q z f'_v(z)]. \end{aligned}$$

Bei Differentiation nach θ verringert sich also das Gewicht unseres Gliedes um q , bei Anwendung des Operators $r \partial_r$ bleibt es erhalten. Das soll später Verwendung finden.

§ 5.

Singuläre Stellen nullter Stufe.

Denken wir uns, daß die rechten Glieder in (30) für $\theta = \theta_0$ beide eine mindestens doppelte Nullstelle haben. Wir nennen dann θ_0 eine singuläre Stelle nullter Stufe der Kennlinie.

Zur Untersuchung können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit $\theta_0 = 0$ voraussetzen. Wir denken uns eine Substitution (35) ausgeführt, derart, daß sämtliche Nullstellen der durch (26) definierten Funktionen x und y sowie auch von $w_{\theta\theta}$, für die für $q = 0$ auch $\theta = 0$ wird, durch Potenzreihen in r dargestellt werden, also die Form haben

$$(50) \quad \theta = \sum_{v=q}^{\infty} \alpha_v r^v.$$

r^q möge die niedrigste Potenz von r sein, die in den Entwicklungen für die Nullstellen von x und y vorkommt, M sei so bestimmt, daß für alle Koeffizienten von r^q in diesen Entwicklungen

$$(51) \quad |\alpha_q| < M$$

gilt.

Für genügend kleines r liegen dann alle Schnittpunkte der Kennlinie (29) mit den Achsen innerhalb des Intervalls

$$(52) \quad -Mr^q < \theta < Mr^q.$$

Insbesondere liegen etwa die Punkte A und A_1 von Kennlinie und Hauptkennlinie, die zum Parameterwert $0 = Mr^q$ gehören, im selben Quadranten und dasselbe gilt für die zum Parameterwert $-Mr^q$ gehörigen Punkte B und B_1 . Verbinden wir jetzt (Fig. 5) die Punkte B und A durch einen einfachen Zug BCA , der links am Nullpunkt vorbeiläuft und die Kennlinie nicht trifft, und ebenso B_1 und A_1 durch den Zug $B_1C_1A_1$, der die Hauptkennlinie nicht trifft, so ist

$$(53) \quad N_{ADBEA} = N_{ADBCA} + N_{ACBEA},$$

weiter aber

$$(54) \quad N_{ADBCA} = N_{A_1D_1B_1C_1A_1} \geq 0,$$

weil die Kurven $ADBCA$ und $A_1D_1B_1C_1A_1$ sich ineinander deformieren lassen, ohne den Nullpunkt zu durchschreiten und die rechte zur Hauptkennlinie topologisch gleichwertig ist.

Zeigt man also noch, daß

$$(55) \quad N_{ACBEA} \geq 0,$$

so ist die Behauptung bewiesen. Es braucht also nur noch der Verlauf der Kennlinie im Intervall (52), also in der Umgegend jedes singulären Punktes untersucht zu werden. Die Kurve $ACBEA$ nennen wir den zur singulären Stelle gehörigen kritischen Ausschnitt der Kennlinie. Hierbei denken wir uns stets die Abschließung durch den Bogen BCA vorweggenommen¹⁰⁾.

Um nun (55) zu beweisen, verschafft man sich eine bessere Annäherung dieser Kurve als sie die Hauptkennlinie darstellt. Nach der Substitution (35) geht (26) wie wir sahen über in (48), wobei noch $0 = t$ gesetzt ist. Setzen wir noch

$$(56) \quad t = z \cdot r^q,$$

so haben wir das Intervall

$$(57) \quad -M \leq z \leq M$$

der Kennlinie zu untersuchen.

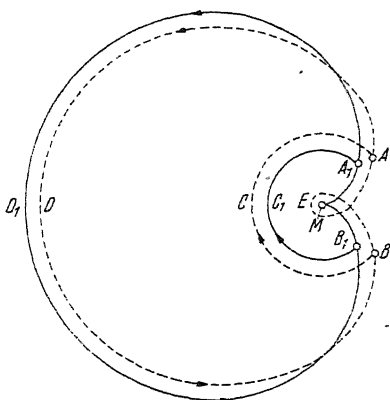


Fig. 5.

¹⁰⁾ In der Fig. 5 ist die Kennlinie (29) punktiert, die Hauptkennlinie (30) ausgezogen gezeichnet. Es ist angenommen, daß nur ein singulärer Punkt vorliegt, sind mehrere vorhanden, so muß man alle in derselben Weise behandeln. Geht die Hauptkennlinie noch an weiteren Stellen durch den Nullpunkt, ohne dort singulär zu werden, so muß man sie dort an derselben Seite wie die Kennlinie an den Nullpunkt vorbeiführen. Wie man sieht, kommt dann alles darauf an, daß für die Umgebung jeder singulären Stelle (55) gezeigt wird.

Wir denken uns nun die Funktion $w(\varrho, 0)$ nach r und z entwickelt und dabei die von z unabhängigen Glieder vorweggenommen:

$$(58) \quad w = \sum_{r=m}^{n-1} a_r r^r + \sum_{r=n}^{\infty} r^r f_r(z), \quad m \geq 3p.$$

Dies wird nun in (48) eingesetzt, dabei kommt es darauf an, die Glieder niedrigster Ordnung in r aufzufinden. In x kommt nun w_{tt} vor, was auf Glieder vom Gewicht $n - 2q$ führt, in y wird aber nur einmal nach t differenziert, so daß, da r^{n-q} die niedrigste Potenz von r sein wird, deren Koeffizient wirklich von z abhängt. Wir berechnen deshalb $x \pmod{r^{n-2q+1}}$ und $y \pmod{r^{n-q+1}}$. Wir erhalten

$$(59) \quad \begin{aligned} x &\equiv \frac{1}{p^2} m(2p - m) a_m r^m + o(r^m) + r^{n-2q} f_n''(z) \pmod{r^{n-2q+1}}, \\ y &\equiv \frac{1}{p} r^{n-q} \{(n - p - q) f_n'(z) - qz f_n''(z)\} \pmod{r^{n-q+1}}, \end{aligned}$$

wobei das Symbol $o(r^m)$ die übliche Bedeutung hat, also Glieder darstellt, die r in höherer Potenz als der m -ten enthalten.

Nun muß aber x Nullstellen haben, deren Entwicklung mit r^q anfängt, das niedrigste Glied in der Entwicklung darf also nicht von z unabhängig sein. Also ist

$$(60) \quad m \geq n - 2q$$

und es wird

$$o(r^m) \equiv 0 \pmod{r^{n-2q+1}}.$$

(59) nimmt dann die Gestalt an:

$$(61) \quad \begin{aligned} x &\equiv r^{n-2q} \{f_n'' + C\} \pmod{r^{n-2q+1}}, \\ y &\equiv r^{n-q} \{(n - p - q) f_n' - q f_n''\} \pmod{r^{n-q+1}}, \end{aligned}$$

wobei

$$C = \frac{1}{p^2} a_{n-2q} (n - 2q) (2p - n + 2q)$$

gesetzt ist.

Man sieht daraus, daß die Kennlinie in unserem Intervall (57) affin ist zu

$$(62) \quad \begin{aligned} x &= f_n'' + C + o(r), \\ y &= (n - p - q) f_n' - q f_n'' + o(r). \end{aligned}$$

Für genügend kleines r liegt die Kurve (62) in unserem Intervall in einem beliebig schmalen Streifen um die Kurve

$$(63) \quad \begin{aligned} x &= f_n'' + C, \\ y &= (n - p - q) f_n' - q f_n''. \end{aligned}$$

Wir wollen (63) die Kennlinie unserer singulären Stelle nennen. Zu den Parameterwerten $z = \pm M$ mögen auf ihr die Punkte B_2 und A_2 gehören, auf der Kurve (62) seien B und A die entsprechenden Punkte (Fig. 6).

Wir können in die Figur noch das affine Abbild des Bogens BCA eintragen, das wir wieder mit denselben Buchstaben bezeichnen; da dieser Bogen den Nullpunkt linkshalten muß, verbindet er B mit A im negativen Umlaufssinn. Der Bogen ACB läßt sich also in den positiv umlaufenden Kreisbogen $A_2 C_2 B_2$ stetig überführen, mit dem wir die Kennlinie (63) zu einer geschlossenen Kurve abschließen können. Es ist also

$$N_{ACBEA} = N_{A_2 C_2 B_2 E_2 A_2}.$$

Diese letzte Umlaufszahl ist aber nicht negativ, denn auf die Kennlinie (63) läßt sich Satz IIa anwenden; durch die Drehung $y^* = x$, $x^* = -y$ nimmt (63) die Gestalt (19) an. Zu zeigen ist nur, daß die Nebenbedingung (16), die hier lautet

$$(64) \quad n - p - q - (k-1)q > 0,$$

erfüllt ist. Dabei soll k die Ordnung des Polynoms $f_n(z)$ bedeuten.

Sei nun

$$f_n(z) = b_0 z^k + b_1 z^{k-1} + \dots + b_{k-1} z + b_k,$$

dann ist

$$r^n f_n(z) = b_0 r^{n-kq} \theta^k + \dots$$

Da nun in jedem Glied der Entwicklung von w nach ϱ und θ wegen (21) mindestens $\varrho^3 = r^{3p}$ vorkommt, ist

$$n - kq \geq 3p.$$

Daraus folgt sofort (64).

Hiermit ist die Behauptung (55) bewiesen für den Fall, daß die Kennlinie (63) unserer singulären Stelle nicht durch den Nullpunkt geht. Dabei kann wieder nur dann die Kurve (62) neue Schleifen um den Nullpunkt besitzen, wenn für einen bestimmten Wert von z , etwa $z = \alpha$, in (63) nicht nur x und y , sondern auch x' und y' verschwinden. Wir nennen dann

$$(65) \quad \theta = \theta_0 + \alpha r^q$$

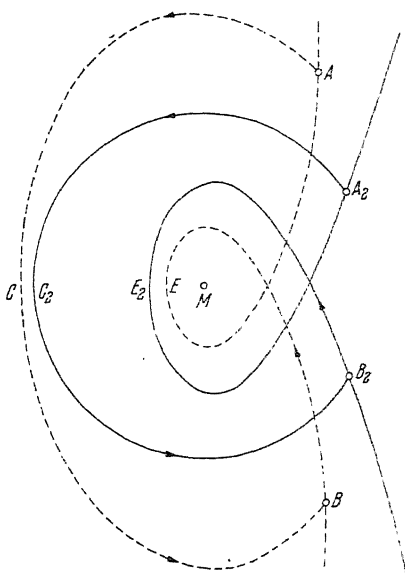


Fig. 6.

eine singuläre Stelle der Stufe eins. An einer solchen Stelle ist offenbar

$$f_n'' + C = f_n''' = (n - p - q) f_n' - q f_n'' = (n - p - q) f_n'' - q f_n''' = 0,$$

also

$$(66) \quad f_n' = f_n'' = f_n''' = 0,$$

während außerdem $C = 0$ sein muß.

Nun folgt aus (58), daß

$$(67) \quad w_0 = \sum_{v=n}^{\infty} r^{v-q} f_v'(z).$$

(66) bedeutet also, daß die Gleichung $w_0 = 0$ mindestens drei Nullstellen hat, deren Entwicklung mit (65) anfängt.

Der Beweis des Hauptsatzes ist jetzt offenbar in dem Falle zu Ende geführt, in dem es zwar singuläre Stellen nullter Stufe, aber keine erster Stufe gibt. Falls solche vorhanden sind, so muß man die Kennlinie (63) ähnlich weiter behandeln wie wir hier mit (30) vorgegangen sind. Ist $\alpha = 0$, so verläuft diese Untersuchung genau wie oben. Ist dagegen $\alpha \neq 0$, so tritt noch eine Komplikation auf; dieser Fall wird im nächsten Paragraphen behandelt.

Ganz allgemein läßt sich das Ergebnis dieses Paragraphen so formulieren: Haben sämtliche zu den singulären Stellen nullter Stufe gehörigen kritischen Ausschnitte der Kennlinie nichtnegative Umlaufszahl, so gilt dasselbe für die Kennlinie (29) des Nabels. Die Bedingung ist sicher erfüllt, wenn es keine singulären Stellen der Stufe eins gibt.

§ 6.

Singuläre Stellen höherer Stufe. Allgemeiner Beweis des Hauptsatzes.

Wenn x und y beide Nullstellen aufweisen, deren Entwicklung etwa mit (40) anfängt, so wird es notwendig, die Kennlinie in einer entsprechenden Umgebung dieser Stelle zu untersuchen. Dazu führen wir zunächst die Transformation (41) durch, wobei (26) die Gestalt (47) annimmt. $\varphi(r)$ wird dabei von Null verschieden, also auch von r wirklich abhängig vorausgesetzt.

Enthält $\varphi(r)$ nur ein Glied, so haben wir eben gesehen, daß auch w_0 an der Stelle (40) mindestens eine dreifache Nullstelle hat. Das gilt nicht allgemein; bei den Stellen, die wir zu betrachten haben, wird aber stets w_0 eine mindestens doppelte Nullstelle haben. Das besagt offenbar etwas weniger.

Nehmen wir dies also für die zu untersuchende Stelle (40) als richtig an. Dann kann die Entwicklung für w an unserer Stelle (40) nach der Substitution

$$(68) \quad t = z \cdot r^8$$

in der Form angesetzt werden

$$(69) \quad w(\varrho, \theta) = \sum_{r=l}^{m-1} a_r r^v + \sum_{r=n}^{n-1} (b_r z + c_r) r^v + \sum_{r=n}^{\infty} r^v f_r(z),$$

wobei die erste nichtlineare Funktion $f_n(z)$ mindestens von vierter Ordnung ist. Denn es ist

$$(70) \quad w_{\theta\theta} = w_{tt} = \sum_{r=n}^{\infty} r^{n-2s} f'_r(z)$$

und hier ist wegen der Voraussetzung über $w_{\theta\theta}$ das erste Glied mindestens quadratisch in z .

Setzt man nun die Entwicklung (69) in (47) ein, so haben in x sowohl wie in y die von w_{tt} herrührenden Glieder das kleinste Gewicht, und wir erhalten keine vernünftige Kennlinie. Deshalb wenden wir auf (47) zunächst die affine Transformation an:

$$(71) \quad \begin{aligned} x^* &= \psi x + \frac{p^2 - \psi^2}{2p} y, \\ y^* &= \frac{1}{2qA_q} y^{11}. \end{aligned}$$

Die Substitutionsdeterminante

$$(72) \quad \begin{vmatrix} \psi & \frac{p^2 - \psi^2}{2p} \\ 0 & \frac{1}{2qA_q} \end{vmatrix} = \frac{\psi}{2qA_q} = \frac{1}{2} r^q + \dots$$

ist für genügend kleine r positiv, also ist die Umlaufszahl in bezug auf die neuen Achsen dieselbe wie die in bezug auf die alten.

Es wird jetzt

$$(73) \quad \begin{aligned} x^* &= \frac{1}{p^2} [-\psi r^2 w_{rr} + (p^2 + \psi^2) r w_{rt} + (2p - 1) \psi r w_r + \\ &\quad + (r \psi \psi' - p \psi^2 - p^3) w_t], \\ y^* &= \frac{1}{qpA_q} [r w_{rt} - \psi w_{tt} - p w_t]. \end{aligned}$$

Setzt man hier (69) ein, so erhält man in derselben Weise wie in § 5

$$(74) \quad \begin{aligned} x^* &\equiv F(r) + z \cdot o(r^{m+q-1}) + r^{n-s} [(n-p-s) f'_n - s z f''_n] \pmod{r^{n-s+1}}, \\ y^* &\equiv \frac{1}{qpA_q} r^{m-s} (m-s-p) p_m + o(r^{m-s}) - \frac{1}{p} r^{n-2s+q} f''_n \pmod{r^{n-2s+q+1}}. \end{aligned}$$

Da y eine Nullstelle haben soll, darf das niedrigste Glied nicht konstant sein, also ist

$$m - s \geq n - 2s + q, \quad m \geq n - s + q.$$

Daher ist das zweite Glied in x^* kongruent Null nach dem Modul.

Ist das niedrigste nichtverschwindende Glied in x^* konstant, enthält also $F(r)$ Glieder von kleinerem Gewicht als $n - s$, dann ist für genügend kleines r die Größe x^* im Intervall (57) definit, die Kennlinie kann also in

¹¹⁾ Hier ist $A_q \neq 0$ vorausgesetzt. Ist bei unserer Stelle erst ein höheres Glied etwa das q_1 -te, als erstes von Null verschieden, so muß überall q_1 an die Stelle von q geschrieben werden.

diesem Intervall keine Schleife um den Nullpunkt bilden. Dieser Fall braucht also nicht weiter betrachtet zu werden.

Ist aber $n - s$ das niedrigste Gewicht in x^* , so wird

$$(75) \quad \begin{aligned} x^* &\equiv r^{n-s} [(n-p-s) f_n'' - s z f_n' + a] \pmod{r^{n-s+1}}, \\ y^* &\equiv -\frac{1}{p} r^{n-2s+q} [f_n'' + b] \pmod{r^{n-2s+q+1}} \end{aligned}$$

bei konstanten a und b . Die Kennlinie

$$(76) \quad \begin{aligned} x^* &= (n-p-s) f_n'' - s z f_n' + a \\ y^* &= -(f_n'' + b) \end{aligned}$$

unserer Stelle hat hier wieder bis auf Vorzeichenwechsel von x und y die Gestalt (19). Sie hat also auf Grund von Satz IIa nichtnegative Umlaufszahl.

Wir wenden diese Betrachtungen jetzt an auf „singuläre Stellen k -ter Stufe“, die wir rekursiv folgendermaßen definieren. Die singulären Stellen erster Stufe wurden in § 5 erklärt. Sei nun (40) eine singuläre Stelle k -ter Stufe. Haben dann x und y aus (76) für $z = \alpha$ je eine mindestens doppelte Nullstelle, so nennen wir

$$(77) \quad \theta = \varphi(r) + \alpha r^s$$

eine singuläre Stelle der Stufe $k+1$.

Wir zeigen jetzt zunächst, daß die Eigenschaften, die wir bei unserer Untersuchung für die Stelle (40) vorausgesetzt haben, für eine singuläre Stelle beliebiger Stufe erfüllt sind, also daß nicht nur x^* und y^* dort verschwinden, sondern auch x und y und $w_{\alpha\alpha}$ dort eine mindestens doppelte Nullstelle hat.

Für singuläre Stellen der Stufe 1 sind diese Eigenschaften vorhanden. Nehmen wir also an, sie sind für die singuläre Stelle (40) der Stufe k erfüllt, so müssen wir sie nur für die singuläre Stelle (77) der Stufe $k+1$ beweisen. Nun ist y bis auf einen konstanten Faktor mit y^* identisch, hat also eine Nullstelle. Weiter ist

$$p x \equiv \frac{p^2 - \varphi^2}{p} y \pmod{r^{n-s}} \equiv -A_q(f_n'' + b) \pmod{r^{n-2s+q+1}}.$$

Also hat auch x eine Nullstelle, die mit (77) anfängt, das Polynom $f_n'' + b$ ist ja mit dem niedrigsten Glied in y^* identisch und verschwindet deshalb für $z = \alpha$.

Da schließlich x^* und y^* für $z = \alpha$ je eine doppelte Nullstelle haben sollen, so ist dort

$$\begin{aligned} (n-p-s) f_n'' - s z f_n' + a &= 0, & f_n'' + b &= 0, \\ (n-p-s) f_n'' - s z f_n''' &= 0, & f_n''' &= 0 \end{aligned}$$

und deshalb

$$(78) \quad f_n'' = f_n''' = 0, \quad b = 0.$$

Daraus folgt aber wegen (70) die Behauptung über $w_{\alpha\alpha}$.

Die obigen Untersuchungen lassen sich also auf jede singuläre Stelle anwenden.

Definieren wir jetzt wie in § 5 den zur singulären Stelle k -ter Stufe gehörigen kritischen Ausschnitt der Kennlinie des Nabels, der also aus dem Bogen

$$(79) \quad -M \leq z \leq M, \quad \varphi(r) - Mr^s \leq 0 \leq \varphi(r) + Mr^s$$

dieser Kennlinie durch Verbinden der Endpunkte im positiven Umlaufssinn entsteht, so sieht man genau wie dort ein:

Ein kritischer Ausschnitt k -ter Stufe der Kennlinie des Nabels hat stets dann nichtnegative Umlaufszahl, wenn dasselbe für die in ihm enthaltenen kritischen Ausschnitte der Stufe $k+1$ gilt, insbesondere also, wenn es auf ihm keine Singularitäten höherer Stufe gibt.

Nun kann es aber keine Singularitäten von beliebig hoher Stufe geben. Denn das würde heißen, daß x und y der Kurve (26) eine gemeinsame Nullstellenentwicklung hätten, dann aber ginge diese Kurve für jede Wahl von r durch den Nullpunkt, was ausgeschlossen worden war.

Die kritischen Ausschnitte höchster Stufe haben nach dem Vorgehenden nichtnegative Umlaufszahl; wenden wir vollständige Induktion nach abnehmender Stufenzahl an, so finden wir, daß jeder Ausschnitt nullter Stufe, und damit nach § 5, daß auch die Kennlinie des Nabels nichtnegative Umlaufszahl hat.

Damit ist der Hauptsatz allgemein bewiesen.

In § 1 wurde vorausgesetzt, daß $w(u, v)$ in einer Umgebung des Nabels eine analytische Funktion von u und v sein sollte. Diese Voraussetzung wurde nirgendwo voll benutzt, vielmehr genügt in jedem Fall das Vorhandensein einer Taylorformel mit genügend vielen Gliedern, wobei das Restglied in der üblichen Weise abgeschätzt werden kann. Für die Anzahl der benötigten Glieder läßt sich allerdings keine obere Schranke angeben.

Weiter sei vermerkt, daß die Reihenentwicklung (9) an keiner Stelle gebraucht wurde, sondern nur die aus ihr hergeleitete Reihe (21). Der Hauptsatz gilt also schon, wenn für w nur eine Entwicklung der Form (21) vorhanden ist. Diese Voraussetzung ist viel schwächer, denn wenn (21) aus (9) hervorgeht, so ist $w_m(\theta)$ ein trigonometrisches Polynom der Ordnung m .

Noch allgemeiner gilt aber:

Der Hauptsatz ist auch für jeden Nabel richtig, in dessen Umgebung sich w in eine Reihe

$$(80) \quad w = q^\alpha \sum_{r=0}^{\infty} q^{\beta r} f_r(\theta), \quad \alpha > 2, \beta > 0$$

entwickeln läßt, wobei die $f_r(\theta)$ analytische Funktionen der Periode 2π sein sollen. α und β brauchen dabei nicht einmal rational zu sein.

Der vorangehende Beweis läßt sich nämlich auf diesen Fall sofort übertragen.

Wenn (80) gilt, so ist w_{uu} im Nullpunkt nicht mehr erklärt, strebt aber für $u \rightarrow 0$ nach Null. Gilt jedoch eine Entwicklung (80) mit $\alpha < 2$, so hat w_{uu} für $u \rightarrow 0$ im allgemeinen keinen Grenzwert. Der Nullpunkt ist aber auch dann eine singuläre Stelle des Krümmungsliniennetzes und die Fläche hat für $\alpha > 1$ dort sogar eine stetige Tangentenebene.

Für solche „Nabel“ gilt der Hauptsatz nicht mehr, so hat etwa der Nabel

$$w = \varrho^{\frac{3}{2}} (21 \cos 2\varrho - 2 \cos 6\varrho)$$

die Kennziffer -4 . Hier versagt also der Ansatz, durch Betrachtung der Kennziffer allein kommt man nicht zum Ziel¹²⁾.

§ 7.

Ausblick auf verwandte Fragen.

Es ist naheliegend, Verallgemeinerungen unseres Hauptsatzes zu suchen. Zunächst kann man versuchen, den Satz auf andere Ableitungen als die zweite zu übertragen; wenn die erste Ableitung unserer Funktion $w(u, v)$ im Nullpunkt eine isolierte Nullstelle hat, so wird man vermuten, daß bei einem Umlauf

$$(81) \quad \Delta \arg w_u \geq -2\pi$$

ausfällt; gilt dasselbe für die n -te, ($n \geq 3$), so erwartet man

$$(82) \quad \Delta \arg \frac{\partial^n w}{\partial u^n} \geq -2\pi n.$$

Über die letztere Vermutung ist nichts bekannt, nicht einmal für $n = 3$. Vermutlich würde man hier zum Ziel kommen, wenn man entsprechend Satz I beweisen könnte, daß die Umlaufszahl einer Kurve der Gestalt

$$(83) \quad \begin{aligned} x &= f''' - A f', \\ y &= f'' - B f, \end{aligned}$$

wo f periodisch ist und A und B positive Konstanten sind, nichtnegativ ist. Mit der Methode von § 2 scheint man hier aber nicht durchzukommen.

Dagegen läßt sich (81) ähnlich wie der Hauptsatz beweisen. Der Satz läßt sich aber auch leicht direkt zeigen. Setzt man zunächst

$$(84) \quad \begin{aligned} u &= a + i b, \\ v &= a - i b, \end{aligned}$$

¹²⁾ Das Beispiel ist einem Ansatz von H. FISCHER nachgebildet [a. a. O.⁴⁾, S. 183, die Koeffizienten sind abgeändert worden, weil FISCHERS Beispiel einen Rechenfehler enthält].

so wird w eine reelle analytische Funktion von a und b und man hat:

$$(85) \quad w_u = w_a - i w_b.$$

$\arg w_u$ ist also nichts anderes als der Winkel ψ , den der Gradientvektor (w_a, w_b) mit der a -Achse einschließt, negativ genommen und man muß zeigen, daß

$$(86) \quad \Delta \psi \leq 2\pi$$

gilt.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir $w(0, 0) = 0$ voraussetzen. Die Niveaulinien der Funktion w sind dann entweder geschlossene Kurven, die den Nullpunkt umkreisen — wenn w im Nullpunkt ein Maximum oder Minimum hat —, oder es gibt endlich viele Kurven, die vom Nullpunkt ausgehen, auf denen w verschwindet.

Diese teilen die Umgebung des Nullpunktes in eine gerade Anzahl $2m$ von Sektoren ein, in denen w abwechselnd positives und negatives Vorzeichen hat.

Da der Gradientvektor einer Funktion stets senkrecht auf den Niveaulinien steht, ist im ersten Fall offenbar $\Delta \psi = 2\pi$. Im zweiten sei in der Fig. 7 einer der Sektoren gezeichnet. Wegen des hyperbelähnlichen Verlaufes der Niveaulinien ist für den Teil des Umlaufes, der im Sektor liegt,

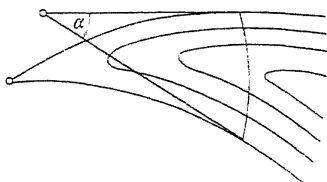


Fig. 7.

$$\Delta \psi = \alpha - \pi,$$

wo α den Winkel darstellt, den die Tangenten an die Begrenzungskurven des Sektors im Eintritts- und Austrittspunkt einschließen. Summiert man über alle Sektoren, so ergibt sich

$$\Delta \psi = 2\pi - 2m\pi.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Schließlich sei noch auf einen Satz über Polynome hingewiesen, der — wie W. BLASCHKE bemerkt hat — aus einem Sonderfall des Hauptsatzes leicht hervorgeht.

Sei nämlich $w(u, v)$ homogen von k -ter Ordnung:

$$(87) \quad w(u, v) = w_k(u, v) = \sum_{i=0}^k a_i u^i v^{k-i}, \quad a_i = \bar{a}_{k-i}.$$

Setzen wir $u = vz$, so wird

$$(88) \quad w(u, v) = v^k \sum_{i=0}^k a_i z^i = v^k P_k(z),$$

$$(89) \quad v^k P'_k(z) = w_{zz} = v^2 w_{uu}.$$

Da bei einem Umlauf um den Nullpunkt

$$\Delta \arg v = -2\pi$$

gilt, ist also

$$\Delta \arg w_{uu} = -(k-2)2\pi + \Delta \arg P_k''(z)$$

und da das linke Glied nach dem Hauptsatz $\geq -4\pi$ ist, findet man

$$(90) \quad \Delta \arg P_k''(z) \geq 2\pi(k-4).$$

Durchläuft u einen Kreis vom Radius ϱ , so durchläuft z den Einheitskreis zweimal. Also:

Wenn z den Einheitskreis durchläuft, ist die Zunahme des Argumentes von $P_k''(z)$ mindestens $\left(\frac{k}{2} - 2\right)2\pi$, $P_k''(z)$ hat also im Einheitskreis mindestens $\frac{k}{2} - 2$ Nullstellen.

Bisher wurde stets vorausgesetzt, daß $P_k''(z)$ auf dem Einheitskreis keine Nullstelle hat. Ist eine solche vorhanden, so wird man die Koeffizienten von $P_k(z)$ unter Erhaltung der Bedingung $a_i = \bar{a}_{k-i}$ stetig so abändern, daß keine Nullstellen von P_k'' mehr auf dem Einheitskreis liegen. Dann sieht man, daß vor der Abänderung wenigstens $\frac{k}{2} - 2$ im Innern oder auf dem Rande des Einheitskreises gelegen haben müssen.

Bemerken wir schließlich, daß unsere Polynome $P_k(z)$, wie man leicht einsieht, dadurch gekennzeichnet sind, daß mit α stets auch $\frac{1}{\alpha}$ eine Nullstelle ist, so finden wir:

Ist $P_k(z)$ ein Polynom k -ter Ordnung in z , dessen Nullstellenfigur bei Spiegelung am Einheitskreis in sich übergeht, so hat $P_k''(z)$ im Innern und auf dem Rande des Einheitskreises mindestens $\frac{k}{2} - 2$ Nullstellen.

Dieser Satz wurde, wie mir Herr BLASCHKE mitteilt, zuerst von G. BULLIG bewiesen (unveröffentlicht). Vermerkt sei, daß bei dem obigen Beweis der Hauptsatz nur im regulären Fall angewendet wird, man kommt also mit Satz I und § 3 aus.

Aus (81) folgt übrigens in derselben Weise, daß $P_k'(z)$ im Innern und auf dem Rande des Einheitskreises mindestens $\frac{k}{2} - 1$ Nullstellen hat. In (82) wäre die entsprechende Aussage über die n -te Ableitung von $P(z)$ enthalten. Diese würde für $n = 3$ übrigens auch schon aus der oben formulierten Vermutung über die Kurve (83) hervorgehen.