

## Werk

**Titel:** Vorlesungen über Zahlentheorie

**Autor:** Dirichlet, Peter

**Verlag:** Vieweg

**Ort:** Braunschweig

**Jahr:** 1871

**Kollektion:** Mathematica

**Digitalisiert:** Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

**Werk Id:** PPN30976923X

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X>

**OPAC:** <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X>

**LOG Id:** LOG\_0010

**LOG Titel:** §. 4. Grösster gemeinschaftlicher Theiler zweier Zahlen

**LOG Typ:** chapter

## Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

1. Ist  $a$  Multiplum von  $b$ ,  $b$  wieder Multiplum von  $c$ , so ist auch  $a$  Multiplum von  $c$ . Denn der Annahme nach ist  $a = mb$ ,  $b = nc$ , wo  $m$  und  $n$  irgend zwei ganze Zahlen bedeuten; hieraus folgt  $a = m(nc) = (mn)c$ , also ist  $a$  theilbar durch  $c$ .

Allgemein: hat man eine Reihe von Zahlen, in welcher jede ein Vielfaches der nächstfolgenden ist, so ist auch jede frühere Zahl ein Vielfaches von jeder spätern.

2. Ist die Zahl  $a$  sowohl als auch  $b$  ein Multiplum einer dritten Zahl  $c$ , so ist auch die Summe und die Differenz der beiden ersteren ein Multiplum der dritten. Denn aus  $a = mc$ ,  $b = nc$  folgt  $a \pm b = (m \pm n)c$ .

## §. 4.

Von der grössten Wichtigkeit für die Lehre von der Theilbarkeit der Zahlen ist folgende Aufgabe \*): *Wenn irgend zwei ganze positive Zahlen  $a$ ,  $b$  gegeben sind, so sollen die gemeinschaftlichen Theiler derselben, d. h. diejenigen Zahlen  $\delta$  gefunden werden, welche gleichzeitig in  $a$  und in  $b$  aufgehen.*

Wir können annehmen, es sei  $a$  grösser oder wenigstens nicht kleiner als  $b$ ; dann wird die Division von  $a$  durch  $b$  einen Quotienten  $m$  und einen Rest  $c$  geben, welcher letztere jedenfalls kleiner als  $b$  ist. Betrachten wir nun die aus dieser Division resultirende Gleichung

$$a = mb + c$$

und nehmen wir an, es sei  $\delta$  irgend eine sowohl in  $a$  als in  $b$  aufgehende Zahl, so ist  $\delta$  jedenfalls auch ein Divisor des Restes  $c$ ; denn da  $a$  und  $b$  Multipla von  $\delta$  sind, so ist (nach §. 3)  $mb$ , und folglich auch die Differenz  $a - mb = c$  ein Multiplum von  $\delta$ . Wir können daher sagen: jeder gemeinschaftliche Theiler der beiden Zahlen  $a$ ,  $b$  ist auch ein gemeinschaftlicher Theiler der beiden Zahlen  $b$ ,  $c$ . Umgekehrt, ist  $\delta$  ein gemeinschaftlicher Divisor der beiden Zahlen  $b$ ,  $c$ , so ist, da  $\delta$  dann auch in  $mb$  aufgeht, die Summe  $mb + c = a$  der beiden Multipla  $mb$  und  $c$  von  $\delta$  ebenfalls ein Multiplum von  $\delta$ ; also ist jeder gemeinschaftliche Divisor der Zahlen  $b$ ,  $c$  auch gemeinschaftlicher Divisor der Zahlen  $a$ ,  $b$ . mithin stimmen die gemeinschaftlichen Divisoren der beiden Zahlen  $a$ ,  $b$

\*) *Euclid's Elemente*, Buch VII, Satz 2.

vollständig mit denen der beiden Zahlen  $b, c$  überein; unsere Untersuchung ist daher von dem Paare  $a, b$  auf das Paar  $b, c$  reducirt, und da  $b$  nicht grösser als  $a$ ,  $c$  aber jedenfalls kleiner als  $b$  ist, so können wir mit Recht sagen, dass das Problem auf ein einfacheres zurückgeführt sei.

Wenn nun  $c$  von Null verschieden ist, die erste Division also nicht aufgeht, so können wir, indem wir  $b$  durch die kleinere Zahl  $c$  dividiren, wieder eine Gleichung von der Form

$$b = nc + d$$

bilden, in welcher der Divisionsrest  $d$  kleiner als der vorhergehende  $c$  ist. Durch eine der obigen ganz ähnliche Betrachtung ergibt sich dann, dass die gemeinschaftlichen Divisoren der beiden Zahlen  $c, d$  vollständig mit denen der Zahlen  $b, c$  und also auch mit denen der Zahlen  $a, b$  übereinstimmen.

So kann man fortfahren, bis einmal die Division aufgeht, was nach einer endlichen Anzahl von Operationen durchaus eintreten muss; denn die Zahlen  $b, c, d \dots$  bilden eine Reihe von beständig abnehmenden Zahlen, und da es nur eine endliche Anzahl von Zahlen giebt, welche kleiner sind als  $b$ , so muss unter ihnen endlich auch die Null erscheinen. Wir haben dann eine Kette von Gleichungen von der Form

$$a = mb + c$$

$$b = nc + d$$

$$c = pd + e$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots$$

$$f = sg + h$$

$$g = th.$$

Jeder gemeinschaftliche Divisor  $\delta$  von  $a, b$  ist auch Divisor der folgenden Zahlen  $c, d \dots$ , endlich auch von  $h$ ; umgekehrt, ist  $\delta$  ein Divisor von  $h$ , so lehrt die letzte Gleichung, dass  $\delta$  auch Divisor von  $g$ , also gemeinschaftlicher Divisor von  $g$  und  $h$  ist; folglich ist  $\delta$  auch Divisor von  $f$  und ebenso von den vorhergehenden Zahlen, endlich auch von  $b$  und von  $a$ . Wir haben daher das Resultat:

*Die gemeinschaftlichen Divisoren zweier Zahlen  $a$  und  $b$  stimmen überein mit den sämtlichen Divisoren Einer bestimmten Zahl  $h$ , welche man durch den obigen Algorithmus stets finden kann. Da nun  $h$  selbst zu diesen Divisoren gehört und unter ihnen dem*