und ihre Summe

$$\frac{2^3-1}{2-1}\cdot\frac{3^2-1}{3-1}\cdot\frac{5^2-1}{5-1}=7.4.6=168.$$

§. 10.

Wir kehren nun zu einigen früheren Aufgaben zurück, zunächst zu derjenigen (§. 6), den grössten gemeinschaftlichen Divisor einer Reihe von Zahlen zu bilden, jetzt unter der Voraussetzung, dass ihre Zerlegungen in Primfactoren gegeben sind. Man betrachte alle Primzahlen, welche in diesen Zerlegungen vorkommen, und scheide zunächst diejenigen unter ihnen aus, welche in einer oder mehreren der gegebenen Zahlen gar nicht als Primfactoren enthalten sind. Bleibt auf diese Weise gar keine Primzahl übrig, so ist die Einheit der gesuchte grösste gemeinschaftliche Divisor. Im entgegengesetzten Fall sei a eine Primzahl, welche bei dieser vorläufigen Ausscheidung zurückgeblieben ist und also in jeder der gegebenen Zahlen mindestens einmal enthalten ist; man zähle, wie oft a als Primfactor in jeder einzelnen der gegebenen Zahlen vorkommt, und nehme die kleinste dieser Anzahlen, die wir mit α bezeichnen, so dass a in mindestens einer der gegebenen Zahlen genau α mal, in allen übrigen aber mindestens ebenso oft als Primfactor vorkommt. Aehnlich verfahre man mit den übrigen Primzahlen $b, c \ldots$, sofern diese noch nicht erschöpft sind, und bilde für jede, für b die Anzahl β, für c die Anzahl γ u. s. w. nach derselben Regel, nach welcher für die Primzahl a die Anzahl α gebildet wurde. Dann ist

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$$

der gesuchte grösste gemeinschaftliche Divisor. Der Beweis für diese Regel leuchtet unmittelbar dadurch ein, dass der grösste gemeinschaftliche Divisor keine anderen Primfactoren enthalten kann, als solche, welche in jeder der gegebenen Zahlen enthalten sind, und dass er keinen Primfactor öfter enthalten kann, als irgend eine der gegebenen Zahlen.

Aehnlich gestaltet sich die Lösung der anderen Aufgabe, das kleinste gemeinschaftliche Multiplum einer Reihe von gegebenen Zahlen zu bilden (§. 7). Jetzt betrachte man *jede* Primzahl, die in irgend einer der gegebenen Zahlen als Factor enthalten ist, und sehe nach, in welcher sie am häufigsten vorkommt; ebenso oft