

Werk

Titel: Vorlesungen über Zahlentheorie

Autor: Dirichlet, Peter

Verlag: Vieweg

Ort: Braunschweig

Jahr: 1871

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN30976923X

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X>

LOG Id: LOG_0005

LOG Titel: Tabelle, Liste

LOG Typ: table_list

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

I N H A L T.

Erster Abschnitt: Von der Theilbarkeit der Zahlen.

	Seite
§. 1. Das Product aus zwei oder drei Factoren ist unabhängig von der Anordnung der Multiplication	1
§. 2. Producte aus beliebig vielen Factoren	3
§. 3. Erklärung der Theilbarkeit einer Zahl durch eine andere	5
§. 4. Grösster gemeinschaftlicher Theiler zweier Zahlen	6
§. 5. Relative Primzahlen	8
§. 6. Grösster gemeinschaftlicher Theiler von beliebig vielen Zahlen	10
§. 7. Kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches von beliebig vielen Zahlen	11
§. 8. Primzahlen und zusammengesetzte Zahlen; Zerlegung der zusammengesetzten Zahlen in Primzahlen. Die Anzahl der Primzahlen ist unbegrenzt	12
§. 9. Bildung aller Theiler einer Zahl aus den in ihr enthaltenen Primzahlen; Anzahl und Summe dieser Theiler	16
§. 10. Bildung des grössten gemeinschaftlichen Theilers und des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen von beliebig vielen Zahlen aus den in diesen enthaltenen Primzahlen	18
§. 11. Bestimmung der Anzahl $\varphi(m)$, welche angiebt, wie viele der ersten m Zahlen 1, 2, 3 . . . m relative Primzahlen zu der letzten m sind	19
§. 12. Beweis des Satzes, dass $\varphi(mm') = \varphi(m)\varphi(m')$ ist, wenn m und m' relative Primzahlen zu einander sind	23
§. 13. Beweis des Satzes: $\sum \varphi(n) = m$, wo sich das Summenzeichen auf alle Divisoren n der Zahl m bezieht	24
§. 14. Anderer Beweis desselben Satzes	26
§. 15. Bestimmung der höchsten Potenz einer Primzahl, welche in dem Producte 1.2.3 . . . m der ersten m ganzen Zahlen aufgeht. Folgerungen	27
§. 16. Rückblick	30

Zweiter Abschnitt: Von der Congruenz der Zahlen.

§. 17. Erklärung der Congruenz zweier Zahlen in Bezug auf eine dritte. Einfachste Operationen mit Congruenzen	32-
§. 18. Vollständiges Restsystem in Bezug auf einen Modulus	36
§. 19. Beweis des verallgemeinerten Fermat'schen Satzes	38
§. 20. Anderer Beweis desselben Satzes	40
§. 21. Congruenzen mit unbekanntem Grössen; Grad derselben	42
§. 22. Congruenz ersten Grades mit einer Unbekannten; Kriterium ihrer Möglichkeit; erste Methode der Auflösung	43
§. 23. Digression über den Euler'schen Algorithmus	46
§. 24. Zweite Methode der Auflösung der Congruenzen ersten Grades mit einer Unbekannten	51
§. 25. Auflösung der Aufgabe, alle Zahlen zu finden, welche in Bezug auf gegebene Divisoren vorgeschriebene Reste lassen	54
§. 26. Eine Congruenz mit einer Unbekannten, deren Modulus eine Primzahl ist, kann nicht mehr incongruente Wurzeln haben, als ihr Grad Einheiten enthält	57
§. 27. Ableitung des Wilson'schen Satzes aus dem Fermat'schen	61
§. 28. Potenzreste; Exponent, zu welchem eine Zahl gehört	62
§. 29. Ist p eine Primzahl und d ein Divisor von $p - 1$, so gehören $\varphi(d)$ nach p incongruente Zahlen zum Exponenten d	64
§. 30. Primitive Wurzeln einer Primzahl. Indices. Dritte Methode, Congruenzen ersten Grades aufzulösen	66
§. 31. Binomische Congruenzen, deren Modulus eine Primzahl ist. Kriterium ihrer Möglichkeit; Anzahl ihrer Wurzeln	70

Dritter Abschnitt: Von den quadratischen Resten.

§. 32. Quadratische Reste und Nichtreste	74
§. 33. Ist der Modulus eine ungerade Primzahl p , so zerfallen die durch p nicht theilbaren Zahlen in gleich viel Reste und Nichtreste. Charakter eines Productes aus mehreren Factoren. Symbol von Legendre	75
§. 34. Elementarer Beweis der vorhergehenden, so wie der Sätze von Fermat und Wilson	78
§. 35. Fall, in welchem der Modulus eine Potenz einer ungeraden Primzahl ist	80
§. 36. Fall, in welchem der Modulus eine Potenz der Zahl 2 ist	82
§. 37. Fall, in welchem der Modulus eine beliebige Zahl ist	84
§. 38. Der verallgemeinerte Wilson'sche Satz	86
§. 39. Reduction der Aufgabe, die Moduln zu finden, von denen eine gegebene Zahl quadratischer Rest ist	87
§. 40. Die Zahl -1 ist quadratischer Rest aller Primzahlen von der Form $4n + 1$, und Nichtrest aller Primzahlen von der Form $4n + 3$	89
§. 41. Die Zahl 2 ist quadratischer Rest aller Primzahlen von der Form $8n + 1$ und $8n + 7$, Nichtrest aller Primzahlen von der Form $8n + 3$ und $8n + 5$	90
§. 42. Inhalt des Reciprocitätssatzes	92

§. 43. Erster Theil des Beweises; Umformung des früheren Kriteriums für den Charakter einer Zahl. Neuer Beweis des Satzes über die Zahl 2 94

§. 44. Zweiter Theil des Beweises 97

§. 45. Anwendung des Reciprocitätssatzes auf die Aufgabe, den Charakter einer gegebenen Zahl in Bezug auf eine gegebene Primzahl zu bestimmen 101

§. 46. Jacobi's Verallgemeinerung des Symbols von Legendre. Verallgemeinerter Reciprocitätssatz 102

§. 47. Anwendung dieser Verallgemeinerung auf die Werthbestimmung eines Symbols 108

§. 48. Zweiter Beweis des Reciprocitätssatzes; Vorbereitungen . . . 110

§. 49. Erster Theil des Beweises 111

§. 50. Lemma: ist q eine Primzahl von der Form $8n + 1$, so giebt es unterhalb $2\sqrt{q} + 1$ mindestens eine ungerade Primzahl, von welcher q quadratischer Nichtrest ist 114

§. 51. Zweiter Theil des Beweises für den Reciprocitätssatz 115

§. 52. Aufstellung der Linearformen, in denen die Primzahlen enthalten sind, von welchen eine gegebene Zahl quadratischer Rest oder Nichtrest ist 119

Vierter Abschnitt: Von den quadratischen Formen.

§. 53. Binäre quadratische Formen; Coefficienten und Variable derselben; ihre Determinante. Ausschluss der Formen, deren Determinante eine Quadratzahl ist 126

§. 54. Transformation der Formen. Eigentliche und uneigentliche Substitutionen 128

§. 55. Zusammengesetzte Substitutionen 130

§. 56. Eigentliche und uneigentliche Aequivalenz der Formen . . . 132

§. 57. Formen, welche sich selbst uneigentlich äquivalent sind . . . 134

§. 58. Ambige Formen. Jede sich selbst uneigentlich äquivalente Form ist einer ambigen Form äquivalent 136

§. 59. Eintheilung aller Formen von einer bestimmten Determinante in Classen; vollständiges System nicht äquivalenter Formen. Zwei Hauptprobleme der Lehre von der Aequivalenz 138

§. 60. Eigentliche Darstellung der Zahlen durch quadratische Formen; Congruenzwurzeln, zu welchen die Darstellungen gehören. Zurückführung auf die beiden Hauptprobleme 140

§. 61. Reduction des zweiten Problems, aus einer gegebenen Substitution, durch welche eine Form in eine ihr äquivalente Form übergeht, alle ähnlichen Substitutionen zu finden, auf den Fall, in welchem beide Formen identisch sind. Theiler der Formen und Classen 143

§. 62. Reduction des Problems, alle Substitutionen zu finden, durch welche eine Form in sich selbst übergeht, auf die vollständige Auflösung der Pell'schen Gleichung. Lösung derselben für den Fall einer negativen Determinante 146

- §. 63. Angriff des ersten Hauptproblems in der Lehre von der Aequivalenz: zu entscheiden, ob zwei Formen von gleicher Determinante äquivalent sind, oder nicht, und im erstern Falle eine Substitution zu finden, durch welche die eine der beiden Formen in die andere übergeht. Benachbarte Formen 150
- §. 64. Negative Determinanten. Positive Formen; Reducirte Formen. Jede Form ist einer reducirten Form äquivalent 151
- §. 65. Ausnahmefälle, in welchen zwei nicht identische reducirte Formen äquivalent sind 154
- §. 66. Die Aequivalenz oder Nichtäquivalenz zweier Formen von gleicher negativer Determinante wird durch Vergleichung mit reducirten Formen erkannt 156
- §. 67. Die Anzahl der Formenclassen für eine negative Determinante ist endlich 158
- §. 68. Zerlegung der Zahlen in zwei Quadratzahlen 161
- §. 69. Zerlegung der Zahlen in eine einfache und eine doppelte Quadratzahl 163
- §. 70. Darstellung der Zahlen durch die Formen $x^2 + 3y^2$ und $2x^2 + 2xy + 2y^2$ 165
- §. 71. Darstellung der Zahlen durch die Formen $x^2 + 5y^2$ und $2x^2 + 2xy + 3y^2$ 168
- §. 72. Positive Determinanten. Erste und zweite Wurzel einer Form 170
- §. 73. Beziehungen zwischen den gleichnamigen oder ungleichnamigen Wurzeln zweier eigentlich oder uneigentlich äquivalenten Formen. Benachbarte Formen 171
- §. 74. Reducirte Formen von positiver Determinante; Eigenschaften ihrer Wurzeln 173
- §. 75. Es giebt nur eine endliche Anzahl reducirter Formen von einer gegebenen positiven Determinante 176
- §. 76. Jede Form von positiver Determinante ist einer reducirten Form äquivalent 177
- §. 77. Jede reducirte Form von positiver Determinante hat eine und nur eine nach rechts benachbarte reducirte Form, und ebenso eine und nur eine nach links benachbarte reducirte Form 180
- §. 78. Eintheilung der reducirten Formen von positiver Determinante in Perioden von gerader Gliederanzahl 182
- §. 79. Entwicklung der Wurzeln der reducirten Formen von positiver Determinante in periodische Kettenbrüche 186
- §. 80. Digression über die Umformung unregelmässiger Kettenbrüche in regelmässige 190
- §. 81. Lemma aus der Theorie der Kettenbrüche 193
- §. 82. Je zwei äquivalente reducirte Formen von positiver Determinante gehören einer und derselben Periode an. Abschluss des Problems, zu entscheiden, ob zwei Formen von gleicher positiver Determinante äquivalent sind oder nicht 195
- §. 83. Lösung der Pell'schen Gleichung für positive Determinanten in positiven Zahlen durch die Betrachtung der Perioden der reducirten Formen 197

	Seite
§. 84. Kleinste positive Auflösung der Pell'schen Gleichung	204
§. 85. Darstellung aller Auflösungen der Pell'schen Gleichung durch die kleinste positive Auflösung derselben	206

Fünfter Abschnitt: Bestimmung der Anzahl der Classen, in welche die binären quadratischen Formen von gegebener Determinante zerfallen.

§. 86. Feststellung des Gebietes von Zahlen, welche durch das vollständige System ursprünglicher Formen der ersten oder zweiten Art eigentlich dargestellt werden	210
§. 87. Anzahl dieser Darstellungen für den Fall einer negativen Determinante; für den Fall einer positiven Determinante wird die Anzahl der Darstellungen dadurch auf eine endliche reducirt, dass den darstellenden Zahlen neue Beschränkungen auferlegt werden	212
§. 88. Recapitulation. Doppelte Erzeugungsart desselben Gebietes von Zahlen. Fundamentalgleichung	216
§. 89. Umformung der rechten Seite	218
§. 90. Die Fundamentalgleichung wird so umgeformt, dass auch uneigentliche Darstellungen zugelassen werden	221
§. 91. Digression über die Anzahl aller Darstellungen einer Zahl durch das Formensystem. Anwendung auf die Zerlegung der Zahlen in zwei Quadratzahlen	224
§. 92. Digression über einige in der Theorie der Elliptischen Functionen auftretende unendliche Reihen	227
§. 93. Beschränkungen, welche den die Formenclassen repräsentirenden Formen auferlegt werden	230
§. 94. Eintheilung der Werthenpaare der darstellenden Zahlen in eine bestimmte Anzahl von arithmetischen Doppelreihen	232
§. 95. Grenzwert der linken Seite der Fundamentalgleichung für den Fall einer negativen Determinante	236
§. 96. Ausdruck der Classenzahl für eine negative Determinante als Grenzwert einer unendlichen Reihe	239
§. 97. Beziehung zwischen der Classenzahl der Formen der ersten Art und der Classenzahl der Formen der zweiten Art für eine negative Determinante	240
§. 98. Grenzwert der linken Seite der Fundamentalgleichung für den Fall einer positiven Determinante; Ausdruck der Classenzahl als Grenzwert einer unendlichen Reihe	241
§. 99. Beziehung zwischen der Classenzahl der Formen der ersten Art und der Classenzahl der Formen der zweiten Art für eine positive Determinante	245
§. 100. Reduction der Bestimmung der Classenzahl auf den Fall, dass die Determinante durch keine Quadratzahl theilbar ist	248
§. 101. Untersuchung über die Convergenz und über die Stetigkeit der zu betrachtenden unendlichen Reihen	251
§. 102. Besondere Behandlung des ersten Hauptfalls, in welchem die Determinante die Form $4n + 1$ hat	255

	Seite
§. 103. Summation der unendlichen Reihe für diesen Fall	257
§. 104. Endresultat für diesen Fall	261
§. 105. Summation der unendlichen Reihe in den übrigen Fällen	264
§. 106. Zusammenstellung der Formeln, durch welche die Classenanzahl bestimmt wird	272
§. 107. Betrachtung der den positiven Determinanten entsprechenden Formeln; Umformung des Endresultates für den Fall $D \equiv 1$ (mod. 4)	274
§. 108. Umformung für den Fall $D \equiv 3$ (mod. 4)	276
§. 109. Umformung für den Fall $D \equiv 2$ (mod. 8)	278
§. 110. Umformung für den Fall $D \equiv 6$ (mod. 8)	279

S u p p l e m e n t e .

I. Ueber einige Sätze aus der Theorie der Kreistheilung von Gauss.

§. 111. Lemma aus der Theorie der Fourier'schen Reihen	283
§. 112. Bestimmung des Werthes der Summe $\varphi(h, n)$ für den Fall, in welchem $n \equiv 0$ (mod. 4) und $h = 1$ ist	285
§. 113. Allgemeine Sätze über die Summen $\varphi(h, n)$	289
§. 114. Bestimmung von $\varphi(1, n)$	291
§. 115. Bestimmung von $\varphi(h, n)$ wenn n eine ungerade Primzahl ist; dritter Beweis des Reciprocitätssatzes, und der Sätze über den Charakter der Zahlen -1 und 2	293
§. 116. Beweis eines in den §§. 103, 105 benutzten Satzes	296

II. Ueber den Grenzwert einer unendlichen Reihe.

§. 117. Beweis eines Satzes aus der Theorie der harmonischen Reihen	300
§. 118. Ausspruch und Erläuterung eines allgemeineren Satzes	302
§. 119. Beweis desselben	304

III. Ueber einen geometrischen Satz.

§. 120. Zusammenhang zwischen dem Flächeninhalt einer ebenen Figur und der Anzahl der innerhalb dieser Figur liegenden Gitterpunkte	307
---	-----

IV. Ueber die Geschlechter, in welche die Classen der quadratischen Formen von bestimmter Determinante zerfallen.

§. 121. Sätze über den Charakter aller durch eine und dieselbe quadratische Form darstellbaren Zahlen	309
§. 122. Eintheilung der quadratischen Formen in Geschlechter	311
§. 123. Beweis, dass der einen Hälfte der angebbaren Totalcharaktere keine wirklich existirenden Formen entsprechen	315

	Seite
§. 124. Beweis einer Gleichung zwischen zwei Producten aus je zwei unendlichen Reihen	316
§. 125. Beweis, dass der einen Hälfte der angebbaren Totalcharaktere wirklich existirende Geschlechter entsprechen, und dass jedes dieser Geschlechter gleich viele Formenklassen enthält	319
§. 126. Vervollständigung dieses Beweises	324

V. Theorie der Potenzreste für zusammengesetzte Moduli.

§. 127. Dritter Beweis des verallgemeinerten Fermat'schen Satzes (§. 19)	327
§. 128. Beweis der Existenz von primitiven Wurzeln für einen Modulus, der eine beliebige Potenz einer ungeraden Primzahl ist	328
§. 129. Theorie der Indices für solche Moduli	332
§. 130. Fall, wenn der Modulus eine Potenz der Zahl 2 ist; Indices	333
§. 131. Fall, wenn der Modulus eine beliebig zusammengesetzte Zahl ist; Indices	335

VI. Beweis des Satzes, dass jede unbegrenzte arithmetische Progression, deren erstes Glied und Differenz ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Factor sind, unendlich viele Primzahlen enthält.

§. 132. Beweis einer allgemeinen Gleichung zwischen einem unendlichen Product und einer unendlichen Reihe	338
§. 133. Specialisirung dieses Satzes; Eintheilung der Reihen L in drei Classen L_1, L'_2, L_3	341
§. 134. Grenzwerte dieser Reihen	344
§. 135. Beweis, dass die Grenzwerte der Reihen L_2 von Null verschieden sind; Zusammenhang mit der Theorie der quadratischen Formen	347
§. 136. Beweis, dass die Grenzwerte der Reihen L_3 von Null verschieden sind	350
§. 137. Beweis des Satzes über die arithmetische Progression	353

VII. Ueber einige Sätze aus der Theorie der Kreistheilung.

§. 138. Beweis einer Eigenschaft des Ausdrucks $\varphi(m)$	356
§. 139. Bildung der Gleichung, deren Wurzeln die primitiven m ten Wurzeln der Einheit sind; Zerlegung der linken Seite derselben in zwei Factoren, für den Fall, dass m eine ungerade durch kein Quadrat theilbare Zahl P ist	359
§. 140. Berechnung der Coefficienten dieser Factoren	362

VIII. Ueber die Pell'sche Gleichung.

§. 141. Satz über die rationalen Näherungswerte für die Quadratwurzel aus einer positiven Zahl D , welche keine vollständige Quadratzahl ist	366
§. 142. Beweis des Satzes, dass der Gleichung $t^2 - Du^2 = 1$ immer durch ganze Zahlen t, u Genüge geschehen kann, deren letztere u von Null verschieden ist	368

IX. Ueber die Convergenz und Stetigkeit einiger unendlichen Reihen.	
§. 143. Methode der theilweisen Summation	371
§. 144. Eigenschaften der Dirichlet'schen Reihen	375
X. Ueber die Composition der binären quadratischen Formen.	
§. 145. Lemma über die Congruenzen zweiten Grades	380
§. 146. Composition zweier einigen Formen. Fundamentalsatz	381
§. 147. Composition zweier oder mehrerer einigen Classen	384
§. 148. Wichtigste specielle Fälle der Composition	386
§. 149. Perioden und Gruppen von ursprünglichen Classen der ersten Art	387
§. 150. Vergleichung der Anzahl der Classen von beliebigem-Theiler mit der Anzahl der ursprünglichen Classen der ersten Art	389
§. 151. Resultat dieser Vergleichung	392
§. 152. Composition der Geschlechter	399
§. 153. Anzahl der ambigen ursprünglichen Classen erster Art	401
§. 154. Vierter Beweis des Reciprocitätssatzes	404
§. 155. Ueber die Anzahl der wirklich existirenden Geschlechter	406
§. 156. Ableitung aller Lösungen der Gleichung $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ aus einer gegebenen	408
§. 157. Hauptsatz über die Lösbarkeit dieser Gleichung	418
§. 158. Jede Classe des Hauptgeschlechtes entsteht durch Duplication	422
§. 159. Endliche Körper	423
§. 160. Ganze algebraische Zahlen	436
§. 161. Theorie der Moduln	442
§. 162. Ganze Zahlen eines endlichen Körpers	445
§. 163. Theorie der Ideale eines endlichen Körpers	452
§. 164. Idealclassen und Composition derselben	462
§. 165. Zerlegbare Formen	465
§. 166. Theorie der Einheiten	471
§. 167. Methode zur Bestimmung der Anzahl der Idealclassen	480
§. 168. Primideale in quadratischen Körpern	485
§. 169. Moduln in quadratischen Körpern	488
§. 170. Composition der quadratischen Formen	490