SUB | NIEDERSÄCHSISCHE STAATS- UND UNIVERSITÄTSBIBLIOTHEK GÖTTINGEN

Werk

Titel: Vorlesungen über Zahlentheorie
Autor: Dirichlet, Peter
Verlag: Vieweg
Ort: Braunschweig
Jahr: 1871
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN30976923X
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X

LOG Id: LOG_0007
LOG Titel: §. 1. Das Product aus zwei oder drei Factoren ist unabhängig von der Anordnung der Multiplication
LOG Typ: chapter

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.
Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.
Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Erster Abschnitt.

Von der Theilbarkeit der Zahlen.

§. 1.

Wir behandeln in diesem Abschnitte einige arithmetische Sätze, welche man zwar in den meisten Lehrbüchern vorfindet, die aber für unsere Wissenschaft von so fundamentaler Bedeutung sind, dass eine strenge Begründung derselben hier durchaus nothwendig erscheint. Dahin gehört zuerst der Satz, dass das Product einer Reihe von ganzen positiven Zahlen unabhängig von der Anordnung ist, in welcher man die Multiplication ausführt. Indem wir uns zunächst auf den Fall beschränken, in welchem es sich um *drei* Zahlen a, b, c handelt, bilden wir das folgende Schema

$$\begin{array}{l} c, \; c, \; c, \; c \ldots c \\ c, \; c, \; c, \; c \ldots c \\ c, \; c, \; c, \; c \ldots c \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ c, \; c, \; c, \; c \ldots c \end{array}$$

welches aus b Horizontalreihen besteht, deren jede die Zahl c gleich oft, nämlich $a$mal enthält, und stellen uns die Aufgabe, die Summe aller aufgeschriebenen Zahlen zu bestimmen. Zunächst können wir sagen: da die Zahl c in jeder Horizontalreihe $a$mal vorkommt, so ist nach dem Grundbegriff der Multiplication die

Summe aller in einer solchen Reihe befindlichen Zahlen gleich ca, indem wir den *Multiplicand* c durch die Stellung von dem *Multiplicator* a unterscheiden; da ferner b solche Horizontalreihen vorhanden sind, so ist die Summe sämmtlicher Zahlen gleich $(ca)b$, wo jetzt ca der Multiplicand, b der Multiplicator ist. Nun können wir aber dieselbe Summe auch auf anderm Wege durch die Bemerkung bestimmen, dass das obige Schema aus a Verticalreihen besteht, deren jede $b$mal die Zahl c enthält; es ist also die Summe aller in einer Verticalreihe befindlichen Zahlen gleich cb, und folglich die Totalsumme gleich $(cb)a$. Wir erhalten mithin das erste Resultat

$$(ca)b = (cb)a,$$

aus welchem wir, indem wir die bisher ganz willkürliche Zahl $c = 1$ setzen, die Folgerung ziehen, dass

$$ab = ba$$

ist, d. h.: *in einem Product aus zwei ganzen positiven Zahlen dürfen Multiplicand und Multiplicator mit einander vertauscht werden.* Man lässt deshalb auch in der Benennung den Unterschied zwischen Multiplicand und Multiplicator ganz fallen, indem man beide unter dem gemeinschaftlichen Namen *Factoren* zusammenfasst.

Wir können nun dieselbe Totalsumme sämmtlicher in dem obigen Schema befindlichen Zahlen noch auf eine dritte Art bestimmen, indem wir abzählen, wie oft der Summand c im Ganzen vorkommt. Zunächst ist a die Anzahl der in einer jeden Horizontalreihe befindlichen Zahlen c, und folglich ist, da b solche Horizontalreihen vorhanden sind, die Anzahl aller aufgeschriebenen Zahlen gleich ab. Hieraus folgt, dass die Totalsumme den Werth $c(ab)$ hat, dass also

$$(ca)b = (cb)a = c(ab)$$

ist. Verbindet man hiermit den schon oben betrachteten speciellen Fall $ab = ba$, so kann man das Bisherige in folgendem Satze zusammenfassen:

Wenn man von drei positiven ganzen Zahlen zwei nach Belieben auswählt und als Factoren zu ihrem Producte vereinigt, sodann dieses Product und die dritte jener drei Zahlen mit einander multiplicirt, so hat das so entstehende Product stets denselben Werth, wie man auch die ersten beiden Zahlen ausgewählt haben mag.

Da also dieses Product von der Anordnung der beiden successiven Multiplicationen ganz unabhängig ist, so bezeichnet man