NIEDERSÄCHSISCHE STAATS- UND
UNIVERSITÄTSBIBLIOTHEK GÖTTINGEN

Werk

Titel: Vorlesungen über Zahlentheorie
Autor: Dirichlet, Peter
Verlag: Vieweg
Ort: Braunschweig
Jahr: 1871
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN30976923X
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X

LOG Id: LOG_0011
LOG Titel: §. 5. Relative Primzahlen
LOG Typ: chapter

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.
Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.
Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Werth nach der grösste ist, so nennt man diese Zahl h den *grössten gemeinschaftlichen Divisor* der beiden Zahlen a und b.

Hiermit ist nun zwar unser Problem nicht vollständig gelöst, sondern nur auf das andere zurückgeführt, sämmtliche Divisoren einer gegebenen Zahl h zu finden, für welches wir noch keine directe Lösung haben; allein es wird sich im Folgenden hinreichend zeigen, dass der obige Algorithmus ein Fundament bildet, auf welchem sich die Grundprincipien der Zahlentheorie mit ebenso grosser Strenge wie Leichtigkeit aufbauen lassen. Nur einige Bemerkungen noch, um auch nicht den geringsten Zweifel gegen die Allgemeinheit der folgenden Sätze aufkommen zu lassen: wir haben die obige Kette von Gleichungen gebildet unter der Voraussetzung, dass a nicht kleiner als b sei; allein für den Fall, dass $a < b$ sein sollte, braucht man nur $m = 0$, also $c = a$ zu nehmen, um dieselbe Form auch dann zu wahren. Ebenso leicht erkennt man, dass das Vorzeichen der Zahlen a, b ganz unwesentlich ist; ja, es darf sogar eine von ihnen $= 0$ sein; nur, wenn beide $= 0$ sind, kann von einem grössten gemeinschaftlichen Divisor derselben keine Rede sein.

§. 5.

Besonders interessant ist der specielle Fall, in welchem der grösste gemeinschaftliche Divisor zweier Zahlen a, b die Einheit ist; man nennt zwei solche Zahlen *relative Primzahlen*, auch wohl *Zahlen ohne gemeinschaftlichen Divisor*, indem man absieht von dem allen Zahlen gemeinschaftlichen Divisor 1; oder man sagt auch: a ist relative Primzahl *gegen* oder *zu* b. Dieser Definition zufolge erkennt man also zwei Zahlen als relative Primzahlen daran, dass bei dem Algorithmus des grössten gemeinschaftlichen Divisors einmal der Rest $h = 1$ auftritt. Für solche Zahlen gilt nun der folgende

Hauptsatz: Sind a, b relative Primzahlen, und ist k eine beliebige dritte Zahl, so ist jeder gemeinschaftliche Theiler der beiden Zahlen ak, b auch gemeinschaftlicher Theiler der beiden Zahlen k, b.

Um sich hiervon zu überzeugen, braucht man nur sämmtliche Gleichungen, die bei dem Algorithmus des grössten gemeinschaftlichen Divisors der Zahlen a, b gebildet werden, und deren vorletzte, da $h = 1$ ist, in unserm Falle $f = sg + 1$ lautet, mit k zu multipliciren; man erhält dann

$$\begin{aligned} ak &= mbk + ck \\ bk &= nck + dk \\ ck &= pdk + ek \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ fk &= sgk + k. \end{aligned}$$

Ist nun δ irgend ein gemeinschaftlicher Divisor von ak und b, so geht δ auch in mbk, also auch in $ak - mbk = ck$ auf; es geht daher δ auch in nck und folglich auch in $bk - nck = dk$ auf. Und indem man diese Schlussweise fortsetzt, gelangt man zu dem Resultat, dass δ auch in fk, in gk, folglich auch in $fk - sgk = k$ aufgehen muss, was zu beweisen war.

Im Folgenden werden wir vorzüglich zwei specielle Fälle dieses Satzes gebrauchen, nämlich:

1. *Das Product zweier Zahlen a und k, deren jede relative Primzahl gegen eine dritte b ist, ist gleichfalls relative Primzahl zu b;* denn unserm Satze nach haben ak und b dieselben gemeinschaftlichen Divisoren, wie k und b; da aber k und b relative Primzahlen sind, so haben sie nur den einzigen gemeinschaftlichen Divisor 1; dasselbe gilt daher von ak und b, also sind diese Zahlen relative Primzahlen.

2. *Sind a und b relative Primzahlen, und ist ak durch b theilbar, so ist auch k durch b theilbar;* denn da der Annahme zufolge ak und b den gemeinschaftlichen Divisor b haben, so muss dem Hauptsatze nach b auch gemeinschaftlicher Divisor von k und b, also jedenfalls Divisor von k sein.

3. Den ersten dieser beiden Sätze kann man leicht verallgemeinern. Ist jede der Zahlen $a, b, c, d \ldots$ relative Primzahl gegen eine Zahl α, so ist auch ab, folglich auch das Product abc aus ab und c, folglich auch das Product $abcd$ aus abc und d u. s. f., kurz das Product $abcd\ldots$ aller jener Zahlen ebenfalls relative Primzahl gegen α. Allgemeiner, *hat man zwei Reihen von Zahlen*

$$a, b, c, d \ldots$$

und

$$\alpha, \beta, \gamma \ldots$$

von der Beschaffenheit, dass jede Zahl der einen Reihe relative Primzahl gegen jede Zahl der andern Reihe ist, so ist auch das Product $abcd\ldots$ aller Zahlen der einen Reihe relative Primzahl