Werk

Titel: Vorlesungen über Zahlentheorie
Autor: Dirichlet, Peter
Verlag: Vieweg
Ort: Braunschweig
Jahr: 1871
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN30976923X
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X

LOG Id: LOG_0015
LOG Titel: §. 9. Bildung aller Theiler einer Zahl aus den in ihr enthaltenen Primzahlen; Anzahl und Summe dieser Theiler
LOG Typ: chapter

Annahme im Widerspruch, und folglich giebt es unendlich viele Primzahlen.

Dieser Satz ist nur ein specieller Fall des andern, dass in jeder unbegrenzten arithmetischen Progression, deren allgemeines Glied $kx + m$ ist, und in welcher das Anfangsglied m und die Differenz k relative Primzahlen sind, unendlich viele Primzahlen enthalten sind; allein, so einfach der Beweis für den speciellen Fall war, in welchem $k = 1$, so schwierig war es, einen strengen Beweis für den allgemeinen Satz zu geben, und dies ist bis jetzt nur durch Zuziehung von Principien gelungen, welche der Infinitesimalrechnung angehören *).

§. 9.

Durch den soeben bewiesenen Fundamentalsatz haben wir nun ein einfaches Kriterium gewonnen, nach welchem stets beurtheilt werden kann, ob eine Zahl m durch eine andere n theilbar ist oder nicht, sobald wir voraussetzen dürfen, dass beide in ihre Primfactoren zerlegt sind. Nehmen wir nämlich an, dass m durch n theilbar, dass also $m = nq$ ist, so leuchtet ein, dass jede in n aufgehende Primzahl auch in m aufgehen muss; es kann daher n keine anderen Primfactoren enthalten als m, und ausserdem kann auch ein solcher Primfactor nicht öfter in n als in m vorkommen; und umgekehrt, wenn jeder Primfactor der Zahl n mindestens ebenso oft in m vorkommt wie in n, so ist auch m durch n theilbar.

Sind daher a, b, c .. die sämmtlichen von einander verschiedenen, in m aufgehenden Primzahlen, so dass

$$m = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots,$$

so ist jeder Divisor n dieser Zahl in der Form

$$n = a^{\alpha'} b^{\beta'} c^{\gamma'} \ldots$$

enthalten, in welcher

α'	irgend	eine	der	$\alpha + 1$	Zahlen	$0, 1, 2 \ldots \alpha$
β'	„	„	„	$\beta + 1$	„	$0, 1, 2 \ldots \beta$
γ'	„	„	„	$\gamma + 1$	„	$0, 1, 2 \ldots \gamma$

u. s. w.

*) Siehe die Supplemente VI. §. 132 bis 137.

bedeutet; und alle diese Zahlen n sind wirklich Divisoren von m. Hieraus gehen sogleich einige interessante Folgerungen hervor.

Zunächst leuchtet ein, da jede Combination eines Werthes von α' mit einem von β', mit einem von γ' u. s. w. einen Divisor von m liefert, und da je zwei verschiedenen solchen Combinationen (nach §. 8) auch zwei ungleiche Divisoren von m entsprechen, dass die Anzahl aller Divisoren von m gleich

$$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots$$

ist; diese Anzahl hängt daher nur von den Exponenten $\alpha, \beta, \gamma\ldots$ ab, nicht aber von der Natur der in m aufgehenden Primzahlen a, b, c u. s. w.

Bildet man ferner das Schema

$$\begin{array}{l} 1,\ a,\ a^2\ \ldots\ a^\alpha \\ 1,\ b,\ b^2\ \ldots\ b^\beta \\ 1,\ c,\ c^2\ \ldots\ c^\gamma \end{array}$$

u. s. w.

und bildet alle Producte $a^{\alpha'} b^{\beta'} c^{\gamma'}\ldots$, indem man aus jeder dieser Horizontalreihen ein Glied $a^{\alpha'}, b^{\beta'}, c^{\gamma'}\ldots$ auswählt, so erhält man alle Divisoren der Zahl m, und zwar jeden nur ein einziges Mal. Die Summe aller dieser Divisoren erhält man daher nach derselben Regel, nach welcher man die einzelnen Aggregate

$$1+a+a^2+\ldots+a^\alpha = \frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}$$

$$1+b+b^2+\ldots+b^\beta = \frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}$$

$$1+c+c^2+\ldots+c^\gamma = \frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1}$$

u. s. w.

mit einander zu multipliciren hat; folglich ist die Summe aller Divisoren der Zahl m gleich dem Product

$$\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}\cdot\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}\cdot\frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1}\ldots$$

Nehmen wir z. B. $m = 60 = 2^2.3.5$, so sind die sämmtlichen Divisoren folgende:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60;$$

ihre Anzahl ist

$$(2+1)(1+1)(1+1) = 12$$